CM 8 - Changement de variables

Vincent Borrelli

Université de Lyon

Changement de variables

• Soit

$$\begin{array}{cccc} h: & \Delta & \longrightarrow & D \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v),y(u,v)) \end{array}$$

un C^1-difféomorphisme, c'est-à-dire une application C^1 qui est bijective et dont la réciproque $h^{-1} : D \longrightarrow \Delta$ est aussi C^1.

• Rappelons que la jacobien *Jac h* est le déterminant de la matrice jacobienne J_h

$$Jac\ h(u,v) = \det J_h(u,v) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Changement de variables

Théorème.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $h : \Delta \longrightarrow D$ un C^1-difféomorphisme alors

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f(x(u,v), y(u,v))\,\left|\det J_h(u,v)\right|\,dudv$$

- **Passage en polaire.–** L'application

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{y=0, x\leq 0\} \\ & (\rho,\varphi) & \longmapsto & (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \end{array}$$

est un C^1-difféomorphisme et

$$Jac\; h(\rho,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} = \rho$$

Changement de variables

Si $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x \leq 0\}$ alors

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{h^{-1}(D)} f\big(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\big)\ \rho\ d\rho d\varphi$$

Remarque.– Puisque

$$\{y = 0, x \leq 0\} \quad \text{et} \quad \big(\mathbb{R}_+^* \times \{\pi\}\big) \cup (\{0\} \times]-\pi, \pi])$$

sont d'aire nulle, la formule ci-dessus est valide pour $D \subset \mathbb{R}^2$.

Exemple

Volume de la boule (suite).– On effectue le calcul de

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

où

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\right\}$$

au moyen d'un passage en coordonnées polaires

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,1]\times[0,2\pi[& \longrightarrow & D \\ & (\rho,\varphi) & \longmapsto & (\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi) \end{array}$$

• La formule de changement de variable s'écrit

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

Exemple

- Le théorème de Fubini permet de séparer les variables :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi.\\ &= 4\pi\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho.\end{aligned}$$

- Le changement de variable $t = 1-\rho^2$, $dt = -2\rho d\rho$ donne

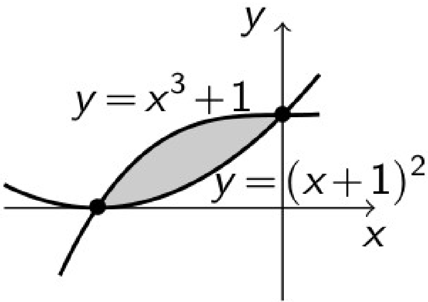
$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(B) &= -\frac{2}{2}\,2\pi\int_1^0 t^{1/2}\,dt = 2\pi\int_0^1 t^{1/2}\,dt\\ &= 2\pi\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\,t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = 2\pi\,\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– Calculer l'aire du domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.

Réponse.– On constate rapidement que

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0,\ x^2 + 2x + 1 \leq y \leq x^3 + 1\right\}.$$



Exercices

• On applique le théorème de Fubini pour séparer les variables :

$$\begin{aligned} Aire(D) &= \iint_D dx\,dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy \\ &= \int_{-1}^{0} \left(x^3+1-x^2-2x-1\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} \\ &= -\left(\tfrac{1}{4}(-1)^4 - \tfrac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2\right) \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– Calculer

$$I := \iint_D (x^2 - 2y)\, dx\, dy$$

où D est le domaine de l'exercice précédent.

Réponse.– Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini pour séparer les variables

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} (x^2 - 2y)\, dy \\
&= \int_{-1}^{0} \left[\, x^2 y - y^2 \,\right]_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dx \\
&= \int_{-1}^{0} \Big(x^2(x^3+1) - (x^3+1)^2 \\
&\qquad -x^2(x^2+2x+1) + (x^2+2x+1)^2 \Big)\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(-x^6 + x^5 + 6x^2 + 4x \right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + 2x^3 + 2x^2 \right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - 2 + 2 = \frac{13}{42}
\end{aligned}$$

Intégrale triple

- On définit l'intégrale triple d'une fonction

$$f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \longrightarrow \mathbb{R}$$

similairement à l'intégrale double au moyen de sommes de Riemann

$$R(f; \mathcal{S}, \{h_{ijk}\}) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{q} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) f(h_{ijk})$$

sur des subdivisions $\mathcal{S}$ en parallélépipèdes.

- Lorsque la limite $\lim\limits_{\delta(\mathcal{S}) \to 0} R(f; \mathcal{S}, \{h_{ijk}\})$ existe, elle est indépendante du choix des points h_{ijk} et on la note

$$\iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)dxdydz$$

Intégrale triple

• On dit alors que f est INTÉGRABLE AU SENS DE RIEMANN sur $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ et on appelle cette limite l'INTÉGRALE TRIPLE DE f SUR $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

• On dit enfin qu'une fonction

$$f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est INTÉGRABLE sur $D \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ si $\mathbb{1}_D f$ est intégrable sur $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ et on pose

$$\iint_D f(x, y)dxdydz := \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} \mathbb{1}_D(x, y)f(x, y, z)dxdydz$$

Intégrale triple

Théorème de Fubini I.– *Soit $D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ et $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue alors*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_{a_1}^{b_1}dx\int_{a_2}^{b_2}dy\int_{a_3}^{b_3}dz\,f(x,y,z)$$

(dans l'ordre qu'on voudra)

Théorème de Fubini II.– *Soient*

$$D=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \Big|$$

$$x\in[a_1,b_1],\ y\in[a_2(x),b_2(x)],\ z\in[a_3(x,y),b_3(x,y)]\Big\}$$

et $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue alors

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_{a_1}^{b_1}dx\int_{a_2(x)}^{b_2(x)}dy\int_{a_3(x,y)}^{b_3(x,y)}dz\,f(x,y,z)$$

Exemples

- Soit à calculer

$$J=\iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]}(x^2-2yz)\,dx\,dy\,dz.$$

En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned}
J &= \int_2^3 dz\ \int_1^2 dy \int_0^1 dx\,(x^2-2yz)\\
&= \int_2^3 dz\ \int_1^2 dy\left[\tfrac{1}{3}x^3-2xyz\right]_{x=0}^{x=1}\\
&= \int_2^3 dz\ \int_1^2 dy\left(\tfrac{1}{3}-2yz\right)\\
&= \int_2^3\left[\tfrac{1}{3}y-y^2z\right]_{y=1}^{y=2} dz\\
&= \int_2^3\left(\tfrac{2}{3}-4z-\tfrac{1}{3}+z\right) dz\\
&= \int_2^3\left(\tfrac{1}{3}-3z\right) dz=\left[\tfrac{1}{3}z-\tfrac{3}{2}z^2\right]_2^3\\
&= \frac{3}{3}-\frac{27}{2}-\frac{2}{3}+\frac{12}{2}=\frac{1}{3}-\frac{15}{2}=-\frac{43}{6}
\end{aligned}$$

Exemples

• Soit Ω le cylindre plein de hauteur 3 et de base le disque $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z=0\}$:

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3 \right\} \\ &= \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \\ &\quad x \in [-1,1],\ y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2} \right],\ z \in [0,3] \Big\}\end{aligned}$$

On cherche à déterminer

$$J = \iiint_\Omega (1-2yz)\, dx\, dy\, dz$$

Exemples

En appliquant la deuxième version du théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\,dx\,dy \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)\,dy \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \left[y - y^2 z\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big(\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)z + \sqrt{1-x^2} \\
&\qquad\qquad + (1-x^2)z\Big)\,dx \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\,dt \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

Changement de variables

Théorème.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $h : \Delta \longrightarrow D$ un C^1-difféomorphisme alors

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz$$

$$=$$

$$\iiint_\Delta f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \left| \det J_h(u,v,w) \right| dudvdw$$

Corollaire.– En coordonnées cylindriques :

$$dxdydz = \left| \det J_h(\rho,\varphi,z) \right| d\rho d\varphi dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

• En coordonnées sphériques :

$$dxdydz = \left| \det J_h(r,\varphi,\theta) \right| drd\varphi d\theta = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

Exemple

- Considérons à nouveau l'intégrale J de la fonction

$$f(x,y,z) = 1 - 2yz$$

sur le cylindre plein Ω de hauteur 3 et de base le disque

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\right\}$$

En coordonnées cylindriques, on a

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3 \right\} \\ &= \left\{ (\rho,\varphi,z) \mid \rho \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ z \in [0,3] \right\} \end{aligned}$$

Exemple

Puisque $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$, on a

$$\begin{aligned}
J &= \iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\,dx\,dy \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho\, \int_0^{2\pi} (1-2\rho\sin\varphi z)\,d\varphi \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho \left[\varphi + 2\rho\cos\varphi z\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \left(2\pi + 2\rho z - 2\rho z\right)\rho\,d\rho \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\,\rho\,d\rho \\
&= 3\,\pi\left[\rho^2\right]_0^1 \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

Volume

Définition.– Soit $D \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. On appelle VOLUME DE D le nombre

$$Vol(D) := \iiint_D dx\, dy\, dz$$

Exemple : volume de la boule.– En coordonnées sphériques, la boule unité B s'écrit

$$h^{-1}(B) = \{\, (r, \varphi, \theta) \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0, 2\pi[,\ \theta \in [0, \pi] \,\}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\,(B) &= \iiint_B dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi[\times[0,\pi]} r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^1 r^2\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{3}\, 2\pi \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}\,(1+1) = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Quantités totale et moyenne

• En physique, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ représente une *concentration* de matière (une *densité volumique*), une *densité* de courant ou une densité dénergie, alors on appelle QUANTITÉ TOTALE de matière /courant/énergie en D le nombre

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

On appelle QUANTITÉ MOYENNE de matière /courant/énergie en D le nombre

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(D)}\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$$

Exemple

- Un matériau est réparti dans un cube $D = [0, R]^3$ selon la densité volumique $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{(z + 1)^2}$. La quantité totale du matériau est alors

$$\begin{aligned}
\iiint_D f(x,y,z)dxdydz &= \int_0^R dx \int_0^R (x+y)dy \int_0^R \tfrac{1}{(z+1)^2}dz \\
&= \int_0^R \left[xy + \tfrac{1}{2}y^2\right]_0^R dx \left[-\tfrac{1}{z+1}\right]_0^R \\
&= \int_0^R \left(Rx + \tfrac{1}{2}R^2\right)dx \left(1 - \tfrac{1}{R+1}\right) \\
&= \left[\tfrac{1}{2}Rx^2 + R^2x\right]_0^R \tfrac{R}{R+1} \\
&= \left(\tfrac{1}{2}R^3 + R^3\right)\tfrac{R}{R+1} = \tfrac{3R^4}{2(R+1)},
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Vol}\,(D) = R^3$, la quantité moyenne du matériau dans le cube est

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(D)} \iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{R^3}\,\frac{3R^4}{2(R+1)} = \frac{3R}{2(R+1)}.$$

Barycentre

• La MASSE TOTALE de D est le nombre

$$\iiint_D \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

où $\mu : D \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la *densité de masse*

• Le CENTRE DE MASSE (ou CENTRE D'INERTIE, ou encore BARYCENTRE) est le point G de coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_D x\ \mu(x,y,z) dx\, dy\, dz$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iiint_D y\ \mu(x,y,z) dx\, dy\, dz$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_D z\ \mu(x,y,z) dx\, dy\, dz$$

Moment d'inertie

- Un matériau est dit HOMOGÈNE si sa densité de masse $\mu : D \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est constante.

- Soit $r(x, y, z)$ la distance d'un point (x, y, z) depuis une origine P ou une droite Δ

- Le MOMENT D'INERTIE par rapport à P ou à Δ est le nombre

$$\frac{1}{M} \iiint_D r^2(x, y, z)\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Exemple

• On cherche à déterminer le centre de masse du demi-cylindre homogène

$$D = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ z \in [0, H], y \geq 0 \,\}.$$

Il est naturel de travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire

$$h^{-1}(D) = \{\, (\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, R],\ \varphi \in [0, \pi],\ z \in [0, H] \}.$$

Le calcul de la masse totale donne

$$\begin{aligned} M &= \iiint_D dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_{h^{-1}(D)} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\ &= \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^H dz \\ &= \frac{\pi R^2 H}{2}. \end{aligned}$$

Exemple

Le centre de masse G a pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M}\iiint_D x\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\iiint_{h^{-1}(D)} \rho\cos\varphi\;\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho\;\int_0^\pi \cos\varphi\,d\varphi\;\int_0^H dz = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{M}\iiint_D y\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho\;\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi\;\int_0^H dz \\
&= \frac{2}{\pi R^2 H}\;\frac{R^3}{3}\;2\;H = \frac{4R}{3\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M}\iiint_D z\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M}\int_0^R \rho\,d\rho\;\int_0^\pi d\varphi\;\int_0^H z\,dz \\
&= \frac{2}{\pi R^2 H}\;\frac{R^2}{2}\;\pi\;\frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi $G = \left(0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2}\right)$.

Exercice

Exercice 1.– Une poudre est répartie sur une plaque infinie selon la densité

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2}$$

où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la quantité totale et moyenne de poudre sur un disque de rayon $R > 0$ et centré en l'origine.

Réponse.– Il est naturel de passer en coordonnées polaires. La fonction f s'écrit alors

$$f(\rho,\varphi) = \frac{1}{(\rho+1)^2}$$

et le disque de rayon R peut se décrire comme
$D_R = \{\, (\rho,\varphi) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi[\,\}$.

Exercice

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\text{Quantité totale} &= \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi \\
&= \int_0^R \left(\frac{\rho+1}{(\rho+1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \right) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \right) d\rho \\
&= 2\pi \left[\ln(\rho+1) + \frac{1}{\rho+1} \right]_0^R \\
&= 2\pi \left(\ln(R+1) + \frac{1}{R+1} - \ln 0 - 1 \right) \\
&= 2\pi \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}\,(D_R) &= \iint_{D_R} \rho\, d\rho\, d\varphi \\
&= \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \frac{R^2}{2}\, 2\pi = \pi R^2
\end{aligned}$$

Exercice

Enfin

$$\begin{aligned}\text{Quantité moyenne} &= \frac{1}{\mathrm{Aire}\,(D_R)} \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi \\ &= \frac{2}{R^2}\left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right)\end{aligned}$$

Exercice 2.– Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B_R^- et du cylindre C_R suivants :

$$\begin{aligned} B_R^- &= \Big\{(r,\varphi,\theta) \mid r \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [\pi/2,\pi]\Big\} \\ C_R &= \Big\{(\rho,\varphi,z) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ z \in [0,R]\Big\}, \end{aligned}$$

et avec la densité de masse $\mu(x,y,z) = z^2$.

Exercice

Réponse.– La masse totale de Ω est $M_\Omega = M_{B_R^-} + M_{C_R}$, avec $\mu(x,y,z) = r^2\cos^2\theta$ sur B_R^-. On a donc

$$\begin{aligned}
M_{B_R^-} &= \iiint_{B_R^-} r^2\cos^2\theta\; r^2\sin\theta\; dr\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^R r^4\, dr\; \int_0^{2\pi} d\varphi\; \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{R^5}{5}\, 2\pi \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta \right]_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \frac{2\pi R^5}{15}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
M_{C_R} &= \iiint_{C_R} z^2\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\
&= \int_0^R \rho\, d\rho\; \int_0^{2\pi} d\varphi\; \int_0^R z^2\, dz \\
&= \frac{R^2}{2}\, 2\pi\, \frac{R^3}{3} \\
&= \frac{\pi R^5}{3}
\end{aligned}$$

Exercice

Au bilan

$$M_\Omega = M_{B_R^-} + M_{C_R} = \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\right)\ \pi R^5 = \frac{7\pi R^5}{15}$$

• Puisque

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sin\varphi\ d\varphi = 0$$

les coordonnées cartésiennes du barycentre G de Ω sont :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega x\mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz \\ &= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\ dr\ \int_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi\ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\ d\theta \\ &\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2\ d\rho\ \int_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi\ \int_0^R z^2\ dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercice

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{M_\Omega}\int_0^R r^5\,dr\ \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\ \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\\
&\quad+\frac{1}{M_\Omega}\int_0^R \rho^2\,d\rho\ \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\ \int_0^R z^2\,dz\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M_\Omega}\iiint_\Omega z^3\,dx\,dy\,dz\\
&= \frac{1}{M_\Omega}\int_0^R r^5\,dr\ \int_0^{2\pi}d\varphi\ \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta+\frac{1}{M_\Omega}\int_0^R \rho\,d\rho\ \int\\
&= \frac{15}{7\pi R^3}\left(\frac{R^6}{6}\,2\pi\left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta\right]_{\pi/2}^{\pi}+\frac{R^2}{2}\,2\pi\,\frac{R^4}{4}\right)\\
&= \frac{15\pi R^6}{7\pi R^3}\left(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{15R^3}{7}\,\frac{-1+3}{12}\\
&= \frac{5R^3}{14}.
\end{aligned}$$

Exercice

• En conclusion, le barycentre G a pour coordonnées

$$G = (0, 0, 5R^3/14)$$

Puisque $5R^3/14 > 0$, il se trouve dans la partie cylindrique.

• Le barycentre se trouve à l'intérieur de Ω si

$$5R^3/14 \leq R$$

c'est-à-dire si $R \leq \sqrt{14/5}$.

Changement de variables

• Soit

$$h : \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & D \\ (u,v) & \longmapsto & (x(u,v),y(u,v)) \end{array}$$

un C^1-difféomorphisme, c'est-à-dire une application C^1 qui est bijective et dont la réciproque $h^{-1} : D \longrightarrow \Delta$ est aussi C^1.

• Rappelons que la jacobien *Jac h* est le déterminant de la matrice jacobienne J_h

$$Jac\ h(u,v) = \det J_h(u,v) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Changement de variables

Théorème.– Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $h : \Delta \longrightarrow D$ un C^1-difféomorphisme alors

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,\Big|\det J_h(u,v)\Big|\,dudv$$

- **Passage en polaire.–** L'application

$$\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{y=0, x\leq 0\} \\ & (\rho,\varphi) & \longmapsto & (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \end{array}$$

est un C^1-difféomorphisme et

$$Jac\ h(\rho,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} = \rho$$

Changement de variables

Si $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x \leq 0\}$ alors

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{h^{-1}(D)} f\big(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\big)\ \rho\ d\rho d\varphi$$

Remarque.– Puisque

$$\{y = 0, x \leq 0\} \quad \text{et} \quad \big(\mathbb{R}_+^* \times \{\pi\}\big) \cup (\{0\}\times]-\pi,\pi])$$

sont d'aire nulle, la formule ci-dessus est valide pour $D \subset \mathbb{R}^2$.

Exemple

Volume de la boule (suite).– On effectue le calcul de

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\;dxdy$$

où

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\right\}$$

au moyen d'un passage en coordonnées polaires

$$\begin{array}{rccc} h: & [0,1]\times[0,2\pi[& \longrightarrow & D \\ & (\rho,\varphi) & \longmapsto & (\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi) \end{array}$$

• La formule de changement de variable s'écrit

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\iint_{[0,1]\times[0,2\pi[}\sqrt{1-\rho^2}\;\rho\,d\rho\,d\varphi$$

Exemple

- Le théorème de Fubini permet de séparer les variables :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi.\\ &= 4\pi\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho.\end{aligned}$$

- Le changement de variable $t = 1-\rho^2$, $dt = -2\rho d\rho$ donne

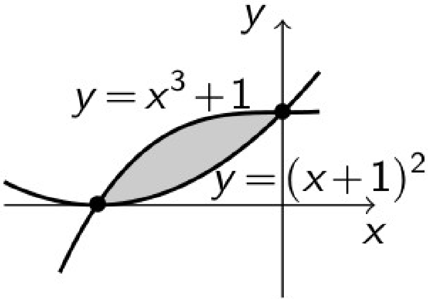
$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(B) &= -\frac{2}{2}\,2\pi\int_1^0 t^{1/2}\,dt = 2\pi\int_0^1 t^{1/2}\,dt\\ &= 2\pi\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\,t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = 2\pi\,\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– Calculer l'aire du domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.

Réponse.– On constate rapidement que

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0,\ x^2 + 2x + 1 \leq y \leq x^3 + 1\right\}.$$



Exercices

• On applique le théorème de Fubini pour séparer les variables :

$$\begin{aligned}
Aire(D) &= \iint_D dx\,dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy \\
&= \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} \\
&= -\left(\tfrac{1}{4}(-1)^4 - \tfrac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2\right) \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

Exercices

Énoncé.– Calculer

$$I := \iint_D (x^2 - 2y)\, dx\, dy$$

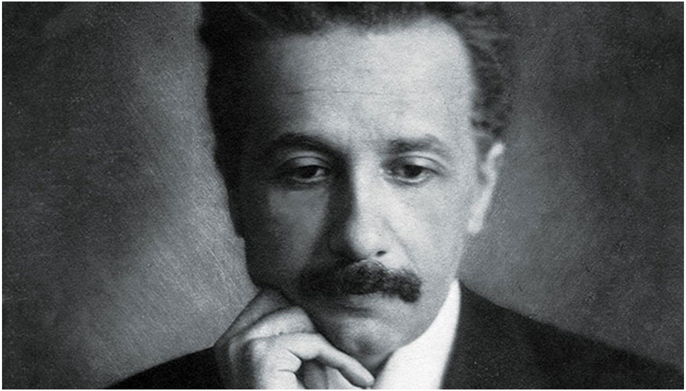
où D est le domaine de l'exercice précédent.

Réponse.– Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini pour séparer les variables

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} (x^2 - 2y)\, dy \\
&= \int_{-1}^{0} \Big[\, x^2 y - y^2 \,\Big]_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dx \\
&= \int_{-1}^{0} \Big(x^2(x^3+1) - (x^3+1)^2 \\
&\quad -x^2(x^2+2x+1) + (x^2+2x+1)^2 \Big)\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(-x^6 + x^5 + 6x^2 + 4x \right) dx \\
&= \Big[-\tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{6}x^6 + 2x^3 + 2x^2 \Big]_{-1}^{0} \\
&= \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - 2 + 2 = \frac{13}{42}
\end{aligned}$$

Albert Einstein (1879-1955)

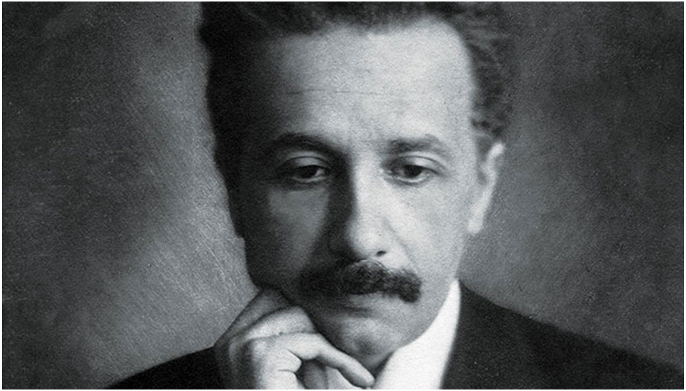
Albert Einstein (1879-1955)



• L'un des plus grands scientifiques de l'histoire, probablement dans le « Top 4 » avec Newton, Archimède et Galilée.

• Capacités précoces : il apprend le calcul différentiel et intégral entre 12 et 16 ans.

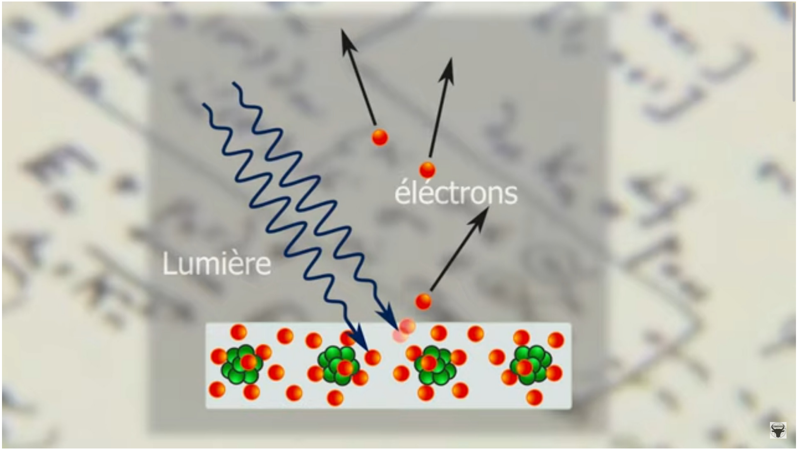
Albert Einstein (1879-1955)



• Occupe jusqu'en 1909 un poste à l'Office des Brevets de Berne où naîtront « ses plus belles idées »

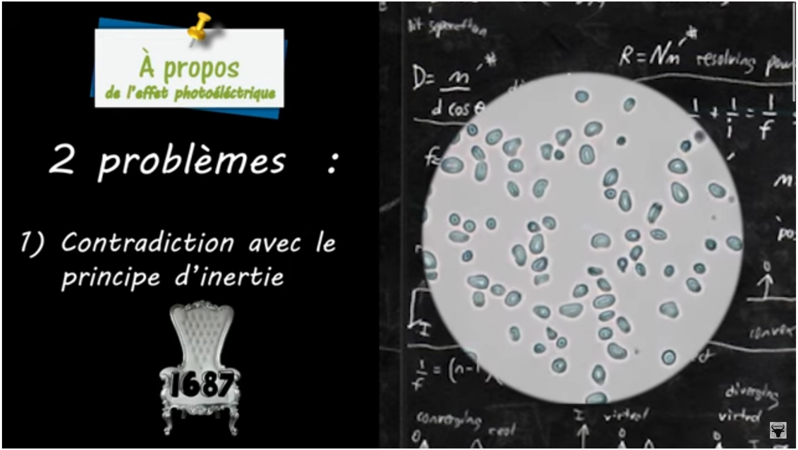
• Publie quatre articles majeurs en 1905, année qualifiée depuis dans l'histoire des sciences d'« annus mirabilis ».

Article 1 : L'effet photoélectrique



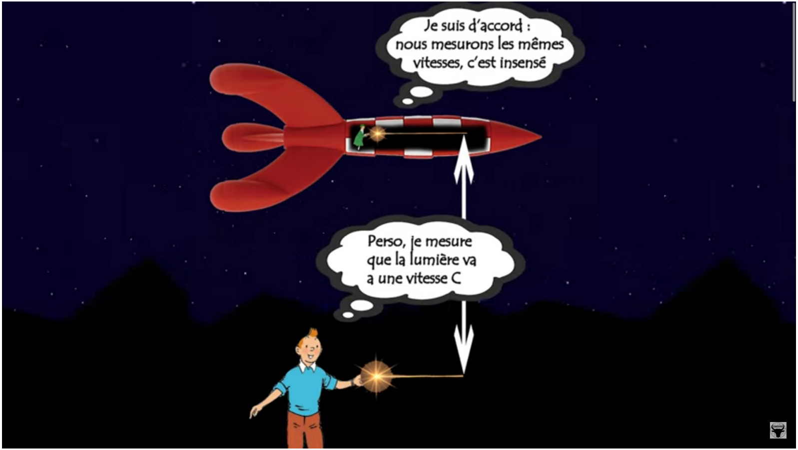
Effet de seuil dans l'effet photoélectrique → existence de grain de lumière et de quantas d'énergie

Article 2 : Le mouvement Brownien



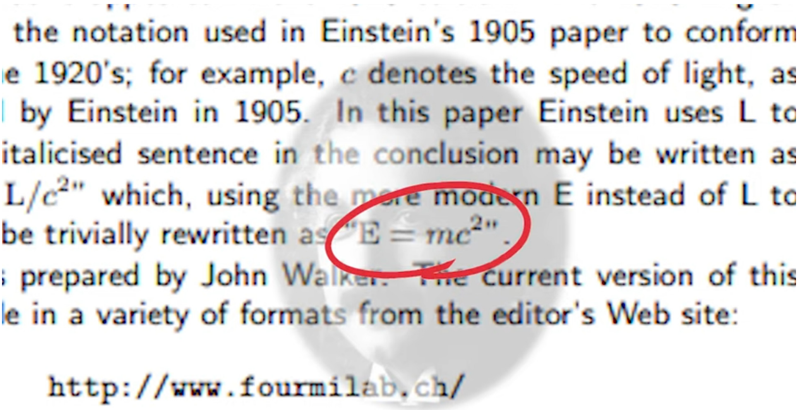
Mouvements dans un système au repos → existence des atomes

Article 3 : La relativité restreinte



La vitesse de la lumière est invariante → création de relativité restreinte qui réconcilie la mécanique newtonienne avec les équations de Maxwell.

Article 4 : L'équivalence masse-énergie



the notation used in Einstein's 1905 paper to conform
e 1920's; for example, c denotes the speed of light, as
by Einstein in 1905. In this paper Einstein uses L to
italicised sentence in the conclusion may be written as
L/c^2" which, using the more modern E instead of L to
be trivially rewritten as "$E = mc^2$".
prepared by John Walker. The current version of this
e in a variety of formats from the editor's Web site:

http://www.fourmilab.ch/

Au fait, $E = mc^2$!

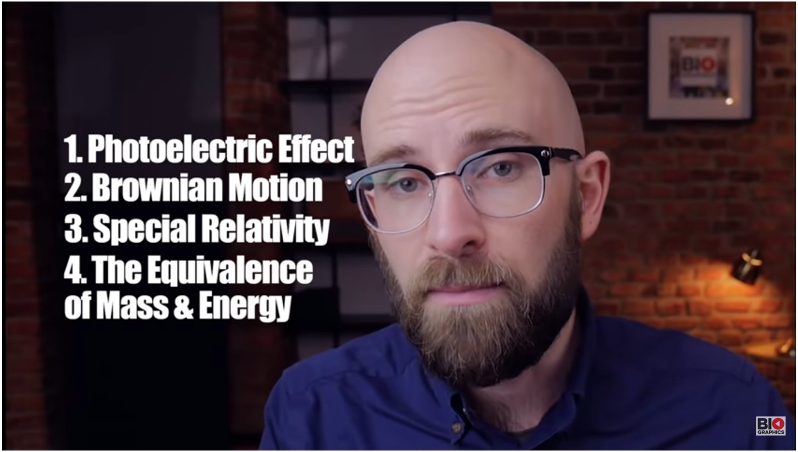
Mathador

Einstein et 1905 : l'année miraculeuse de la physique

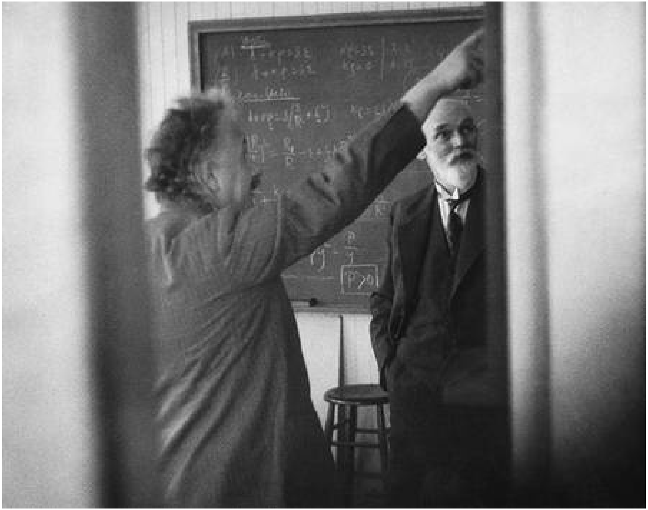
En 1903, il épouse sa camarade d'étude Mileva Maric. Le couple a trois enfants et se sépare en 1913. Il existe un débat concernant la participation de Maric aux travaux de son mari.

En 1919, il épouse sa cousine Elsa Einstein. Le couple dure jusqu'au décès d'Elsa en 1936. Einstein ne se remarie pas.

Biographics



Pour en savoir plus sur la vie d'Einstein - **Albert Einstein : A Pillar of Modern Physics**

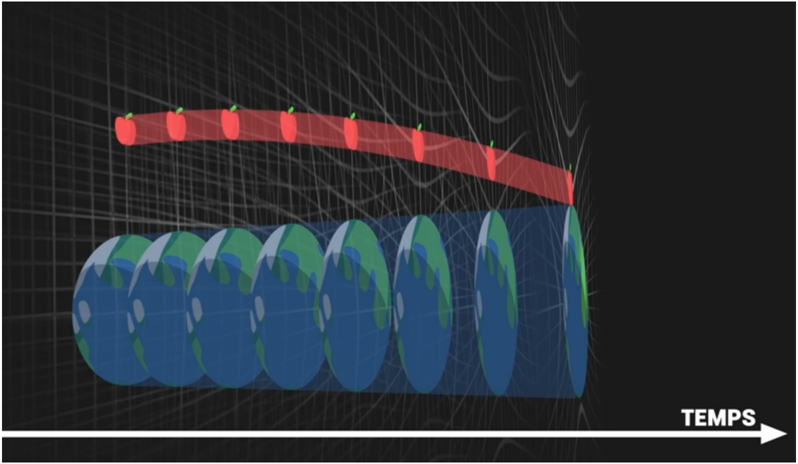


En 1916, il découvre la Relativité Générale : une théorie où la gravitation n'est plus une force mais un effet de la courbure de l'espace-temps.

La relativité générale (RG)

L'observation fondamentale : la chute libre est la trajectoire naturelle en l'absence de force.

La relativité générale (RG)



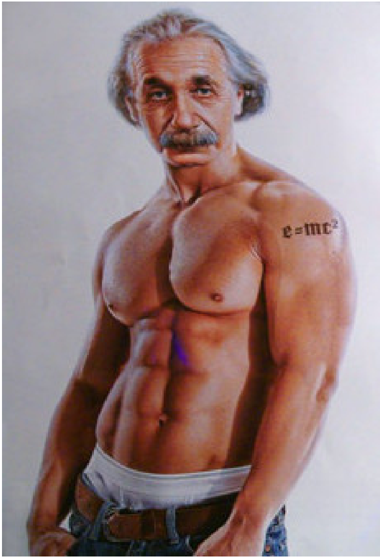
Sa traduction mathématique : en l'absence de force, les trajectoires sont des géodésiques d'un espace-temps muni d'une métrique lorentzienne.

Le problème de la précession de Mercure

La RG donne la bonne valeur de la précession de Mercure.

La RG prédit la déviation de la lumière par les corps massifs. Cet effet est vérifié lors d'une éclipse de Soleil par Arthur Eddington en 1919.

C'est qui le plus fort ?



Einstein devient une célébrité planétaire

RG#11 - Pourquoi la Relativité Générale ?

18 k vues • il y a 1 an

Les idées froides

Onzième de la série sur la RG, cette vidéo aborde la question fondamentale à laquelle Einstein a répondu. Cette vidéo peut être ...

4K Sous-titres

La Relativité Générale

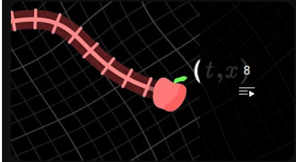
1,8 M de vues • il y a 4 ans

ScienceEtonnante

D'après la **relativité générale**, la matière courbe l'espace-temps, et c'est ça qui explique la gravité. Un épisode ...

Sous-titres

Relativité restreinte | Mathématiques | Théorème de Pythagore 3 moments



Les Mathématiques de la Relativité Générale

ScienceClic

Relativité Générale 1/8 - Ligne d'univers • 6:29

Relativité Générale 2/8 - Vitesse spatiotemporelle • 7:19

AFFICHER LA PLAYLIST COMPLÈTE

General Relativity & Curved Spacetime Explained! | Space Time | PBS Digital Studios

1,5 M de vues • il y a 7 ans

PBS Space Time

The Final Installment of our **General Relativity** Series!!! Tweet at us! @pbsspacetime Facebook: facebook.co...

Sous-titres

STEP 1 EXPLAININ GEOMETRIC SPACETIME TERMS | GLOBAL INERTIAL... 4 moments

Célèbre et engagé

Pourquoi le socialisme ? écrit en 1949 par Albert Einstein, lu et illustré par **Le Stagirite** (chaîne YT)

- Einstein ne participe pas au projet Manhattan mais il a signe une lettre au président Roosevelt en faveur de la construction d'une bombe A (sa « plus grande erreur »)

- Il soutient le mouvement américain des droits civiques, combat l'antisémitisme et promeut le pacifisme.

- Il meurt d'une rupture d'anévrisme à 76 ans.

« Si vous ne pouvez expliquer un concept à un enfant de six ans, c'est que vous ne le comprenez pas complètement »