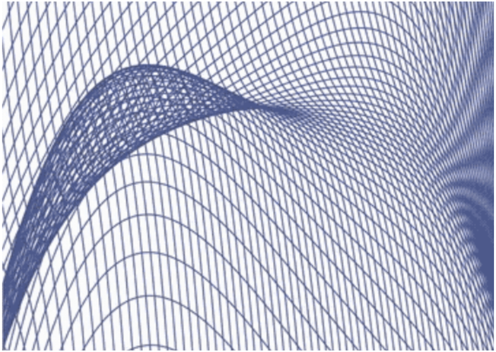
CM 4 - Différentiation d'une composée

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Composée d'une catastrophe de type "cusp" avec une projection

Adresses utiles

Deux adresses :

http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/borrelli/Cours_Math2

http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2/

Matrice jacobienne

Définition.– La *matrice jacobienne* $J_f(x)$ d'une application différentiable $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ et en un point $x \in D$ est la matrice de l'application linéaire $df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$J_f(x) := Mat_{\mathcal{B}}(df_x)$$

• Si $(f_1, ..., f_m)$ sont les composantes de f, on a alors

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}).$$

Matrice jacobienne

• Si $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + ... + v_n\vec{e}_n$, on a donc

$$df_x(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Définition.– Si la matrice jacobienne est carrée ($n = m$), son déterminant $\mathrm{Jac}\, f = \det J_f$ s'appelle le *jacobien de f*.

• Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$, on a

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$$

(matrice ligne)

Matrice jacobienne

• Si $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \ (u,v) \mapsto h(u,v) = \big(h_1(u,v), h_2(u,v)\big)$, on a

$$J_h(u,v) \ = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, h(u,v) = \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial u}\frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v}$$

Matrice jacobienne

• Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \ t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, on a

$$J_g(t) \ = \ \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \gamma'(t) \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$$

• Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ z \mapsto g(z)$, on a

$$J_g(z) = \Big(g'(z)\Big) \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Jac}\, g(z) \ = \ g'(z) \in \mathbb{R}$$

(matrice colonne = vecteur)

Exemples

• Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x^2y$. Alors

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}$$

• Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $h(u,v) = (u^2v, 3u)$. Alors

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22} \quad \text{et} \quad \mathrm{Jac}\, h(u,v) = -3u^2$$

• Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $\gamma(t) = (2t, t^3 + 1)$. Alors

$$J_\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}$$

Exemples

• Jacobien du changement de variables en coordonnées polaires :

$$h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$$

On a

$$J_h(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho,\varphi) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

Exemples

• Jacobien du changement de variables en coordonnées cylindriques :

$$h(\rho,\varphi,z)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)$$

On a

$$J_h(\rho,\varphi,z)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho,\varphi,z)=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho$$

Exemples

• Jacobien du changement de variables en coordonnées sphériques :

$$h(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$$

On a

$$J_h(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}\, h(r,\varphi,\theta) &= -r^2\cos\theta\Big(\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta + \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\Big) \\ &\quad -r\sin\theta\Big(r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta\Big) \\ &= -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin^3\theta \\ &= -r^2\sin\theta \end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– Calculer le gradient, la différentielle et la matrice jacobienne de la fonction de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y, z) = z \sin(xy).$$

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) \\ xz \cos(xy) \\ \sin(xy) \end{pmatrix}$$

$$df_{(x,y,z)} = yz \cos(xy)\, dx + xz \cos(xy)\, dy + \sin(xy)\, dz$$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) & xz \cos(xy) & \sin(xy) \end{pmatrix}$$

Exercices

Énoncé.– Calculer la différentielle et la matrice Jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\sin x \\ z\sin y \end{pmatrix}.$$

Réponse.– On a

$$df_{(x,y,z)}(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} z\cos x \\ 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ z\cos y \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin y \end{pmatrix} Z$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\cos x & 0 & \sin x \\ 0 & z\cos y & \sin y \end{pmatrix}$$

Récapitulatif

Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle de classe C^1, alors :

- les **dérivées partielles** sont des fonctions réelles

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}}$$

- Le **gradient** est une fonction vectorielle

$$\boxed{\vec{\nabla} f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n}$$

donnée par $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Récapitulatif

• La **différentielle** est une fonction à valeur dans les formes linéaires

$$\boxed{df : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$$

donnée par $\quad df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n$

• La **jacobienne** est une fonction à valeur dans les matrices à une ligne et n colonnes

$$\boxed{J_f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})}$$

donnée par $\quad J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Récapitulatif

Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction vectorielle de classe C^1 et de composantes $f = (f_1, ..., f_m)$, alors :

- Les **dérivées partielles** sont des fonctions vectorielles

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m}$$

données par $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}, ..., \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)$

- Le **gradient** "$\overrightarrow{\nabla} f$" n'est pas défini.

Récapitulatif

• La **différentielle** est une fonction à valeur dans les applications linéaires

$$\boxed{df : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$$

• La **jacobienne** est une fonction à valeur dans les matrices

$$\boxed{J_f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})}$$

donnée par $J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Règle de différentiation d'une composée

Proposition.– *Soient $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions différentiables et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :*

- *La somme $f+g$ est différentiable et*

$$\boxed{\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n}$$

Par conséquent

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g \quad si \quad m = 1$$

et

$$d(f+g) = df + dg, \quad J_{f+g} = J_f + J_g$$

.

Règle de différentiation d'une composée

- *Le produit par un scalaire $\lambda\, f$ est différentiable et*

$$\boxed{\frac{\partial(\lambda\, f)}{\partial x_i} = \lambda\,\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n}$$

Par conséquent

$$\vec{\nabla}(\lambda\, f) = \lambda\,\vec{\nabla} f \qquad \textit{si } m = 1$$

et

$$d(\lambda\, f) = \lambda\, df \qquad \textit{et} \qquad J_{\lambda\, f} = \lambda\, J_f.$$

Règle de différentiation d'une composée

Si $m = 1$ alors le produit fg est différentiable et se différencie selon la règle de Leibniz :

$$\boxed{\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, g + f\, \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n}$$

Par conséquent

$$\overrightarrow{\nabla}(fg) = \left(\overrightarrow{\nabla} f\right) g + f\, \left(\overrightarrow{\nabla} g\right)$$

et

$$d(fg) = (df)\, g + f\, (dg) \qquad \textit{et} \qquad J_{fg} = (J_f)\, g + f\, (J_g)$$

Exemple

• Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy^2\, e^{xy}$. Le calcul de la différentielle de f peut se faire directement au moyen de la formule

$$d\left(xy^2\, e^{xy}\right) = \frac{\partial(xy^2\, e^{xy})}{\partial x}\, dx + \frac{\partial(xy^2\, e^{xy})}{\partial y}\, dy$$

ou en passant par la règle de Leibniz

$$\begin{aligned} d\left(xy^2\, e^{xy}\right) &= d(xy^2)\, e^{xy} + xy^2\, d(e^{xy}) \\ &= (y^2\, dx + 2xy\, dy)\, e^{xy} \\ &\quad + xy^2\, (y\, e^{xy}\, dx + x\, e^{xy}\, dy) \\ &= (y^2 + xy^3)\, e^{xy}\, dx + (2xy + x^2y^2)\, e^{xy}\, dy \end{aligned}$$

Composée de différentielles

Proposition.– *Soient* $f = (f_1, ..., f_m) : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *et* $g = (g_1, ..., g_p) : D_g \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *deux fonctions différentiables. Soient* $x \in D_f$ *et* $y = f(x) \in D_g$*, alors* $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *est différentiable en* x *et on a :*

- $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$

(composition d'applications linéaires)

- $J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x)$

(produit de matrices)

- *Pour tout* $i = 1, ..., n$ *et tout* $j = 1, ..., p$*, on a*

$$\boxed{\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(x))\,\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \cdots + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}(f(x))\,\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)}$$

(règle de composition des différentielles)

Cas particuliers

• Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto z = f(x, y)$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z)$. On a

$$d\big(g \circ f\big)_{(x,y)} = g'\big(f(x, y)\big)\ df_{(x,y)},$$

$$J_{g\circ f}(x, y) = g'\big(f(x, y)\big)\ J_f(x, y)$$

et

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x, y) = g'\big(f(x, y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\[2ex] \dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x, y) = g'\big(f(x, y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array}\right.}$$

Cas particuliers

• Soient $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto (x,y) = h(u,v)$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$. On a :

$$d\big(f \circ h\big)_{(u,v)} = df_{h(u,v)} \circ dh_{(u,v)}$$

$$J_{f\circ h}(u,v) = J_f\big(h(u,v)\big)\ J_h(u,v)$$

et

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}}$$

Cas particuliers

• Soient $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x, y) = \gamma(t)$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on a

$$d\big(f \circ \gamma\big)_t = df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t$$

$$J_{f\circ\gamma}(t) = J_f\big(\gamma(t)\big)\ J_\gamma(t)$$

et

$$\boxed{(f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\ y'(t)}$$

Exemples

• Soient $f(x,y) = x^2y - y^2 = z$ et $g(z) = \ln z$. Partout où cela a un sens, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y) = g'(x^2y-y^2)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x^2y-y^2}\,2xy \\[2ex] \dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x,y) = g'(x^2y-y^2)\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x^2y-y^2}\,(x^2-2y), \end{cases}$$

Ainsi

$$d(g\circ f)_{(x,y)} = \frac{1}{x^2y-y^2}\left(2xy\,dx + (x^2-2xy)\,dy\right)$$

Exemples

- Soient $f(x, y) = x^3 - y^2$ et $h(u, v) = (v, uv^2) = (x, y)$, on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial(f \circ h)}{\partial u}(u, v) & = & \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u, v), y(u, v)\big)\ \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ & & +\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u, v), y(u, v)\big)\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ & = & 3v^2 \cdot 0 - 2uv^2 \cdot v^2 = -2uv^4 \\ \dfrac{\partial(f \circ h)}{\partial v}(u, v) & = & \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u, v), y(u, v)\big)\ \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ & & +\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u, v), y(u, v)\big)\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)) \\ & = & 3v^2 \cdot 1 - 2uv^2 \cdot 2uv = 3v^2 - 4u^2v^3 \end{array} \right.$$

Ainsi

$$d(f \circ h)_{(u,v)} = -2uv^4\ du + (3v^2 - 4u^2v^3)\ dv$$

Exemples

En passant par les matrices jacobiennes, on aurait obtenu

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & -2y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J_h(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$$

donc

$$J_{f\circ h}(u,v) = \begin{pmatrix} 3v^2 & -2uv^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3v^2\cdot 0 - 2uv^2\cdot v^2 & 3v^2\cdot 1 - 2uv^2\cdot 2uv \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2uv^4 & 3v^2 - 4u^2v^3 \end{pmatrix}.$$

Exemples

• Soient $f(x,y) = x^3 - y^2$ et $\gamma(t) = (t^2, 3t) = (x,y)$, on a d'une part

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\ y'(t) \\ &= 3(t^2)^2 \cdot 2t - 2(3t) \cdot 3 = 6t^5 - 18t.\end{aligned}$$

D'autre part

$$(f \circ \gamma)(t) = f(t^2, 3t) = (t^2)^3 - (3t)^2 = t^6 - 9t^2$$

ce qui montre directement que

$$(f \circ \gamma)'(t) = 6t^5 - 18t.$$

Exercices

Énoncé.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles ont pour expression

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2-y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{(x^2-y^2)^2}.$$

Calculer en tout point $(u,v) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ les dérivées partielles $\frac{\partial F(u,v)}{\partial u}$ et $\frac{\partial F(u,v)}{\partial v}$ de la fonction

$$F(u,v) := f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

Réponse.– La fonction F est l'expression de f dans les coordonnées (u,v), le changement de coordonnées étant donné par

$$x(u,v) = \frac{u+v}{2} \qquad \text{et} \qquad y(u,v) = \frac{u-v}{2}.$$

Exercices

• Notons que la composée est bien définie si et seulement si $y(u,v) \neq \pm x(u,v)$, il faut donc que $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

• La règle de composition des différentielles appliquée à $F = f \circ h$ où $h(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ conduit aux calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u+v}{2}\right) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u-v}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{2\ \frac{u+v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4} - \frac{(u-v)^2}{4}\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{2\ \frac{u-v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4} - \frac{(u-v)^2}{4}\right)^2} \\
&= -\frac{u+v}{2u^2v^2} + \frac{u-v}{2u^2v^2} \\
&= -\frac{1}{u^2 v}
\end{aligned}$$

Exercices

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u+v}{2}\right) \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-v}{2}\right) \\
&= -\frac{2\ \frac{u+v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4}-\frac{(u-v)^2}{4}\right)^2}\,\frac{1}{2} + \frac{2\ \frac{u-v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4}-\frac{(u-v)^2}{4}\right)^2}\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{u+v}{2u^2v^2} - \frac{u-v}{2u^2v^2} \\
&= -\frac{1}{uv^2}
\end{aligned}
$$

Énoncé (suite).– Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer la dérivée $G'(t)$ de la fonction $G(t) = f(\cosh t, \sinh t)$ (restriction de f à la branche de l'hyperbole $x(t) = \cosh t$ et $y(t) = \sinh t$).

Exercices

Réponse.– Notons que G est dérivable pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet f est dérivable sur

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \neq 0\}.$$

Or, pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Par conséquent

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t)^2 - y(t)^2 = 1 \neq 0$$

• La règle de composition des différentielles appliquée à $G = f \circ \gamma$ où $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$ conduit aux calculs suivants :

Exercices

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\cosh t, \sinh t\big)\ \frac{d\ \cosh t}{d\,t} \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\cosh t, \sinh t\big)\ \frac{d\ \sinh t}{d\,t} \\
&= -\frac{2\cosh t}{(\cosh^2 t - \sinh^2 t)^2}\ \sinh t + \frac{2\sinh t}{(\cosh^2 t - \sinh^2 t)^2}\ \cosh t \\
&= -2\cosh t \sinh t + 2\cosh t \sinh t \\
&= 0
\end{aligned}$$

• Ceci montre que f est constante sur la branche d'hyperbole paramétrée par γ.

Exercices

Énoncé.– Soient (x, y, z) les coordonnées cartesiennes des points de $\mathbb{R}^3$, (ρ, φ, z) les coordonnées cylindriques et (r, φ, θ) les coordonnées sphériques. On rappelle que

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{array}\right.$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \rho \in [0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} r \in [0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in [0, \pi] \end{array}\right.$$

Montrer que les derivées partielles $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ et $\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\}$ satisfont aux formules suivantes :

Exercices

$$(i)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\rho} = \cos\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$$(i')\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial\rho} - \sin\varphi\,\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\,\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \cos\varphi\,\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Exercices

$$
(i)\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial z}\\
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} &= -\sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial y}\\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} &= \cos\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial y} - \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(ii')\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\varphi\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cos\varphi\cos\theta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sin\varphi\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\varphi\cos\theta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}
\right.
$$

Exercices

$$(iii)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \sin\theta\,\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \cos\theta\,\dfrac{\partial}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial}{\partial\theta} = \cos\theta\,\dfrac{\partial}{\partial\rho} - \sin\theta\,\dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$$(iii')\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\rho} = \sin\theta\,\dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\,\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\,\dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\,\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \end{cases}$$

Exercices

Réponse.– Montrons (i). Pour cela on applique la règle de composition des différentielles à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(\rho, \varphi, z)$ est le changement de variable des coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes. On a

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \rho} \\
&= \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -r\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}
$$

On en déduit les équations (i). Les équations (ii') en découlent par inversion du système.

Exercices

- Pour montrer les formules (ii), on applique cette méthode à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(r, \varphi, \theta)$ est le changement de variable des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial r} \\
&= \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial z} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -\rho\sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= r\cos\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + r\sin\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

- Il « suffit » d'inverser le système pour obtenir (ii').

- On peut ensuite obtenir (iii) et (iii') par combinaison des systèmes (i) à (ii').