CM 4 - Champs incompressibles

Vincent Borrelli

Université de Lyon

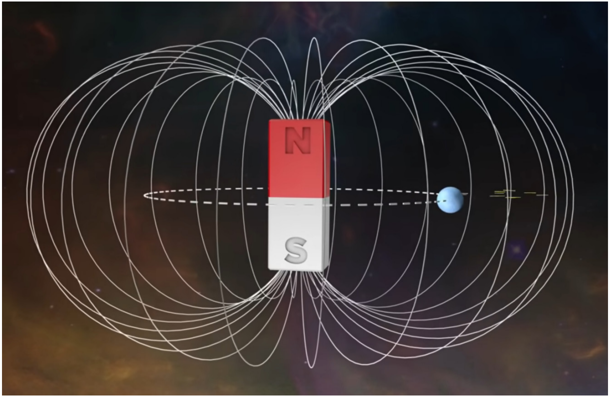

Image extraite de PBS SpaceTime, Anti-matière et relativité quantique

La divergence

Définition.– Soit

$$\begin{array}{cccc} \overrightarrow{V}: & D \subset \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{C^\infty} & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & a(x,y,z)\vec{i} + b(x,y,z)\vec{j} + c(x,y,z)\vec{k} \end{array}$$

un champ de vecteur. La *divergence* de $\overrightarrow{V}$ est l'application $\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = tr\, J_{\overrightarrow{V}} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$$

La divergence

- En coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{V}(\rho,\varphi,z) = a'(\rho,\varphi,z)\vec{e_\rho} + b'(\rho,\varphi,z)\vec{e_\varphi} + c'(\rho,\varphi,z)\vec{k}$$

la divergence de $\overrightarrow{V}$ a pour expression :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial(\rho\, a')}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial b'}{\partial\varphi} + \frac{\partial c'}{\partial z}$$

- En coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{V}(\rho,\varphi,\theta) = a''(\rho,\varphi,\theta)\vec{e_\rho} + b''(\rho,\varphi,\theta)\vec{e_\varphi} + c''(\rho,\varphi,\theta)\vec{e_\theta}$$

la divergence de $\overrightarrow{V}$ a pour expression :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial(r^2\, a'')}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial b''}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial(\sin\theta\; c'')}{\partial\theta}$$

Exemples

Exemples.– Soit $\vec{V}(x, y, z) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$, alors on a

$$\mathrm{div}\,\vec{V}(x, y, z) = 0$$

• Soit $\vec{V}(x, y, z) = x^2\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, on a

$$\mathrm{div}\,\vec{V}(x, y, z) = 2x + 2x + 1 = 4x + 1$$

• Soit $\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ on a

$$\mathrm{div}\,\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{r^2}\right) = 0$$

Proposition

Proposition.– *Soient* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. *On a :*

$$\operatorname{div}(\lambda\,\overrightarrow{U} + \mu\,\overrightarrow{V}) = \lambda \operatorname{div}\overrightarrow{U} + \mu \operatorname{div}\overrightarrow{V}$$

De plus

$$\operatorname{div}(f\overrightarrow{V}) = f \operatorname{div}\overrightarrow{V} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{V}$$

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{U}) \cdot \overrightarrow{V} - \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{V})$$

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f) = \Delta f$$

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{V}) = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\overrightarrow{V}) = \Delta\overrightarrow{V} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{V}$$

où $\Delta\overrightarrow{V}$ *désigne le laplacien vectoriel, c'est-à-dire le laplacien sur chacune des coordonnées cartésiennes de* $\overrightarrow{V}$

Incompressibilité

Définition.– Un champ de vecteurs $\vec{V}$ est dit *à divergence nulle* si $\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$. Dans ce cas, si le champ $\vec{V}$ décrit la vitesse d'écoulement d'un fluide, on dit que le fluide est *incompressible*.

• Plus généralement, si un champ de vecteurs $\vec{V}$ décrit un courant de matière et si $\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$, le champ est dit *solénoïdal* (du grec *sôlen* = tuyau) : le volume de matière transportée est constant (comme s'il était contraint dans un tuyau).

• Par exemple, un champ de gradient $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est solénoïdal si et seulement si

$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi) = \Delta\phi = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si la fonction ϕ est harmonique.

Invariance de jauge

• Puisque $\operatorname{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}) = 0$, tout champ rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}$ est à divergence nulle.

Définition.– Soit $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. Si $\vec{U} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U}$, on dit que $\vec{U}$ est un *potentiel vectoriel* de $\vec{V}$. Dans ce cas, le champ $\vec{V}$ est nécessairement à divergence nulle.

• Si $\vec{U}$ est un potentiel vectoriel de $\vec{V}$ alors pour tout $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, le champ $\vec{U} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$ est encore un potentiel vectoriel de $\vec{V}$. En effet, puisque $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi = 0$, on a

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{U} + \vec{\nabla}\phi\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U} = \vec{V}$$

• Cette liberté dans le choix du potentiel vectoriel d'un champ à divergence nulle s'appelle l'*invariance de jauge*.

Ensemble contractile

• Tout champ rotationnel est à divergence nulle mais la réciproque est fausse. Elle dépend en partie de la topologie de D.

Définition.– Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ est dit *contractile* s'il se déforme continûment en un point $\Omega \in D$.

• Autrement dit, D est contractile s'il existe une application continue $H : D \times [0,1] \longrightarrow D$ telle que $H(\Omega, t) = \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$, $H(x,0) = x$ et $H(x,1) = \Omega$ pour tout $x \in D$.

Proposition.– *Si $D \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé (par rapport à $\Omega \in D$) alors D est contractile (sur le point Ω)*

Revoilà Poincaré !

Lemme de Poincaré II.– *Soit* $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un champ de vecteurs sur* D *contractile. Alors*

$$\exists \vec{U} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad t.\ q. \quad \vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U} \Longleftrightarrow \mathrm{div}\, \vec{V} = 0$$

Détermination de $\vec{U}$.– Soit $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par

$$V(x,y,z) = a(x,y,x)\vec{i} + b(x,y,z)\vec{j} + c(x,y,z)\vec{k}$$

et tel que

$$\mathrm{div}\, V = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Puisque $\mathbb{R}^3$ est contractile (car étoilé), d'après le lemme de Poincaré, il existe un potentiel vectoriel $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{U}$.

Détermination d'un potentiel vectoriel

• Notons $\overrightarrow{U} = f\,\vec{i} + g\,\vec{j} + h\,\vec{k}$ ce potentiel vectoriel. La relation $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$ signifie que

$$(1)\ \ \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = a, \quad (2)\ \ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = b, \quad (3)\ \ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = c.$$

• Ce système est sous-déterminé : les dérivées partielles de f, g et h sont au nombre de neuf et il n'y a que trois équations.

• Deux solutions de ce système sous-déterminé (i.e. deux potentiels vectoriels) $\overrightarrow{U}_1$ et $\overrightarrow{U}_2$ diffèrent d'un gradient de fonction :

$$\exists \phi \text{ t. q. } \overrightarrow{U}_2 - \overrightarrow{U}_1 = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

Détermination d'un potentiel vectoriel

Exemple 1.– Supposons $\overrightarrow{V} = 0$ et cherchons les potentiels vectoriels $\overrightarrow{U}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = 0$. On doit résoudre

$$(1)\ \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \quad (2)\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (3)\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

- La première équation équivaut à

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= \int \frac{\partial g}{\partial z} dy + \lambda_1(x,z) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \int g dy + \frac{\partial}{\partial z} \int \lambda_1(x,z) dz \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z) \big) \end{aligned}$$

avec $G(x,y,z) = \int g dy$ et $\Lambda_1(x,z) = \int \lambda_1(x,z) dz$.

Détermination d'un potentiel vectoriel

- La seconde équation $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}$ montre que

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int \frac{\partial h}{\partial x} dz + \lambda_2(x,y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int h dz + \lambda_2(x,y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z) \big) + \lambda_2(x,y)
\end{aligned}
$$

car $h(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z} \big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z) \big)$.

- La troisième équation $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ impose

$$
\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial z} \big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z) \big) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \lambda_2(x,y)
$$

Détermination d'un potentiel vectoriel

Soit encore

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}(G(x,y,z)+\Lambda_1(x,z))\right)+\frac{\partial \lambda_2}{\partial y}(x,y) \\ &= \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)+\frac{\partial \lambda_2}{\partial y}(x,y) \end{aligned}$$

car $G(x,y,z)=\int g dy$ Il faut donc $\frac{\partial \lambda_2}{\partial y}(x,y)=0$. Autrement dit, λ_2 ne doit dépendre que de x.

- Notons $\Lambda_2(x)=\int \lambda_2(x)dx$. Au bilan on a

$$h(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}\big(G(x,y,z)+\Lambda_1(x,z)+\Lambda_2(x)\big)$$

Détermination d'un potentiel vectoriel

et

$$g(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z) + \Lambda_2(x)\big)$$

$$f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\big(G(x,y,z) + \Lambda_1(x,z) + \Lambda_2(x)\big)$$

soit encore

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(G + \Lambda_1 + \Lambda_2).$$

Exemple 2.– Supposons $\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = c(x,y)\vec{k}.$$

Puisque $\mathbb{R}^3$ est contractile (car étoilé) et que $\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = \frac{\partial c}{\partial z}\vec{k} = 0$, le lemme de Poincaré assure l'existence de $\overrightarrow{U} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$.

Détermination d'un potentiel vectoriel

- Puisque $\vec{V}$ ne dépend pas de z, on cherche un potentiel

$$\vec{U}(x,y) = f(x,y)\,\vec{i} + g(x,y)\,\vec{j} + h(x,y)\,\vec{k}$$

indépendant de z.

- En particulier $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial g}{\partial z} = \dfrac{\partial h}{\partial z} = 0$. Les équations

$$(1)\quad \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \qquad (2)\quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \qquad (3)\quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = c$$

deviennent

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = c$$

Ainsi $h \equiv Cte$.

Détermination d'un potentiel vectoriel

- On cherche donc $\overrightarrow{U}$ sous la forme

$$\overrightarrow{U}(x,y) = f(x,y)\,\vec{i} + g(x,y)\,\vec{j} + Cte\,\vec{k}$$

avec pour seule contrainte

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = c$$

- On obtient

$$g(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + \int c(x,y)dx$$

Les solutions de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$ sont donc les champs $\overrightarrow{U}$ de la forme

$$\overrightarrow{U}(x,y) = f(x,y)\,\vec{i} + \left(\int \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + \int c(x,y)dx\right)\vec{j} + Cte\,\vec{k}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quelconque des variables x et y.

Détermination d'un potentiel vectoriel

- Notons que $\vec{U}$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
\vec{U}(x,y) &= \left(\int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx\right)\vec{i} + \left(\int \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx\right)\vec{j} \\
&\quad + \left(\int \frac{\partial f}{\partial z}(x,y)dx\right)\vec{k} + \left(\int c(x,y)dx\right)\vec{j} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int f(x,y)dx\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int f(x,y)dx\right)\vec{j} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\int f(x,y)dx\right)\vec{k} + \left(\int c(x,y)dx\right)\vec{j}
\end{aligned}$$

Posons $F(x,y) = \int f(x,y)dx$, on a donc

$$\vec{U}(x,y) = \left(\int c(x,y)dx\right)\vec{j} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F$$

Détermination d'un potentiel vectoriel

Application.– Cherchons les potentiels vectoriels $\vec{U}$ de

$$\vec{V}(x, y, z) = (xy^2 - x^3y)\ \vec{k}$$

où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $c(x, y) = xy^2 - x^3y$ et donc

$$\int c(x, y)dx = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}x^4y + cte$$

d'où

$$\vec{U}(x, y) = (\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}x^4y + cte)\ \vec{j} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F$$

avec $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque des variables x et y.

Exercice

Énoncé.– Le champ magnétique engendré par un courant d'intensité I passant dans un fil vertical a pour expression

$$\vec{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j} \right),$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k}$.

La force que $\vec{B}$ exerce sur une charge q de position (x,y,z) et de vitesse $\vec{v}$ est donnée par

$$\vec{F}(x,y,z) = q\vec{v} \wedge \vec{B}(x,y,z)$$

et s'appelle la **force de Lorentz.**

Exercice

1) Ecrire $\vec{B}$ en coordonnées cylindriques.

Réponse.– L'expression de $\vec{B}$ en coordonnées cylindriques est :

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi} \left(-\frac{\rho \sin\varphi}{\rho^2}\, \vec{i} + \frac{\rho \cos\varphi}{\rho^2}\, \vec{j} \right) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\, \frac{1}{\rho}\, \vec{e_\varphi}\,.$$

2) Soit $D \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}\vec{k}$ un sous-domaine simplement connexe. Le champ $\vec{B}$ est-il conservatif ?

Exercice

Réponse.– Puisque $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = 0$ et que D est simplement connexe, le lemme de Poincaré assure l'existence de $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \vec{B}$. Ainsi $\vec{B}$ est conservative sur D.

• Puisque

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\,\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\vec{k}$$

il faut résoudre

$$-\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 0, \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{\mu_0 q\, I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

La première et la troisième équation montrent que ϕ ne dépend que de φ. La seconde équation permet d'écrire

$$\phi(\varphi) = -\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,(\varphi + \varphi_0)$$

Exercice

Remarque.– Le champ $\vec{B}$ n'est pas conservatif sur $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k}$. En particulier, le potentiel trouvé ci-dessus ne se prolonge pas sur $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k}$ (comparer $\phi(0)$ et $\phi(2\pi)$).

Énoncé.– 3) Calculer $div\, \vec{B}$.

Réponse.– On a

$$\operatorname{div} \vec{B}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi} \, \frac{1}{\rho} \, \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0.$$

Énoncé.– 4) Déterminer un potentiel vectoriel $\vec{A}$ de $\vec{B}$.

Réponse.– Écrivons $\vec{A}$ sous la forme

$$\vec{A}(\rho, \varphi, z) = f(\rho, \varphi, z)\ \vec{e_\rho} + g(\rho, \varphi, z)\ \vec{e_\varphi} + h(\rho, \varphi, z)\ \vec{k}$$

Exercice

Puisque

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial h}{\partial \varphi} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\,\vec{e_\rho} \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \rho}\right)\,\vec{e_\varphi} \\ &+ \frac{1}{\rho}\,\left(\frac{\partial(\rho\, g)}{\partial \rho} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\,\vec{k}\end{aligned}$$

on a $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ si et seulement si

$$(1)\quad \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial h}{\partial \varphi} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) = 0, \qquad (2)\quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}$$

et

$$(3)\quad \frac{1}{\rho}\,\left(\frac{\partial(\rho g)}{\partial \rho} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = 0.$$

Exercice

• Puisque $\vec{B}$ est indépendant de z, on cherche $\vec{A}$ sous la forme

$$\vec{A}(\rho,\varphi,z) = f(\rho,\varphi)\ \vec{e_\rho} + g(\rho,\varphi)\ \vec{e_\varphi} + h(\rho,\varphi)\ \vec{k}$$

et les équations deviennent

$$(1)\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial h}{\partial \varphi} = 0, \qquad (2)\quad -\frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\mu_0\ I}{2\pi}\ \frac{1}{\rho}$$

et

$$(3)\quad \frac{1}{\rho}\ \left(\frac{\partial(\rho g)}{\partial \rho} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) = 0.$$

• L'équation (1) montre que h ne dépend pas de φ ; l'équation (2) s'intègre immédiatement en

$$h(\rho) = -\frac{\mu_0\ I}{2\pi}\ \ln\rho + cte$$

Exercice

• L'équation (3) est trivialement satisfaite si $g = f \equiv 0$. Un potentiel est donc donné par

$$\overrightarrow{A} = -\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\, \ln \rho\, \vec{k}$$

Remarque.– Ce potentiel est défini sur tout $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}\vec{k}$ (qui pourtant n'est pas contractile).

Culture : le théorème de Helmholtz-Hodge

 

Théorème H-H.– *Tout champ de vecteur $\vec{V}$ est la somme $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ d'un champ de gradient $\vec{V}_1 = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ et d'un champ rotationnel $\vec{V}_2 = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,U$.*

Ce résultat est également appelé *théorème fondamental du calcul vectoriel*