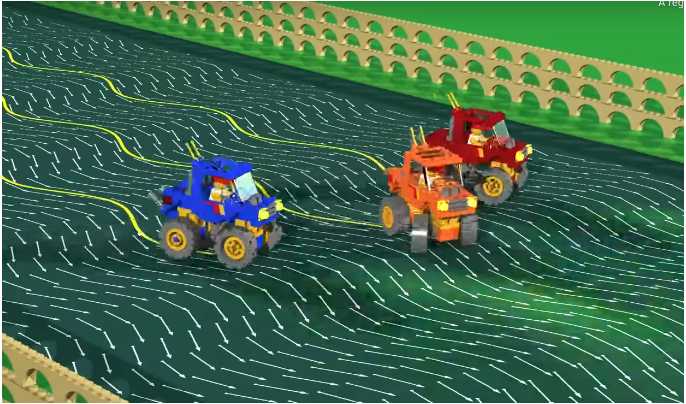
CM 2 - Champs conservatifs

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Gradient

Définition.– Soit $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, le *gradient* de ϕ est le champ de vecteurs $\vec{\nabla}\phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\vec{k}$$

• En coordonnées cylindriques, ce champ a pour expression :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\,\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\vec{k}$$

• et en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\,\vec{e_\theta}$$

Gradient

Proposition.– Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(x, y, z) = a\}$$

la surface de niveau a. Alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est un vecteur normal à S_a. Ceci signifie que pour toute courbe $\gamma : I \longrightarrow S_a$ et tout $t \in I$, on a

$$\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$$

Exemple

- Soit $\phi : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donné par $\phi(r, \varphi, \theta) = r \sin\varphi \sin\theta$.

Le gradient de ϕ est

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi(r, \varphi, \theta) &= \frac{\partial(r \sin\varphi \sin\theta)}{\partial r}\ \vec{e_r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(r \sin\varphi \sin\theta)}{\partial \varphi}\ \vec{e_\varphi} \\
&\quad + \frac{1}{r}\ \frac{\partial(r \sin\varphi \sin\theta)}{\partial \theta}\ \vec{e_\theta} \\
&= \sin\varphi \sin\theta\ \vec{e_r} + \frac{r \cos\varphi \sin\theta}{r \sin\theta}\ \vec{e_\varphi} \\
&\quad + \frac{r \sin\varphi \cos\theta}{r}\ \vec{e_\theta} \\
&= \sin\varphi \sin\theta\ \vec{e_r} + \cos\varphi\ \vec{e_\varphi} + \sin\varphi \cos\theta\ \vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

Proposition

Proposition.– *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. *On a :*

$$\vec{\nabla}(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda\, \vec{\nabla} f + \mu\, \vec{\nabla} g$$

et

$$\vec{\nabla}(f\, g) = \left(\vec{\nabla} f\right)\, g + f\, \left(\vec{\nabla} g\right).$$

Champs conservatifs et potentiels scalaires

Définition.– Soit $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

• On dit que $\overrightarrow{V}$ est un *champ de gradient* ou encore *un champ conservatif* s'il existe $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$.

• On dit que $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est un *potentiel scalaire* de $\overrightarrow{V}$ si $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ (attention au signe !)

Force conservative

Remarque.– En physique, si un champ de force $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de gradient, on dit que la force $\vec{F}$ est *conservative*

Exemple 1.– La force gravitationnelle $\vec{F}(r) = m\vec{\mathcal{G}}(r)$ et la force de Coulomb $\vec{F}(r) = q\vec{E}(r)$ sont conservatives. Les potentiels sont

$$\phi(r) = -\frac{mGM}{r} \quad \text{et} \quad \phi(r) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Exemple 2.– La force de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

est la force subi par une particule de charge électrique q et de vitesse $\vec{v}$ sous l'action d'un champ électrique (externe) $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$. Elle n'est pas conservative en général.

Lignes de champs : Courbes paramétrées

Définition.– Une COURBE PARAMÉTRÉE est une application

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

Le SUPPORT de la courbe paramétrée est le lieu des points

$$C^+ = \{\, \gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \;\big|\; t \in I \subset \mathbb{R} \,\},$$

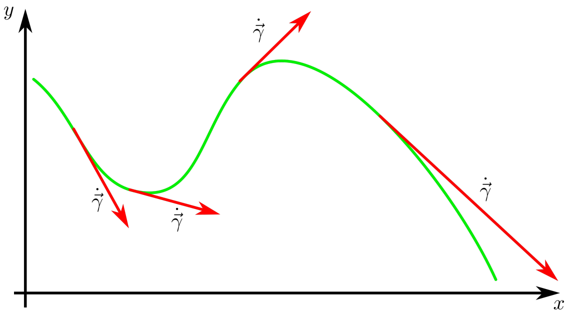
Une courbe paramétrée est naturellement ORIENTÉE par le sens croissant du paramètre t.

On dit que la courbe γ est FERMÉE quand $I = [t_0, t_1]$ et $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.

Courbes paramétrées

- On appelle VECTEUR VITESSE la dérivée première de γ :

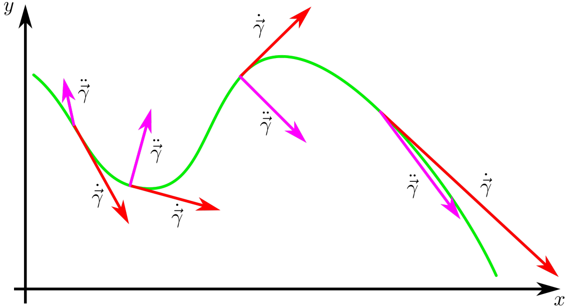
$$\vec{\dot{\gamma}}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\big)$$



Courbes paramétrées

• On appelle VECTEUR ACCÉLÉRATION la dérivée seconde de *gamma* :

$$\ddot{\vec{\gamma}}(t) = \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) = \big(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)\big)$$



Lignes de champ

Définition.– Une *ligne de champ* ou *courbe intégrale* d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) est une courbe paramétrée $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow D$ telle que en tout point $t \in I$ on a :

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{V}(\gamma(t)).$$

• Par conséquent,

$$t \mapsto \gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

est une ligne de champ de $\overrightarrow{V} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ si et seulement si

$$\forall t \in \ I, \quad \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = a\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ y'(t) = b\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ z'(t) = c\big(x(t), y(y), z(t)\big) \end{array} \right.$$

Lignes de champ

Remarque.– Dans la formule $\gamma'(t) = \overrightarrow{V}(\gamma(t))$, la dérivée $\gamma'(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ alors que $\gamma(t)$ est un point de D.

• Si $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}^{\Phi} \circ \Omega^{-1}$ est exprimé dans un repère mobile Φ, elle se transforme donc ainsi

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{V}^{\Phi}(\Omega^{-1}(\gamma(t)))$$

avec $\overrightarrow{V}^{\Phi} : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega : A \longrightarrow D$ et $\gamma : I \longrightarrow D$.

Exercices

Énoncé.– Déterminer et dessiner les lignes de champ de $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ où $\overrightarrow{V}(x, y, z) = (-y, x, 0)$.

Réponse.– Une courbe $t \mapsto \gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ est une ligne de champ si et seulement si

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{V}\big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

i.e.

$$\big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) = \big(-y(t), x(t), 0\big)$$

c'est-à-dire

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = 0 \end{array} \right.$$

Exercices

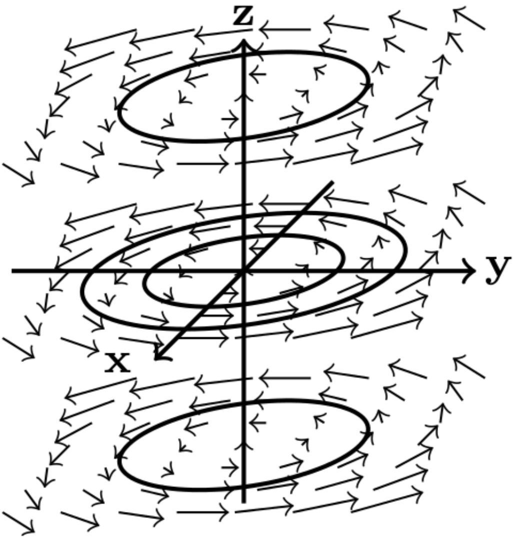
Posons $w(t) := x(t) + iy(t)$. On a

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} w'(t) = iw(t) \\ z(t) \equiv C^{te} \end{cases} \iff \begin{cases} w(t) = w(t_0)e^{i(t-t_0)} \\ z(t) \equiv C^{te} \end{cases}$$

Ainsi, la ligne de champ passant par le point (x_0, y_0, z_0) est un cercle du plan $\{z = z_0\}$ de centre $(0, 0, z_0)$ et de rayon $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

En particulier chaque point de la droite $\{x = 0, y = 0\}$ est fixe sous l'action du champ $\overrightarrow{V}$.

Exercices



Exercices

Énoncé.– Soit $\overrightarrow{U} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \|\overrightarrow{U}(t)\| \equiv Cte$$

Montrer que pour tout $t \in I$ on a

$$\langle \overrightarrow{U}'(t), \overrightarrow{U}(t) \rangle = 0.$$

Réponse.– Notons que nécessairement

$$\forall t \in I, \quad \|\overrightarrow{U}(t)\|^2 \equiv Cte^2$$

D'une part, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\|\overrightarrow{U}(t)\|^2\right) = \frac{d}{dt}\left(Cte^2\right) = 0.$$

Exercices

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\|\vec{U}(t)\|^2\right) &= \frac{d}{dt}\left(\langle\vec{U}(t),\vec{U}(t)\rangle\right)\\ &= \langle\frac{d}{dt}\vec{U}(t),\vec{U}(t)\rangle+\langle\vec{U}(t),\frac{d}{dt}\vec{U}(t)\rangle\\ &= 2\langle\frac{d}{dt}\vec{U}(t),\vec{U}(t)\rangle\end{aligned}$$

En égalant les deux équations, on obtient

$$\langle\frac{d}{dt}\vec{U}(t),\vec{U}(t)\rangle = 0.$$

Exercices

Énoncé.– Déterminer et dessiner les lignes du champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\Phi}(r,\varphi,\theta) = -\frac{GM}{r^2}\,\vec{e}_r\,(r,\varphi,\theta)$

Réponse.– Le champ gravitationnel est exprimé en coordonnées sphériques. Une courbe paramétrée

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\backslash\{O\} \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

est une ligne de champ si et seulement si

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\Phi}(\Omega^{-1}(\gamma(t)))$$

avec

$$\Omega(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r \ \cos\varphi\sin\theta \\ r \ \sin\varphi\sin\theta \\ r \ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercices

- Pour tout $t \in I$, on pose

$$(r(t), \varphi(t), \theta(t)) := \Omega^{-1}(\gamma(t))$$

autrement dit

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= r(t)(\cos\ \varphi(t) \sin\theta(t)\vec{i} + \sin\ \varphi(t)\sin\theta(t)\vec{j} + \cos\varphi(t)\vec{k}) \\ &= r(t)\vec{e_r}\,(r(t), \varphi(t), \theta(t)) \end{aligned}$$

Ainsi, γ est une ligne de champ si et seulement si

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\Phi}(r(t), \varphi(t), \theta(t)) = -\frac{GM}{r^2(t)}\ \vec{e_r}\,(r(t), \varphi(t), \theta(t))$$

- Pour alléger les notations, on pose

$$\vec{u}(t) = \vec{e_r}\,(r(t), \varphi(t), \theta(t)) \ \text{ d'où } \ \gamma(t) = r(t)\vec{u}(t).$$

Exercices

- On a donc

$$\gamma'(t) = r'(t)\vec{u}(t) + r'(t)\vec{u}'(t)$$

avec $\langle \vec{u}(t), \vec{u}'(t) \rangle = 0$ d'après l'exercice précédent.

- Ainsi

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{\mathcal{G}}^{\Phi}(r(t), \varphi(t), \theta(t))$$

$$\iff$$

$$r'(t)\vec{u}(t) + r(t)\vec{u}'(t) = -\frac{GM}{r^2(t)}\vec{u}(t)$$

$$\iff$$

$$(\Sigma) \begin{cases} r'(t) & = & -\dfrac{GM}{r^2(t)} & (1) \\ r(t)\vec{u}'(t) & = & 0 & (2) \end{cases}$$

Exercices

- Puisque pour tout $t \in I$, $r(t) > 0$, on a

$$r'(t) = -\frac{GM}{r(t)^2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$r(t)^2\, r'(t) = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\left(r(t)^3\right) = -GM$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$r(t)^3 - r(t_0)^3 = -3GM(t - t_0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$r(t) = \sqrt[3]{r(t_0)^3 - 3GM(t - t_0)}.$$

- La condition $r(t) > 0$ impose $t < t_1 := t_0 + r^3(t_0)/3GM$ et on a

$$\lim_{t \longrightarrow t_1} r(t) = 0.$$

Exercices

• On a aussi $r'(t) \neq 0$ pour tout $t < 3GMt_0$, ainsi

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} r(t) & = & \sqrt[3]{3GM(t_0 - t)} & (1) \\ u'(t) & = & 0 & (2) \end{cases}$$

• On pose $t_1 := t_0 - \frac{1}{3GM}$. On a donc $r(t_1) = 1$. L'équation (2) montre que $t \mapsto \vec{u}(t)$ est constant. En particulier,

$$\forall t \in]-\infty, t_0[, \quad \vec{u}(t) = \frac{\overrightarrow{O\gamma(t)}}{r(t)} = \overrightarrow{O\gamma(t_1)}$$

et

$$\forall t \in]-\infty, t_0[, \quad \gamma(t) = \sqrt[3]{3GM(t_0 - t)}\ \overrightarrow{O\gamma(t_1)}.$$

• Ceci montre que les lignes de champ sont des demi-droites radiales. Le champ est dit *attractif* car $\lim_{t \longrightarrow t_O} \gamma(t) = O$.

Exercices

Énoncé.– Déterminer et dessiner les lignes du champ électrique $\overrightarrow{E}^{\Phi}(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}\,\vec{e_r}\,(r,\varphi,\theta)$

Réponse.– Le champ électrique ne diffère du champ gravitationnel que d'une constante. La démarche et les calculs sont donc les mêmes que pour l'exercice précédent, à une constante près. Néanmoins comme cette constante est négative, elle influe sur le sens de parcours des lignes de champ. Celles-ci restent des demi-droites radiales mais elles sont parcourues en sens inverse, le champ est dit *répulsif*.