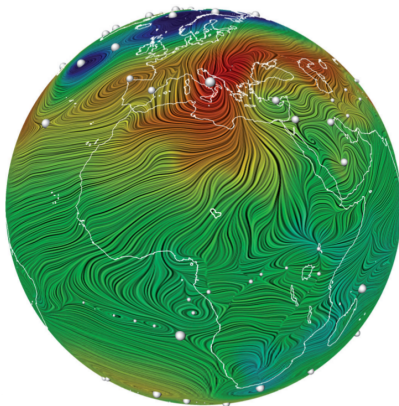


CM 5 - Circulation

Vincent Borrelli

Université de Lyon



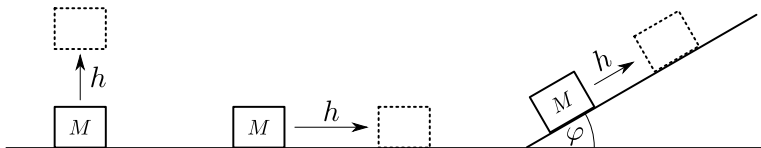
Travail

Soit F la force gravitationnelle. Le *travail mécanique* pour lever un poids M d'une hauteur h est

$$W = hF .$$

Pour déplacer le poids à l'horizontal d'une distance h le travail est $W = 0$ (sans frottement). Et plus généralement pour déplacer M d'une distance h le long d'une rampe d'angle φ , on obtient

$$W = hF \sin \varphi .$$



Travail

Ces relations peuvent être exprimées d'une façon plus compacte, en écrivant la force F comme un vecteur \vec{F} et la distance h aussi comme un vecteur

$$\vec{h} = (x_1, y_1, z_1) - (x_0, y_0, z_0) ,$$

où (x_0, y_0, z_0) est le point de départ et (x_1, y_1, z_1) est le point d'arrivée. On obtient le travail comme produit scalaire

$$W = -\vec{F} \cdot \vec{h} .$$

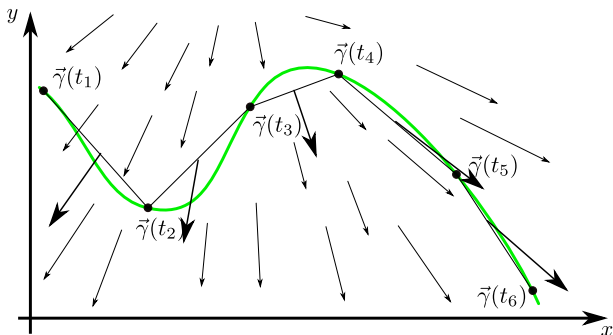
Exercice : Se convaincre que la dernière formule englobe bien les trois cas précédents (en particulier pourquoi sin dans le dernier cas et pas cos ?).

La formule précédente $W = -\vec{F} \cdot \vec{h}$ souffre de deux limitations importantes :

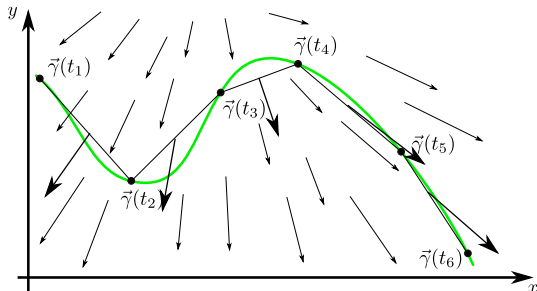
- elle n'est établie que pour des déplacements rectilignes.
- elle suppose que la force est constante.

Travail le long d'une courbe

Dans le cas d'une particule suivant un trajet $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ et soumise au *champ de force* donnée par \vec{F} , on peut obtenir une valeur approximative du travail en sous-divisant γ en petites portions et en remplaçant chaque portion par un segment.



Travail le long d'une courbe



- Notons $\Delta t = \frac{b-a}{N}$ la longueur de chaque subdivision de l'intervalle $[a, b]$:
 $t_0 = a, t_1 = a + \Delta t, t_2 = a + 2 \cdot \Delta t, \dots, t_N = b$
- Le travail sur chaque segment $\gamma: [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^3$ peut être approché par

$$W_j = \vec{F}(p_j) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$$

où \vec{F} est évaluée sur le point milieu p_j de $[\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})]$.

Travail le long d'une courbe

- Le travail total est donc approximé par

$$W \approx \sum_{j=1}^N \vec{F}(p_j) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) .$$

- La formule de Taylor permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) &\approx \gamma(t_{j-1}) + (t_j - t_{j-1}) \gamma'(t_{j-1}) \\ &= \gamma(t_{j-1}) + \gamma'(t_{j-1}) \Delta t \end{aligned}$$

ainsi

$$W \approx \sum_{j=1}^N \vec{F}(p_j) \cdot \gamma'(t_{j-1}) \Delta t .$$

Travail le long d'une courbe

Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

- Le passage à la limite ($\Delta t \rightarrow 0$) revient à remplacer \sum par \int et Δt par dt . Le travail total s'écrit

$$\sum_{j=1}^N \vec{F}(p_j) \cdot \gamma'(t_{j-1}) \Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt .$$

Circulation d'un champ de vecteurs

Définition.— Soit $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 , $\gamma : [t_0, t_1] \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée et $C^+ = \gamma([t_0, t_1])$ son support. On appelle CIRCULATION DE \vec{V} LE LONG DE C^+ L'INTÉGRALE CURVILIGNE

$$\int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} := \int_{t_0}^{t_1} \vec{V}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$$

où $\vec{V}(\vec{\gamma}(t))$ indique que le champ \vec{V} est évalué sur les points de la courbe et \cdot désigne le produit scalaire entre vecteurs.

Circulation d'un champ de vecteurs

Proposition.— *Si C^- est parcourue dans le sens opposé à celui de C^+ , on a*

$$\int_{C^-} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}.$$

- Si C^+ est le support d'une courbe fermée, la circulation de \vec{V} le long de C^+ s'écrit

$$\oint_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$$

Exemples

Exemple 1.– Calcul de la circulation du champ de vecteurs

$\vec{V}(x, y, z) = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$ le long de l'arc d'éllice

$\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$ est

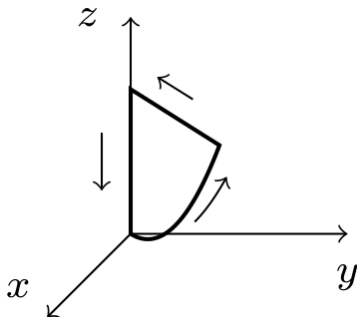
$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^{2\pi} \left(t \frac{d(\cos t)}{dt} - \sin t \frac{d(\sin t)}{dt} \right. \\ &\quad \left. + \cos t \frac{dt}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-t \sin t - \sin t \cos t + \cos t \right) dt \\ &= \left[t \cos t \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \cos t dt \\ &= 2\pi - \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

Exemples

Exemple 2.– Calcul de la circulation du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$ le long de la courbe fermée

$$C^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$$

représentée ci-dessous



Exemples

- La circulation du champ $\vec{V}(x, y, z) = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$
le long de la parabole $C_1^+ \begin{cases} y = x \\ z = x^2 \\ x : 0 \rightarrow 1 \end{cases}$ est :

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\substack{C_1^+ \\ x:0 \rightarrow 1 \\ z=x^2}} z \, dx - \int_{\substack{C_1^+ \\ y:0 \rightarrow 1}} y \, dy + \int_{\substack{C_1^+ \\ z:0 \rightarrow 1 \\ x=\sqrt{z}}} x \, dz \\ &= \int_0^1 x^2 \, dx - \int_0^1 y \, dy + \int_0^1 \sqrt{z} \, dz \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} z^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exemples

- La circulation du même champ de vecteurs

$\vec{V}(x, y, z) = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$ le long du segment

$$C_2^+ \begin{cases} y = x \\ z = 1 \\ x : 1 \rightarrow 0 \end{cases} \text{ est :}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\substack{C_2^+ \\ x:1 \rightarrow 0 \\ z=1}} z \, dx - \int_{\substack{C_2^+ \\ y:1 \rightarrow 0}} y \, dy + \int_{\substack{C_2^+ \\ z=1 \\ dz=0}} x \, dz \\ &= \int_1^0 dx - \int_1^0 y \, dy + 0 \\ &= - \int_0^1 dx + \int_0^1 y \, dy \\ &= - [x]_0^1 + \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exemples

- Enfin, la circulation de $\vec{V} = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$ le long du segment C_3^+ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z : 1 \rightarrow 0 \end{cases}$ est :

$$\begin{aligned} \int_{C_3^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\substack{C_3^+ \\ x=0 \\ dx=0}} z \, dx - \int_{\substack{C_3^+ \\ y=0 \\ dy=0}} y \, dy + \int_{\substack{C_3^+ \\ z:1 \rightarrow 0 \\ x=0}} x \, dz \\ &= 0 + 0 + \int_1^0 0 \, dz = 0. \end{aligned}$$

Exemples

- En conclusion, la circulation de \vec{V} le long de la courbe fermée $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$ vaut :

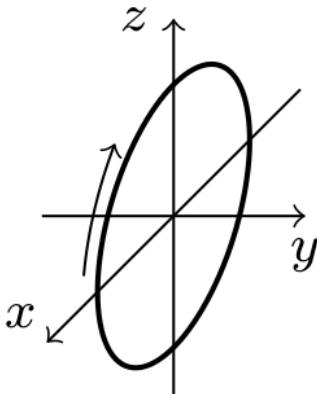
$$\begin{aligned}\int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{C_1^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \int_{C_2^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \int_{C_3^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0.\end{aligned}$$

Exemples

Exemple 3.– Calcul de la circulation du champ

$$\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \varphi \vec{e}_\rho + z \vec{e}_\phi + \rho \vec{k}$$

le long du cercle C^+ d'équation $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ et orienté
comme dans la figure :



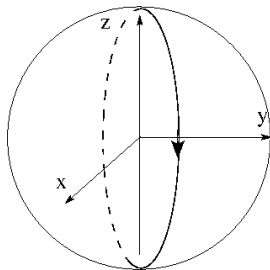
Exemples

- Notons que cette courbe se décrit simplement en coordonnées cylindriques :
$$\begin{cases} \rho = 2 \\ \varphi : 0 \rightarrow 2\pi \\ z = 3 \end{cases}$$

- Puisque $\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \varphi \vec{e}_\rho + z \vec{e}_\varphi + \rho \vec{k}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\substack{C^+ \\ \rho=1 \\ d\rho=0}} \varphi d\rho + \int_{\substack{C^+ \\ \varphi:0 \rightarrow 2\pi \\ \rho=2, z=3}} z \rho d\varphi + \int_{\substack{C^+ \\ z=3 \\ dz=0}} \rho dz \\ &= 0 + 6 \int_0^{2\pi} d\varphi + 0 = 12\pi. \end{aligned}$$

Exemple 4.– Calcul de la circulation du champ $\vec{V}(r, \varphi, \theta) = \varphi \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\phi + \rho \vec{e}_\theta$ le long du cercle C^+ d'équation $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$ orienté comme dans la figure



Exemples

- Ce cercle s'écrit de façon relativement simple en coordonnées sphériques comme union de deux

demi-cercles d'équations C_1^+ $\left\{ \begin{array}{l} r = 2 \\ \varphi = \pi/4 \\ \theta : 0 \rightarrow \pi \end{array} \right.$ et

$$C_2^+ \left\{ \begin{array}{l} r = 2 \\ \varphi = 5\pi/4 \\ \theta : \pi \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

- Puisque $\vec{V}(r, \varphi, \theta) = \varphi \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\varphi + \rho \vec{e}_\theta$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{C_1^+} \varphi dr + \int_{C_1^+} r \sin^2 \theta d\varphi + \int_{C_1^+} r^2 dz \\ &\quad \begin{array}{ccc} r=2 & \varphi=\pi/4 & r=2 \\ dr=0 & d\varphi=0 & \theta:0 \rightarrow \pi \end{array} \\ &= 0 + 0 + 4 \int_0^\pi d\theta = 4\pi \end{aligned}$$

Ainsi que

$$\begin{aligned} \int_{C_2^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\substack{C_2^+ \\ r=2 \\ dr=0}} \varphi \, dr + \int_{\substack{C_2^+ \\ \varphi=5\pi/4 \\ d\varphi=0}} r \sin^2 \theta \, d\varphi + \int_{\substack{C_2^+ \\ r=2 \\ \theta:\pi \rightarrow 0}} r^2 \, dz \\ &= 0 + 0 + 4 \int_{\pi}^0 d\theta = -4\pi \end{aligned}$$

• Au bilan

$$\int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C_1^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \int_{C_2^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Circulation d'un champ gradient

Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

Théorème.— Soit $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ un champ de gradient de domaine D_ϕ , alors

- La circulation de $\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ le long d'une courbe $C^+ \subset D_\phi$ joignant deux points A et B ne dépend pas de la courbe mais seulement des valeurs de ϕ aux deux points

$$\int_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{d\ell} = \phi(B) - \phi(A).$$

- La circulation de $\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ le long d'une courbe fermée C^+ est nulle

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{d\ell} = 0.$$

Exemple

Exemple.– Soit $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ où

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{y(z^2 - x^2)}}$$

avec

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0, z > x > 0 \}$$

Soit C^+ une hélice de D joignant les points $A = (0, 1, 2)$ et $B = (3, 4, 5)$. La circulation de $\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ le long de C^+ vaut :

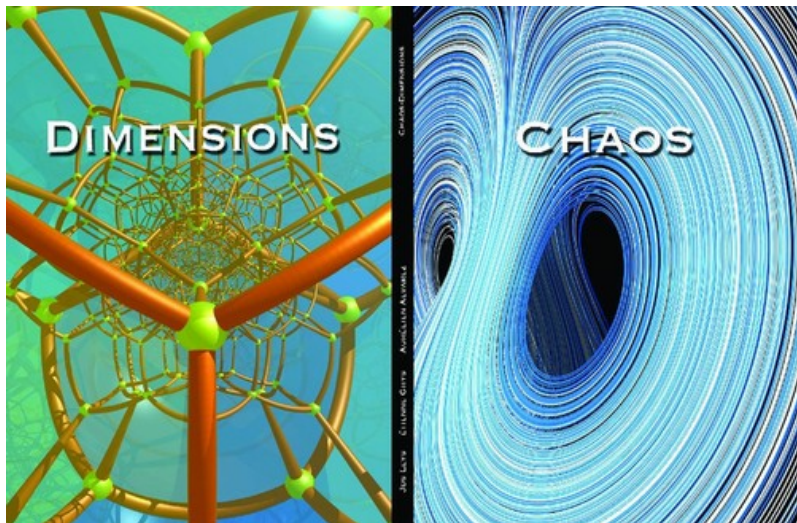
$$\begin{aligned} \int_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{\ell} &= \phi(3, 4, 5) - \phi(0, 1, 2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4(25 - 9)}} - \frac{1}{\sqrt{4 - 0}} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

Dimensions et Chaos

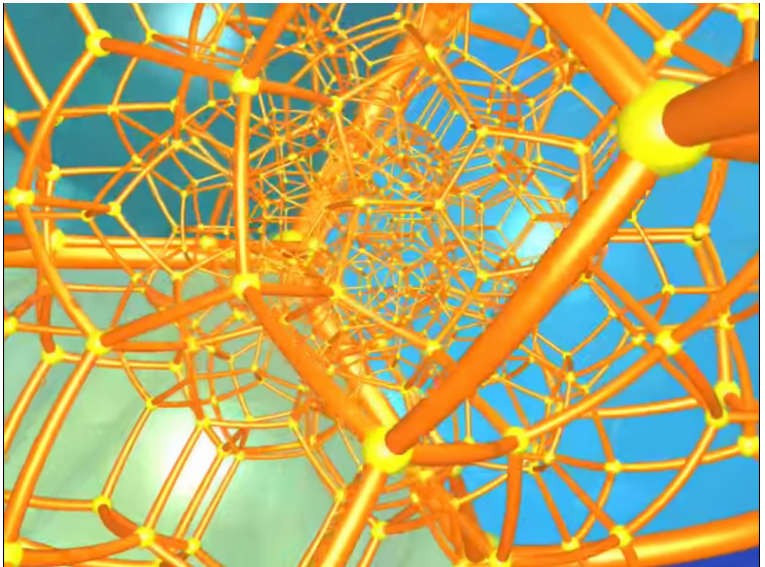


Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

Dimensions

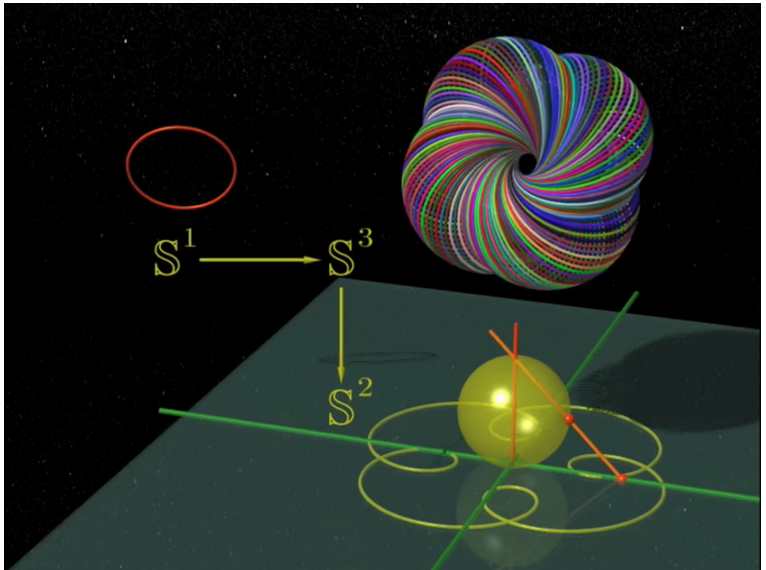


Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

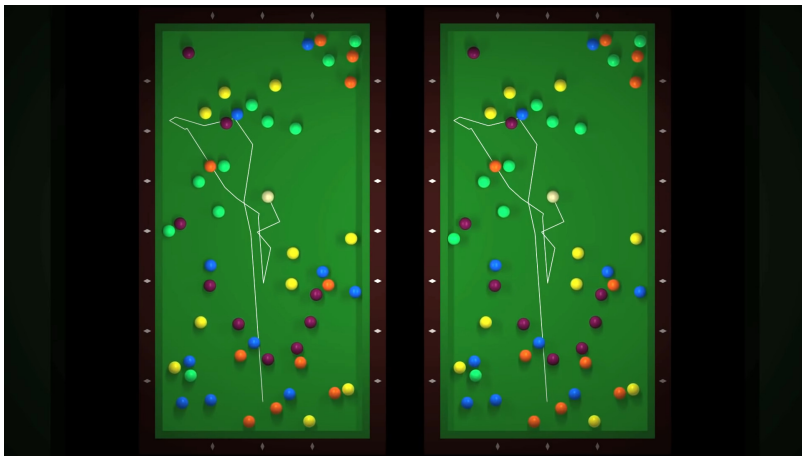
Dimensions



Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

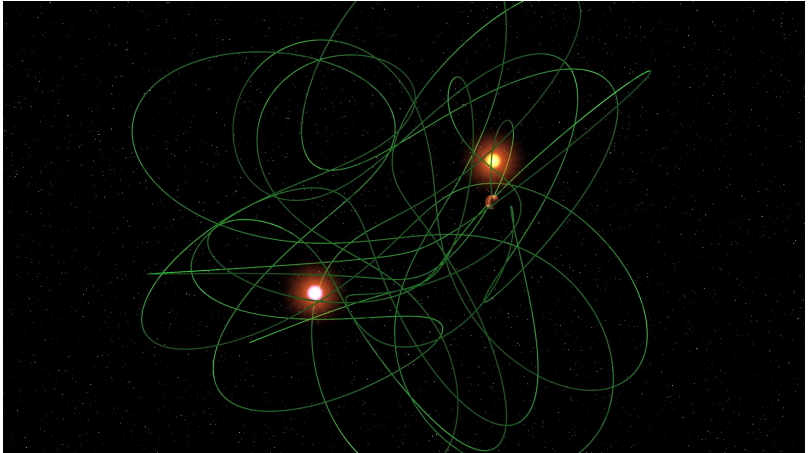
Circulation
d'un champ
gradient



Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

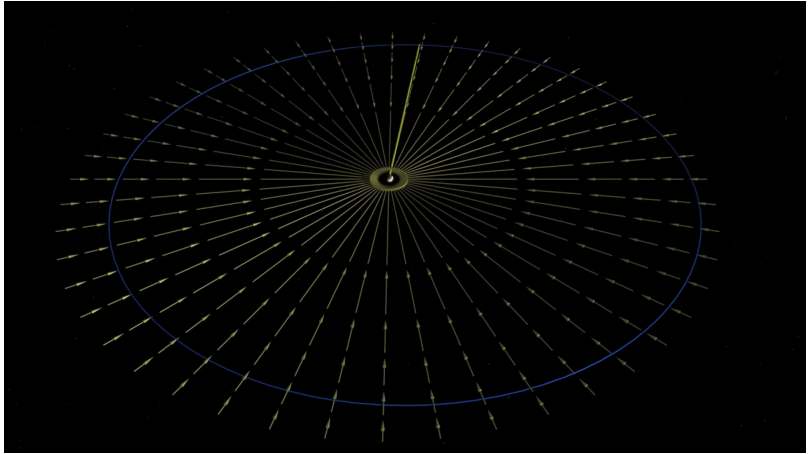
Circulation
d'un champ
gradient



Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient



Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

Chaos

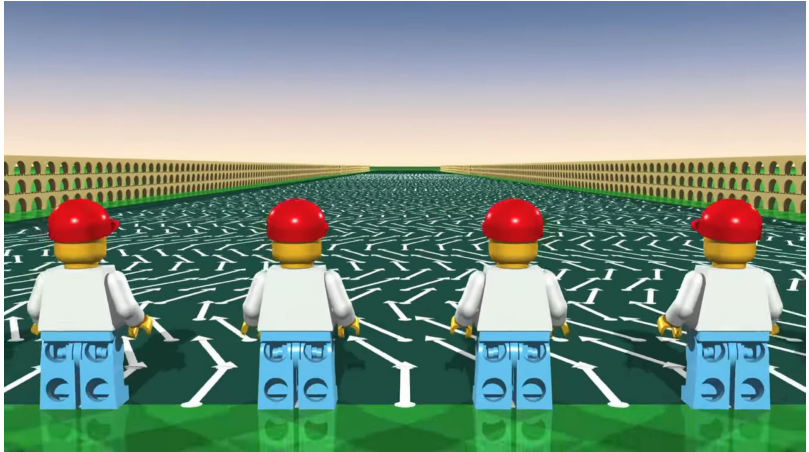


Chaos

Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

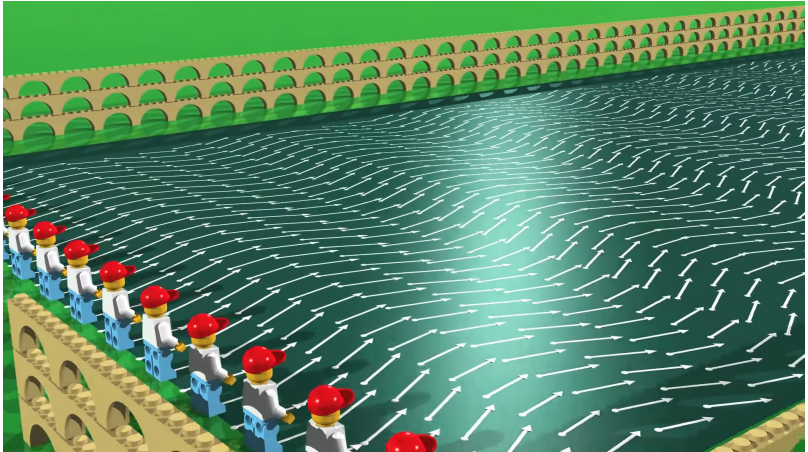


Chaos

Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

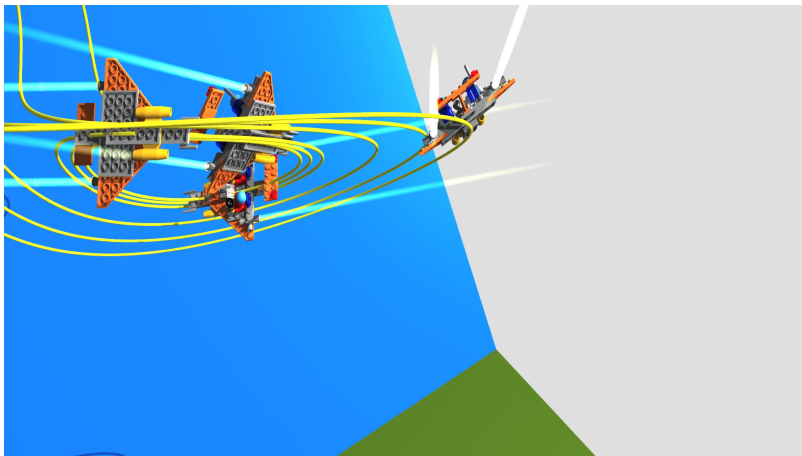


Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

Chaos



Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

Étienne Ghys



Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

Jos Leys



Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

Aurélien Alvarez



Travail d'une
force

Circulation
d'un champ
de vecteurs

Circulation
d'un champ
gradient

Thierry Lhermitte

