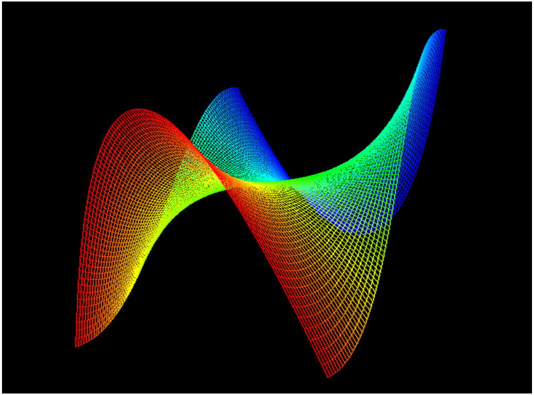
CM 5 - Hessiennes, Taylor

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Adresses utiles

Deux adresses :

http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/borrelli/Cours_Math2

http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2/

Matrice hessienne

Définition.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont à leur tour de classe C^1, leurs dérivées partielles se notent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

et se nomment *dérivées partielles secondes* de l'application f. On définit similairement les *dérivées partielles d'ordre k de f* :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}.$$

Un cas particulier

• Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables (x, y), les dérivées secondes sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Définition.– Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de *classe* C^k sur D si toutes ses dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre k et sont continues en tout point de D. Une fonction est *lisse*, ou de *classe* C^∞ si elle est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Le théorème de Schwarz

Théorème.– *Si pour tout* $i, j \in \{1, ..., n\}$, *les dérivées secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *existent sont continues en* x, *alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

pour tout $i \neq j$.

Corrolaire.– *Si* f *est une fonction de classe* C^k *(ou lisse) alors toutes ses dérivées mixtes jusqu'à l'ordre* k *(ou* ∞*), ayant le même nombre de dérivées en chaque* x_i, *coincident indépendement de l'ordre dans lequel elles sont calculées.*

Exemples

• Soit $f(x, y) = x^3y^2$. Comme f est polynomiale, elle est donc C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6xy^2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6x^2y \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6x^2y & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x^3 \end{cases}$$

et l'on constate que les dérivées partielles mixtes sont identiques.

Exemples

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

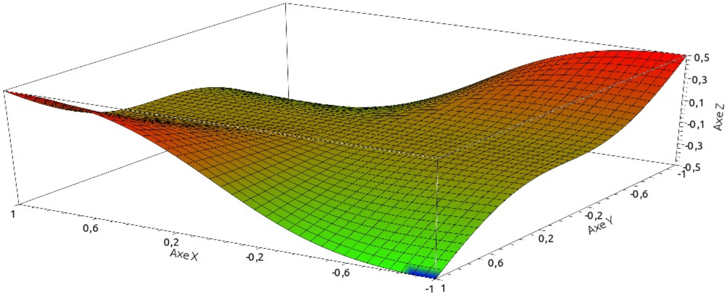
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un calcul (long et fastidieux) permet de montrer que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$$

Par conséquent, les dérivées secondes ne sont pas continues en $(0,0)$, la fonction f n'est donc pas de classe C^2 au point $(0,0)$.

Exemples



Exercices

Énoncé.– Soient F et G deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et soit $c \in \mathbb{R}^*$. On pose $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$. Montrer que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, l'application u est solution de l'ÉQUATION DES ONDES

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

Réponse.– L'application u est de classe C^2 comme composée de fonctions C^2. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= F'(x-ct)\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G'(x+ct)\,\frac{\partial(x+ct)}{\partial x} \\ &= F'(x-ct) + G'(x+ct) \end{aligned}$$

Exercices

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= F'(x-ct)\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + G'(x+ct)\,\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}\\ &= -c\,F'(x-ct) + c\,G'(x+ct).\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= F''(x-ct)\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G''(x+ct)\,\frac{\partial(x+ct)}{\partial x}\\ &= F''(x-ct) + G''(x+ct),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= -c\,F'(x-ct)\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + c\,G'(x+ct)\,\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}\\ &= (-c)^2\,F''(x-ct) + c^2\,G''(x+ct).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

Matrice hessienne

Définition.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 en $x = (x_1, ..., x_n) \in D$. La *matrice hessienne* de f en x est la matrice carrée de taille n contenant toutes les dérivées secondes de f en x :

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(x) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique (théorème de Schwarz) et son déterminant $\mathrm{Hess}\, f(x, y) := \det H_f(x, y)$ s'appelle le *hessien* de f.

Exemples

• Soit $D = \{(x,y) \mid x^2y+1>0\}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \ln(x^2y+1).$$

On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy}{x^2y+1} \\ \\ \dfrac{x^2}{x^2y+1} \end{pmatrix}$$

Puis

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2y(x^2y+1)-2xy\,2xy}{(x^2y+1)^2} & \dfrac{2x(x^2y+1)-2xy\,x^2}{(x^2y+1)^2} \\ \\ \dfrac{2x(x^2y+1)-x^2\,2xy}{(x^2y+1)^2}y & -\dfrac{x^2\,x^2}{(x^2y+1)^2} \end{pmatrix}$$

Exemples

Une fois simplifiée, cette expression devient

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2y(1-x^2y)}{(x^2y+1)^2} & \dfrac{2x}{(x^2y+1)^2} \\ \\ \dfrac{2x}{(x^2y+1)^2}y & -\dfrac{x^4}{(x^2y+1)^2} \end{pmatrix}$$

D'où le déterminant :

$$\begin{aligned} \det H_f(x,y) &= -\frac{2y(1-x^2y)}{(x^2y+1)^2}\,\frac{x^4}{(x^2y+1)^2} - \left(\frac{2x}{(x^2y+1)^2}\right)^2 \\ &= -\frac{2x^4(y-x^2y^2+1)}{(x^2y+1)^4} \end{aligned}$$

Exemples

- Soit $g(x,y,z) = x\sin y + y\sin z$. On a

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x\cos y + \sin z \\ y\cos z \end{pmatrix}$$

puis

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y & 0 \\ \cos y & -x\sin y & \cos z \\ 0 & \cos z & -y\sin z \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det H_g(x,y,z) &= -\cos y\Big(-y\cos y\sin z - 0\Big) \\ &= y\cos^2 y\sin z \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé.– Montrer que le hessien de la fonction $f(x, y) = \sin(x - y)$ est nul en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x - y) \\ -\cos(x - y) \end{pmatrix}$$

puis

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x - y) & \sin(x - y) \\ \sin(x - y) & -\sin(x - y) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det H_f(x, y) = \big(-\sin(x - y)\big)^2 - \big(\sin(x - y)\big)^2 = 0$$

Laplacien

Définition.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 au point $x = (x_1, ..., x_n) \in D$. Le *laplacien* de f en x est la trace de la matrice hessienne de f en x :

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(x)$$

Définition.– Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si $\Delta f(x) = 0$ en tout point $x \in D$.

Interprétation géométrique

Proposition.– *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $C \subset D$ un carré de taille $h \times h$. On note*

$$\mu(f, C) = \frac{1}{h^2} \iint_C f(x, y)\, dx\, dy$$

la moyenne de f sur C. Alors, pour tout point $(a, b) \in C$, on a

$$\mu(f, C) = f(a, b) + \frac{h^2}{24} \Delta f(a, b) + O(h^4)$$

• Cela signifie que la différence $f(a, b) - \mu(f, C)$ est proportionnelle à $\Delta f(a, b)$ et la constante de proportionalité ne dépend que de la taille du carré où on calcule la moyenne $\mu(f, C)$.

Exemple

- Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 1\}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = \frac{x^2(y+1)}{z-1}$$

On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \dfrac{2x(y+1)}{z-1} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \dfrac{x^2}{z-1} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\dfrac{x^2(y+1)}{(z-1)^2} \end{cases}$$

Exemple

Puis

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \dfrac{2(y+1)}{z-1} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \dfrac{2x^2(y+1)}{(z-1)^3} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta f(x,y,z) &= \frac{2(y+1)}{z-1} + \frac{2x^2(y+1)}{(z-1)^3} \\ &= \frac{2(y+1)\left((z-1)^2 + x\right)}{(z-1)^3} \end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquelles la fonction $u(x,t) = x^2 - c^2t^2$ est harmonique.

Réponse.– On a

$$\vec{\nabla} u(x,t) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2c^2t \end{pmatrix}$$

puis

$$H_u(x,t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2c^2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$\Delta u(x,t) = 2 - 2c^2$$

et $\Delta u(x,t) = 0$ si et seulement si $c = \pm 1$.

Exercices

Énoncé.– Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $F(x,y) := f(\sqrt{x^2+y^2})$. Déterminer le laplacien de F en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

Réponse.– Il s'agit de calculer

$$\Delta F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

Notons f' et f'' les dérivées de la fonction f. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},
\end{aligned}$$

Exercices

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= \frac{\partial f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x}\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \\
&\quad + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Exercices

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= f''(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{x^2}{x^2+y^2}\\ &\quad + f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{y^2}{x^2+y^2}\\ &\quad + f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Delta F(x,y) &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}\\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Exercices

Énoncé (suite).– Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Réponse.– Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, l'équation

$$\Delta F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

est équivalente à

$$f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\,\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

qui ne dépend que de la seule variable réelle $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$.

• Elle se réduit donc à une équation différentielle du deuxième ordre non homogène et à cœfficients non constants

$$\text{(E)} \qquad f''(r) + \frac{1}{r}\,f'(r) = r$$

Exercices

• Pour résoudre cette nouvelle équation, on la transforme en un système d'équations différentielles du premier ordre (toujours non homogènes et à cœfficients non constants) :

$$\begin{cases} f'(r) = g(r) & \text{(E1)} \\ \\ g'(r) + \dfrac{1}{r}\, g(r) = r & \text{(E2)} \end{cases}$$

• On résout d'abord (E2) puis on reporte la solution pour résoudre (E1).

• Les solutions g de (E2) s'obtiennent à partir des solutions générales g_0 de l'équation homogène associée

$$g'(r) + \frac{1}{r}\, g(r) = 0$$

et d'une solution particulière g_p de (E2) obtenue avec la méthode de la variation de la constante.

Exercices

• Explicitement, on doit d'abord résoudre

$$g_0'(r) = -\frac{1}{r}\, g_0(r)$$

ce qui donne

$$g_0(r) = \lambda\, e^{-\int \frac{1}{r}\, dr} = \lambda\, e^{-\ln r} = \lambda\, e^{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \lambda\, \frac{1}{r}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Il faut ensuite chercher une solution particulière de (E2) sous la forme $g_p(r) = \frac{\lambda(r)}{r}$ (variation de la constante), ce qui donne

$$g_p'(r) = \frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{\lambda(r)}{r^2}$$

Exercices

Ainsi

$$\begin{aligned} g_p'(r) + \tfrac{1}{r}\, g_p(r) = r \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{\lambda'(r)}{r} = r \\ & \Longleftrightarrow \quad \lambda'(r) = r^2 \end{aligned}$$

et on peut choisir $\lambda(r) = \frac{r^3}{3}$ d'où $g_p(r) = \frac{r^2}{3}$.

• Les solutions de (E2) sont donc

$$g(r) = g_0(r) + g_p(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Enfin, les solutions de (E) se trouvent à partir de celles (E1) :

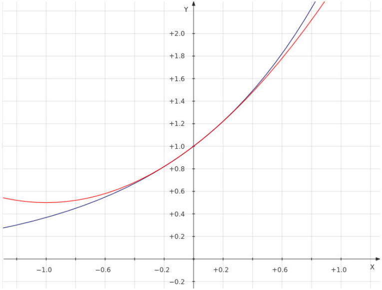
$$f'(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3} \iff f(r) = \lambda \ \ln(r) + \frac{r^2}{9} + \mu$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

La formule de Taylor

Rappel.– Soit $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in D$. Alors, pour tout $x \in D$ on a

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + o((x-a)^2)$$



Les graphes de f (en bleu) et de g (en rouge)

Exemple.– $f(x) = exp(x)$, $g(x) = 1 + x + x^2/2$ et $a = 0$

La formule de Taylor

• On se limite au cas des fonctions de deux variables.

Théorème.– *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $(a,b) \in D$. Alors, pour tout $(x,y) \in D$ on a*

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\,(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\,(y-b)$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}\,(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2$$

$$+||(h,k)||^2\,\varepsilon(h,k)$$

soit encore

$$f(x,y) = f(a,b) + J_f(a,b)\,\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H_f(a,b)\,\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + o(||(h,k)||^2)$$

où $h = x - a$ et $k = y - b$.

Exemples

• Soit $f(x,y) = \dfrac{x-1}{y-1}$ et $(a,b) = (0,0)$. On a $f(0,0) = 1$, puis

$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y-1} & -\dfrac{x-1}{(y-1)^2} \end{pmatrix}$ d'où $J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{(y-1)^2} \\ -\dfrac{1}{(y-1)^2} & \dfrac{2(x-1)}{(y-1)^3} \end{pmatrix}$$

d'où

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$\frac{x-1}{y-1} = 1 - x + y - xy + y^2 + o(||(x,y)||^2)$$

Exemples

• Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}$, $(a,b) = (2,-1) \in D$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x-y}{xy-1}.$$

On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{(xy-1)-(x-y)y}{(xy-1)^2} \\ \\ \frac{-(xy-1)-(x-y)x}{(xy-1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2-1}{(xy-1)^2} \\ \\ \frac{1-x^2}{(xy-1)^2} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\vec{\nabla} f(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exemples

Le calcul de la hessienne donne

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{(y^2-1)\ 2(xy-1)y}{(xy-1)^4} & \dfrac{2y(xy-1)^2-(y^1-1)\ 2(xy-1)x}{(xy-1)^4} \\ \\ \text{idem} & -\dfrac{(1-x^2)\ 2(xy-1)x}{(xy-1)^4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{2y(y^2-1)}{(xy-1)^3} & \dfrac{2(x-y)}{(xy-1)^3} \\ \\ \text{idem} & -\dfrac{2x(1-x^2)}{(xy-1)^3} \end{pmatrix}$$

D'où

$$H_f(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{9} \\ \\ -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

Exemples

Ainsi, pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\frac{x-y}{xy-1} = -1 - \frac{1}{3}\,(y+1) - \frac{2}{9}\,(x-2)(y+1) - \frac{2}{9}\,(y+1)^2$$

$$+o\big(||(x-2, y+1)||^2\big)$$

Exercice

Énoncé.– Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x-y}{xy-1}.$$

Montrer que le plan d'équation $x - y + z = 0$ approche à l'ordre 2 le graphe de la fonction f.

Réponse.– Il s'agit de montrer que le développement de Taylor de f à l'ordre deux a pour expression

$$f(x,y) = y - x + o(x^2+y^2).$$

Or $f(0,0) = 0$ et d'après les calculs faits plus haut

$$\vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)

- Philosophe, mathématicien, physicien, astronome et naturaliste.

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)

- Philosophe, mathématicien, physicien, astronome et naturaliste.

- Ardent propagandiste des idées de Newton

« *Le premier qui ait osé parmi nous se déclarer ouvertement newtonien, est l'auteur du Discours sur la figure des astres [. . .]. Maupertuis a cru qu'on pouvait être bon citoyen sans adopter aveuglément la physique de son pays, et pour attaquer cette physique, il a eu besoin d'un courage dont on doit lui savoir gré.* »

D'Alembert, dans l'Encyclopédie.

Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)

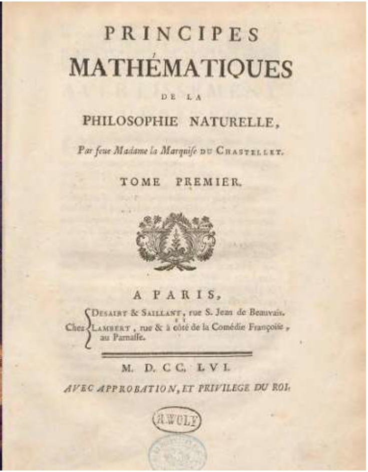
• Philosophe, mathématicien, physicien, astronome et naturaliste.

• Ardent propagandiste des idées de Newton

« *Le premier qui ait osé parmi nous se déclarer ouvertement newtonien, est l'auteur du Discours sur la figure des astres [. . .]. Maupertuis a cru qu'on pouvait être bon citoyen sans adopter aveuglément la physique de son pays, et pour attaquer cette physique, il a eu besoin d'un courage dont on doit lui savoir gré.* »

D'Alembert, dans l'Encyclopédie.

• Seconde Émilie du Châtelet dans sa traduction des *Principia* de Newton.



PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feue Madame la Marquise DU CHASTELLET.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais. LAMBERT, rue & à côté de la Comédie Françoise, au Parnasse.

M. D. CC. LVI.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

Émilie du Châtelet et sa traduction des *Principia*

La controverse du citron et de la mandarine

Pierre Louis de Maupertuis *vs* Jacques Cassini

Expédition en Laponie

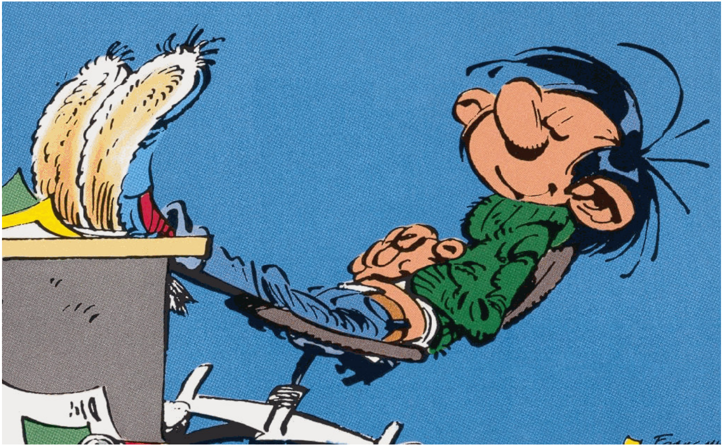
Deux expéditions : une au Pérou, l'autre en Laponie
Objectif : mesurer la longueur d'un arc polaire et d'un arc équatorial.

Le triomphe de Maupertuis

L’affaire « Christine et Élisabeth Planström »

Frédrique II de Prusse invite Maupertuis à présider l’Académie des sciences de Berlin

Le principe de moindre action



« Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible », Maupertuis 1744.

Le principe de moindre distance

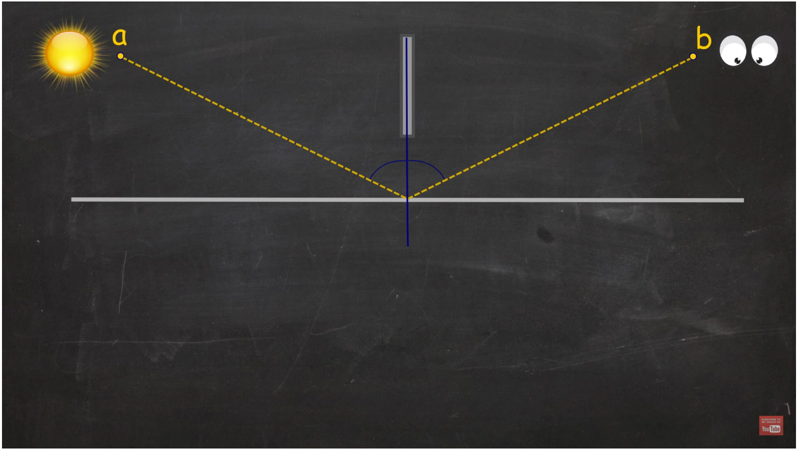


Image extraite de *Passe-Science, Le principe de moindre action*

Le principe de moindre temps

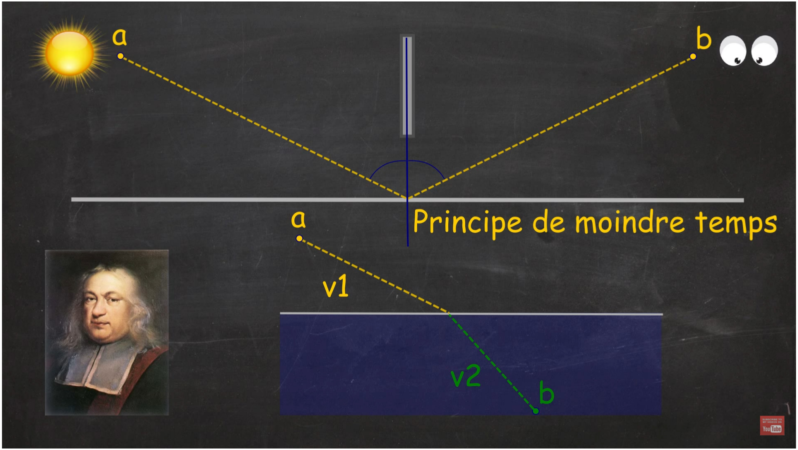


Image extraite de *Passe-Science, Le principe de moindre action*. En vignette, Pierre de Fermat (1607-1665)

Le principe de moindre action

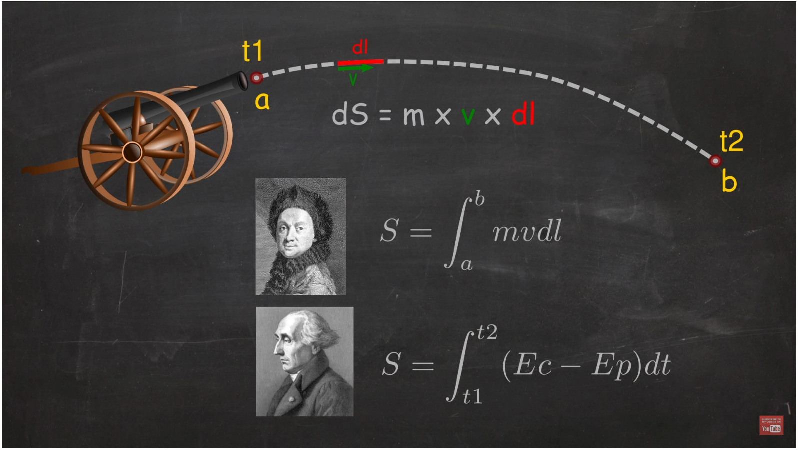
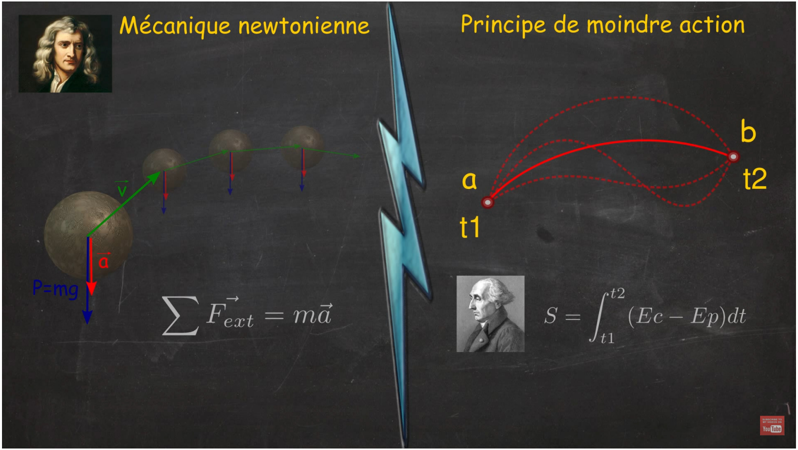


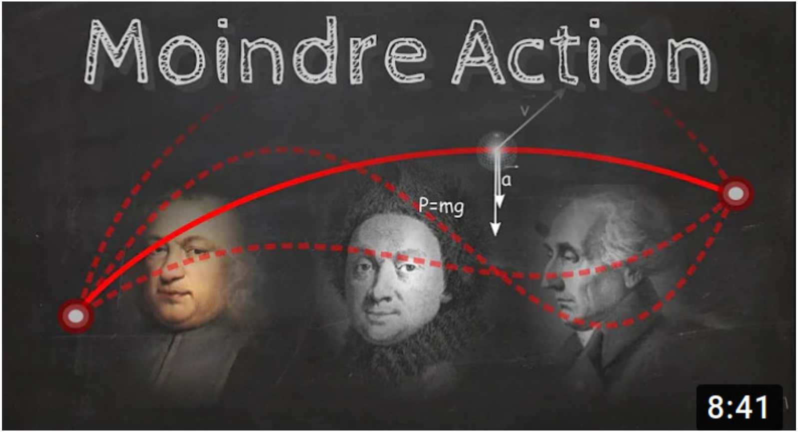
Image extraite de *Passe-Science, Le principe de moindre action*. En vignette, Maupertuis et Lagrange.

Mécanique Newtonienne *vs* Mécanique Lagrangienne

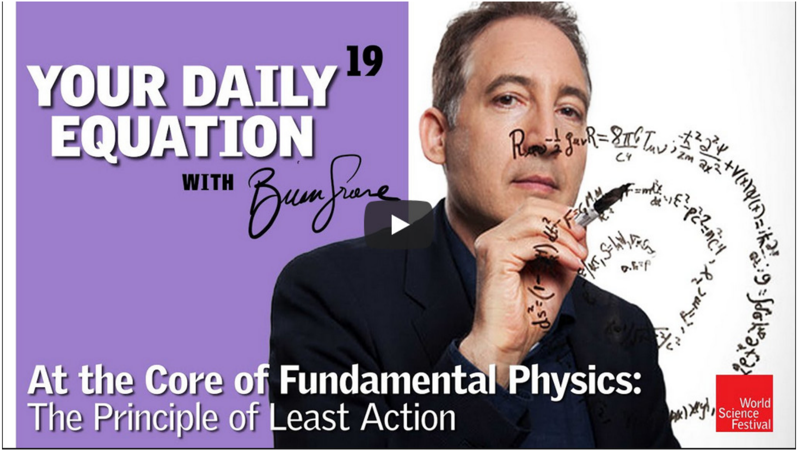


« La plus belle et la plus importante des découvertes en mécanique », Lagrange à propos de Maupertuis.

Passe-Science & le Principe de Moindre Action



Brian Green & le Principe de Moindre Action



Une conférence de Madjid Mesli

La fabuleuse histoire du principe de moindre action : de Fermat à Feynman

« When I was in high school, my physics teacher—whose name was Mr. Bader—called me down one day after physics class and said, ‘You look bored ; I want to tell you something interesting.’ Then he told me something which I found absolutely fascinating, and have, since then, always found fascinating [...] : the principle of least action »

Richard Feynman