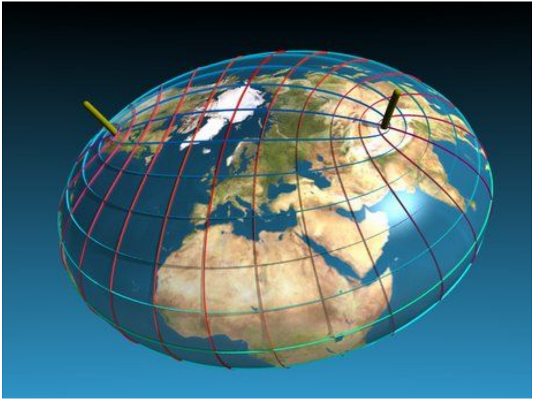
CM 6 - Topologie, courbes, surfaces

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Courbes sur un ellipsoïde (Image : J. Leys et E. Ghys)

Topologie

Dans la suite $\mathbb{R}^n$ est l'un des trois espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

1. Dans $\mathbb{R}$, on note
   $I_a(r) =]a-r, a+r[$, l'intervalle ouvert
   $\bar{I}_a(r) = [a-r, a+r]$, l'intervalle fermé
   $\partial I_a(r) = \{a-r, a+r\}$, le bord de l'intervalle.

2. Dans $\mathbb{R}^2$, on note
   $D_{(a,b)}(r) = \{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$, le disque ouvert
   $\bar{D}_{(a,b)}(r) = \{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2\}$, le disque fermé
   $\partial D_{(a,b)}(r) = \{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ le bord du disque (un cercle).

Topologie

3. Dans $\mathbb{R}^3$, on note

$$B_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2\}$$

la boule ouverte

$$\overline{B}_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2\}$$

la boule fermée

$$\partial B_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}$$

le bord de la boule (une sphère)

Définitions

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

• Un point P est un **point intérieur** à D, s'il existe une boule ouverte B_P contenue dans D.

• Un point P est un **point extérieur** à D il existe une boule ouverte B_P qui n'intersecte pas D.

• Un point $P \in \mathbb{R}^n$ est un **point du bord** de D si toute boule ouverte B_P centrée en P contient à la fois des points de D et de son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash D$. L'ensemble des points du bord est noté ∂D.

ATTENTION.– Un point dans ∂D peut être dans D ou non !

Définitions

• Un ensemble D est dit **ouvert** s'il ne contient aucun de ses points de bord et **fermé** s'il contient tous ses points de bord.

Propriété.– *Le complémentaire d'un ouvert est un fermé, le complémentaire d'un fermé est un ouvert.*

• Par convention, l'**ensemble vide** $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$ sont à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$.

ATTENTION.– Il existe aussi des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés !

• Un ensemble D est dit **borné** s'il existe un disque ouvert B qui le contient. Il est dit **compact** s'il est fermé et borné.

Exemples

• Les droites, demi-droites et demi-plans sont fermés non bornés dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$. De même, les plans sont fermés non bornés dans $\mathbb{R}^3$.

• Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ est ouverte et bornée. Toute boule fermée est compacte, ainsi que l'intérieur d'un carré avec son bord (dans $\mathbb{R}^2$) et l'intérieur d'un cube avec son bord (dans $\mathbb{R}^3$).

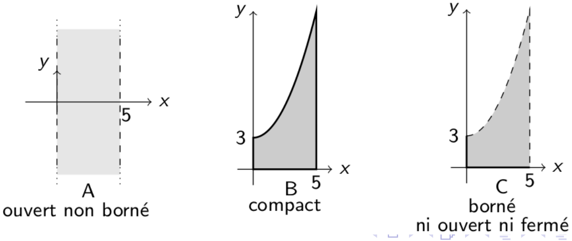
• Dans le plan $\mathbb{R}^2$, le quadrant $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ est fermé non borné. Le même quadrant sans bord, $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est ouvert non borné.

Exercices

Dessiner les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ et dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés ou compacts :

- $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 5\right\}$
- $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2 + 3\right\}$
- $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x < 5,\ 0 \leqslant y < x^2 + 3\right\}$.

Réponse.–



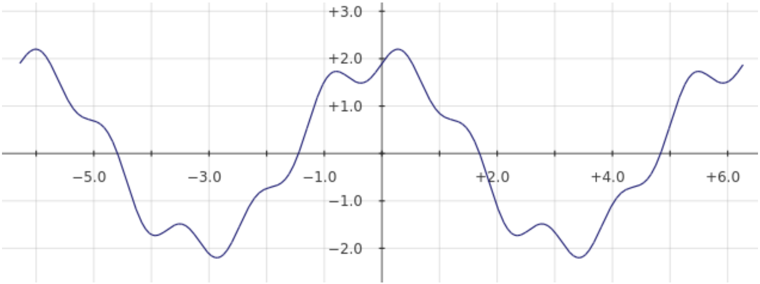
Courbes paramétrées

Il existe plusieurs façons mathématiques de décrire formellement la notion de « courbe ». En voilà trois :

- au moyen des **graphes** de fonctions d'une variable
- au moyen d'équations implicites : on parle alors de **courbes définies implicitement**
- au moyen d'un paramètre, le temps t : on parle alors de **courbes paramétrées**

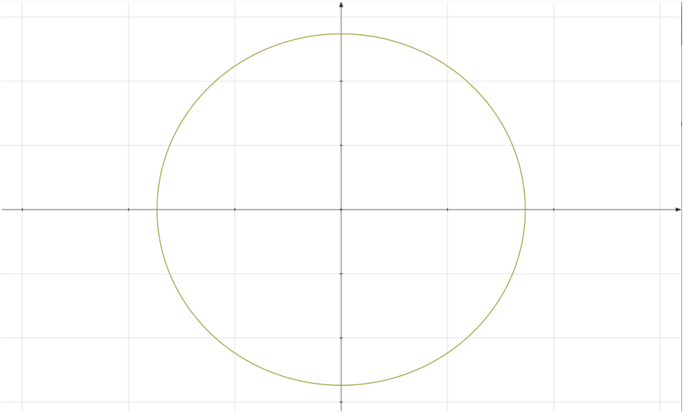
Ici, on donne la préférence aux courbes paramétrées.

Graphes



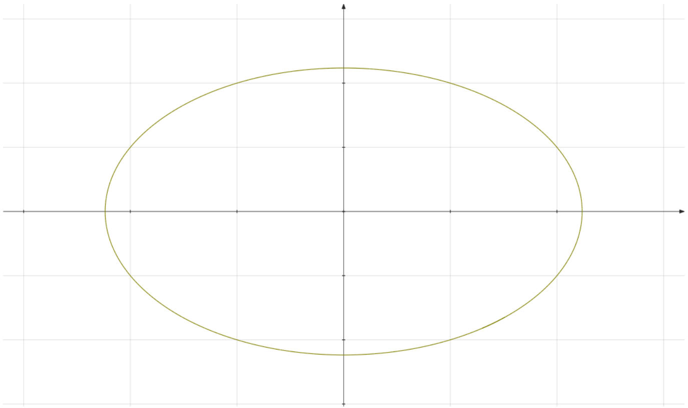
$$y = f(x)$$

Courbes définies implicitement



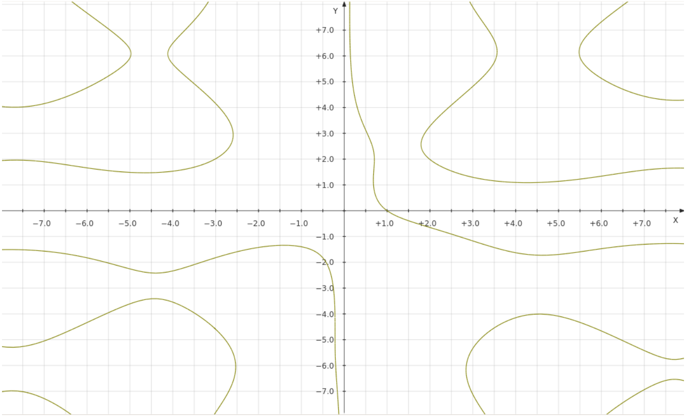
$$x^2 + y^2 = 1$$

Courbes définies implicitement



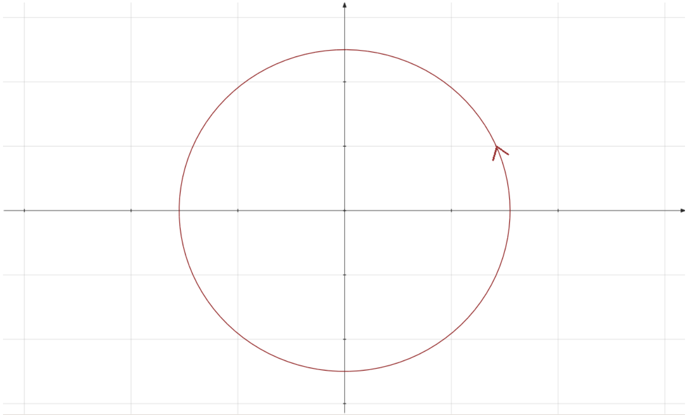
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Courbes définies implicitement



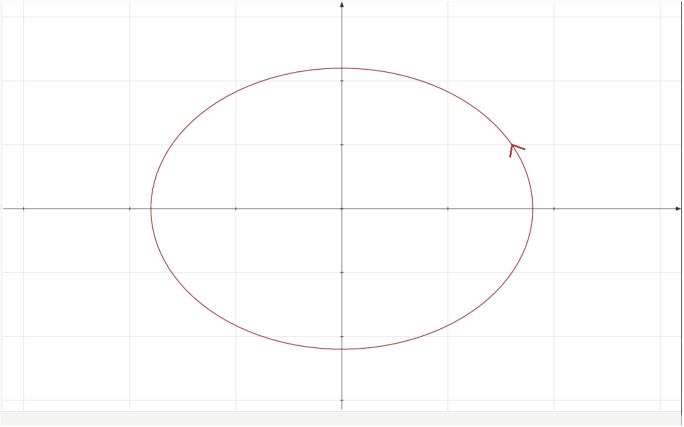
$$y \sin x + x \cos y = 1$$

Courbes paramétrées



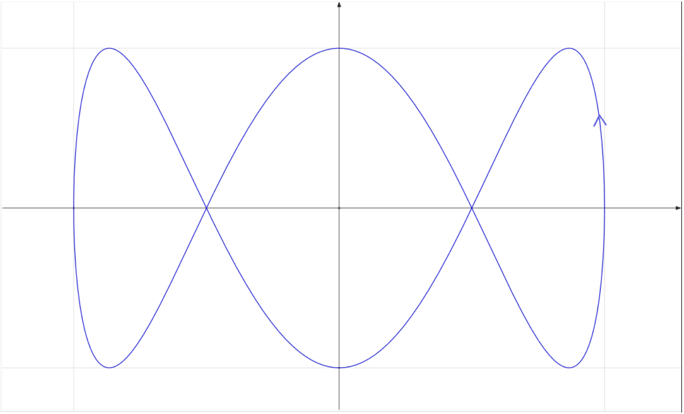
$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$$

Courbes paramétrées



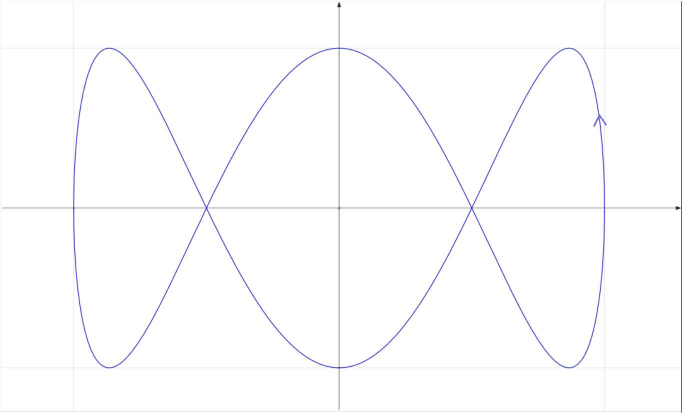
$$x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t$$

Courbes paramétrées



$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin 3t$$

Courbes paramétrées



$$x(t) = \cos t, y(t) = \sin 3t$$

Courbes paramétrées

Définition.– Une COURBE PARAMÉTRÉE est une application

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

Le SUPPORT de la courbe paramétrée est le lieu des points

$$C^+ = \{\, \gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \;\big|\; t \in I \subset \mathbb{R} \,\},$$

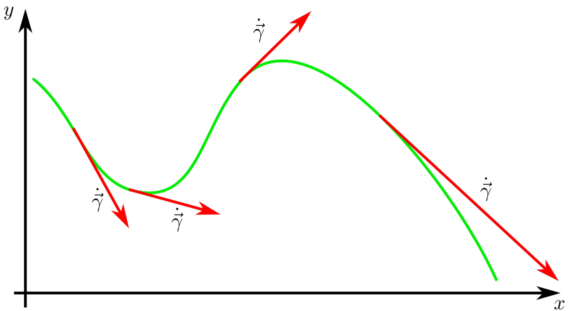
Une courbe paramétrée est naturellement ORIENTÉE par le sens croissant du paramètre t.

On dit que la courbe γ est FERMÉE quand $I = [t_0, t_1]$ et $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.

Courbes paramétrées

- On appelle VECTEUR VITESSE la dérivée première de γ :

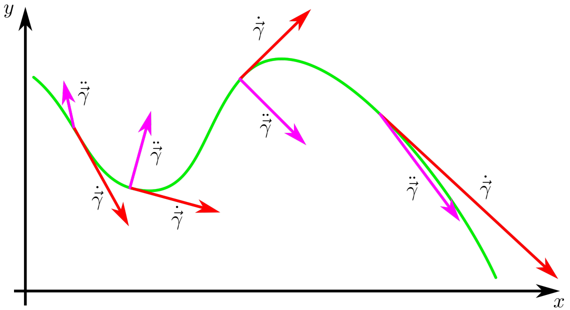
$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\big)$$



Courbes paramétrées

• On appelle VECTEUR ACCÉLÉRATION la dérivée seconde de *gamma* :

$$\vec{\ddot{\gamma}}(t) = \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) = \left(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)\right)$$



Courbes paramétrées

Définition.– Une courbe paramétrée $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite RÉGULIÈRE si pour tout $t \in I$,

$$\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| \neq 0$$

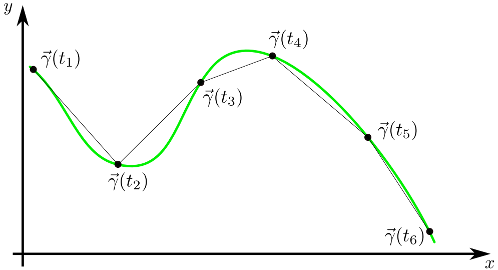
autrement dit, si son vecteur vitesse ne s'annule jamais. La droite passant par $\gamma(t)$ et de vecteur directeur $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ est appelée la DROITE TANGENTE en t à γ.

Courbes paramétrées

Définition.– La LONGUEUR $L(\gamma)$ d'une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ est l'intégrale

$$\boxed{L(\overrightarrow{\gamma}) = \int_a^b \|\dot{\overrightarrow{\gamma}}(t)\| \, dt}$$

Justification : Considérons une approximation de la courbe γ par une ligne brisée :



Courbes paramétrées

Justification (suite) :

Cette approximation peut s'obtenir en subdivisant l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles de longueur $\triangle t = \frac{b-a}{N}$:
$t_0 = a,\ t_1 = a + \triangle t,\ t_2 = a + 2 \cdot \triangle t, \dots,\ t_N = b$

La longueur du j-ème segment étant $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$, la longueur totale de la ligne brisée est donc

$$\sum_{j=1}^{N} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$$

On utilise la formule de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + o(\|h\|)$$

pour approximer

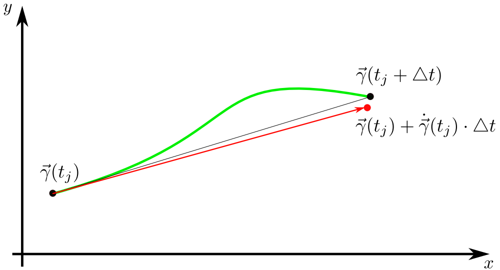
$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h.$$

Courbes paramétrées

Justification (suite) :

Ici

$$\gamma(t_{j+1}) = \gamma(t_j + \triangle t) \approx \gamma(t_j) + \dot{\vec{\gamma}}(t_j) \cdot \triangle t$$



Donc

$$\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \approx \|\dot{\vec{\gamma}}(t_{j-1})\| \cdot \triangle t \ .$$

Courbes paramétrées

Justification (suite) :

La longueur totale de la courbe s'approxime alors par

$$L(\gamma) \approx \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|}_{\approx \|\dot{\vec{\gamma}}(t_{j-1})\| \cdot \triangle t}$$

$$\approx \sum_{j=1}^{N} \|\dot{\vec{\gamma}}(t_{j-1})\| \cdot \triangle t \quad \xrightarrow[N\to\infty]{} \quad \int_a^b \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| \, dt$$

Courbes paramétrées

- On appelle ÉLÉMENT DE LIGNE le « vecteur »

$$\boxed{\overrightarrow{d\ell} = \dot{\vec{\gamma}}(t)\, dt}$$

- On appelle ABSCISSE CURVILIGNE ou PARAMÈTRE DE LA LONGUEUR D'ARC l'intégrale

$$\boxed{s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| dt}$$

- On appelle ÉLÉMENT D'ARC la différentielle

$$\boxed{ds = \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\|\, dt}$$

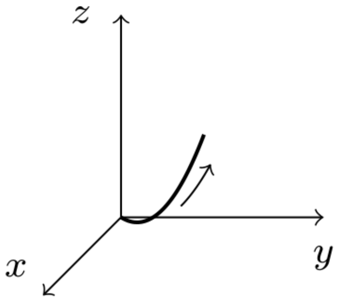
l'intégrale

$$\boxed{L_{t_0}^{t_1}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\|\, dt = \int_{s(t_0)}^{s(t_1)} ds}$$

donne la **longueur** de la courbe paramétrée.

Exemples

Exemple 1. Soit $\gamma(t) = (t, t, t^2)$ avec $t \in [0, 1]$.



Notons que $x(t) = y(t) = t$ et que $z(t) = x^2(t) = y^2(t)$. Le support de la courbe est donc une portion de parabole contenu dans le plan $\{x = y\}$

Exemples

- Puisque $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, on a $\dot{\vec{\gamma}}(t) = (1, 1, 2t)$ d'où

$$\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| = \sqrt{2 + 4t^2} \neq 0.$$

Ainsi γ est régulière.

- L'élément de ligne vaut

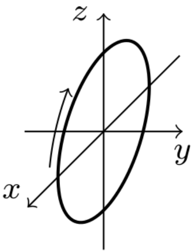
$$\overrightarrow{d\ell} = (1, 1, 2t)\, dt = dt\, \vec{i} + dt\, \vec{j} + 2t\, dt\, \vec{k}$$

- L'élément d'arc vaut

$$ds = \sqrt{2 + 4t^2}dt$$

Exemples

Exemple 2. Soit $\gamma(t) = (3\cos t, 0, 2\sin t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$.



On a $x(t)/3 = \cos t$, $y(t) = 0$ et $z(t)/2 = \sin t$ ainsi le support de la courbe est l'ellipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

contenue dans le plan $\{y = 0\}$.

Exemples

- Puisque $\gamma(t) = (3\cos t, 0, 2\sin t)$, on a

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = (-3\sin t, 0, 2\cos t)$$

d'où

$$\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t} \neq 0$$

Ainsi γ est régulière.

- L'élément de ligne vaut

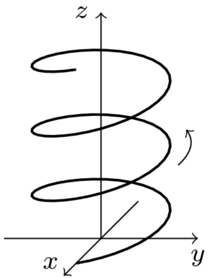
$$\overrightarrow{d\ell} = (-3\sin t, 0, 2\cos t)\ dt = -3\sin t\ dt\ \vec{i} + 2\cos t\ dt\ \vec{k}$$

- L'élément d'arc vaut

$$ds = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}dt$$

Exemples

Exemple 3. Soit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ avec $t \in [0, 6\pi]$.



On a $x^2(t) + y^2(t) = 1$, le support de la courbe est contenue dans un cylindre de base un cercle unité. La hauteur $z(t)$ est le paramètre angulaire. Le support de la courbe est donc une hélice.

Exemples

- Puisque $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, on a

$$\|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

ainsi la courbe γ est régulière

- L'élément de ligne vaut

$$\overrightarrow{d\ell} = (-\sin t, \cos t, 1)\ dt = -\sin t\ dt\ \vec{i} + \cos t\ dt\ \vec{j} + dt\ \vec{k}$$

- La longueur entre 0 et 2π vaut

$$L_0^{2\pi}(\vec{\gamma}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\ dt = 2\sqrt{2}\pi$$

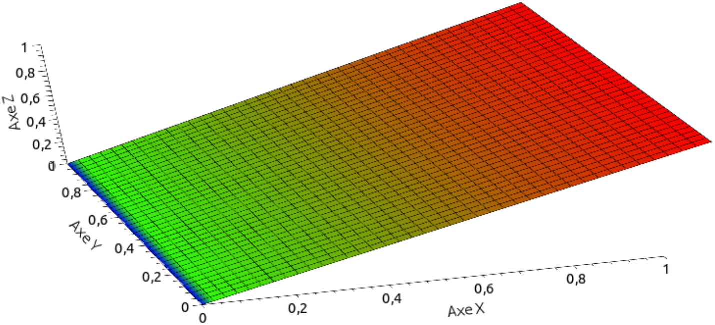
Surfaces paramétrées

Il existe plusieurs façons mathématiques de décrire formellement la notion de « surface ». En voilà trois :

- au moyen des **graphes** de fonctions deux variables
- au moyen d'équations implicites : on parle alors de **surfaces définies implicitement**
- au moyen de deux paramètres, souvent notés u et v : on parle alors de **surfaces paramétrées**

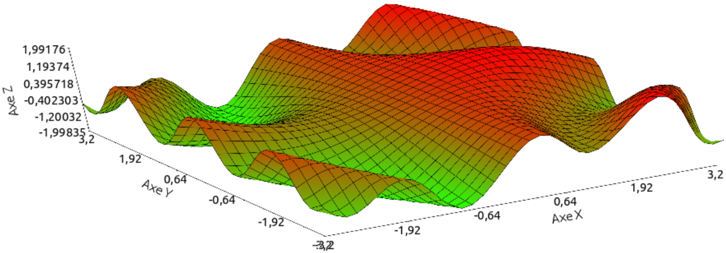
Dans ce chapitre, on donne la préférence aux surfaces paramétrées.

Graphes



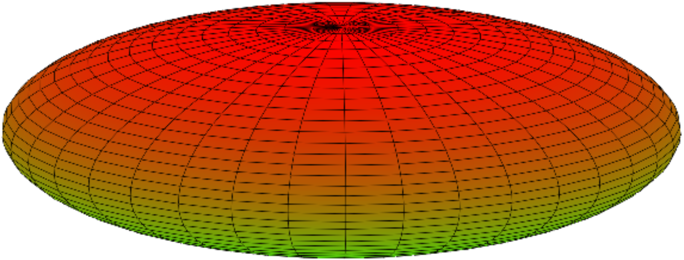
Un plan ; $z = f(x, y) = x$

Graphes



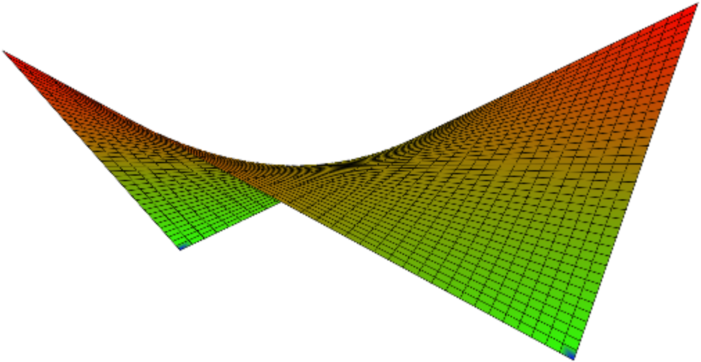
$$z = f(x, y)$$

Surfaces définies implicitement



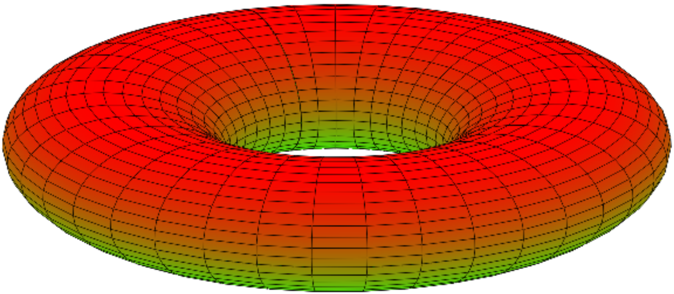
Un ellipsoïde ; $F(x, y, z) = 0$ avec $F(x, y, z) = 2z^2 + x^2 + y^2 - 1$

Surfaces définies implicitement



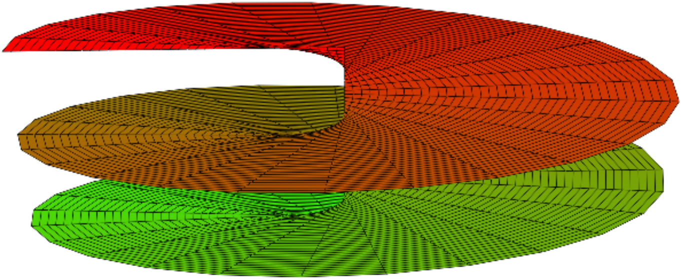
Un paraboloïde hyperbolique ; $F(x, y, z) = 0$ avec
$F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

Surfaces paramétrées



Un tore ; $x(u,v) = \cos u\ (2+\cos v)$, $y(u,v) = \sin u\ (2+\cos v)$, $z(u,v) = \sin v$

Surfaces paramétrées



Un hélicoïde ; $x(u,v) = u\cos v$, $y(u,v) = u\sin v$, $z(u,v) = u$

Surfaces paramétrées

Définition.– Une SURFACE PARAMÉTRÉE est une fonction vectorielle

$$\begin{array}{rccc} f: & U \times V & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$$

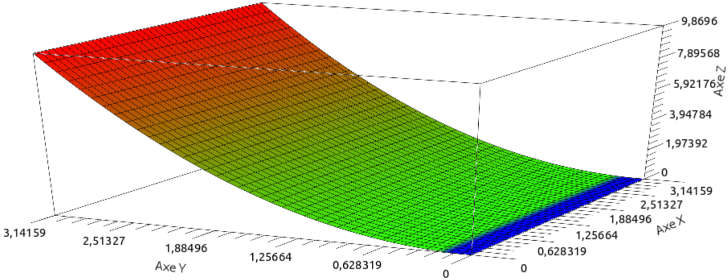
Le SUPPORT de la surface paramétrée est le lieu des points

$$S = \left\{ f(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \;\middle|\; (u,v) \in U \times V \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exemple

Exemple 1.– Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,v,v^2) \end{array}$$



Le support S est un cylindre d'axe (Oy) et de base une portion de parabole.

Surfaces paramétrées régulières

Définition.– On dit qu'une surface paramétrée

$$\begin{array}{rccc} f: & U \times V & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$$

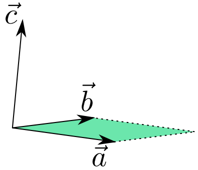
est RÉGULIÈRE en un point $(u,v) \in U \times V$ si les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

sont linéairement indépendantes. Le plan passant par $f(u,v)$ et de base $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)$ est dit PLAN TANGENT en (u,v) à la surface paramétrée.

Rappel sur le produit vectoriel

Le *produit vectoriel* $\vec{a} \wedge \vec{b}$ de deux vecteurs $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ et $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ de $\mathbb{R}^3$ est le vecteur $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ donné par



$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, le vecteur $\vec{c}$ est caractérisé par trois propriétés :

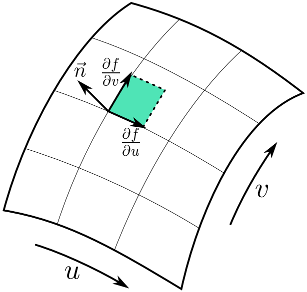
- le vecteur $\vec{c}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
- si $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ forment une base alors elle est directe ;
- la norme de $\vec{c}$ est égale à l'aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Vecteur normal

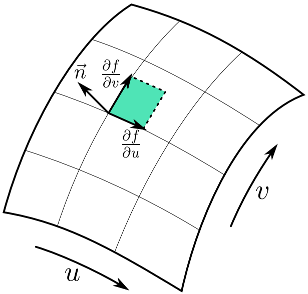
Propriété.– *Soit f une surface paramétrée régulière. Le vecteur*

$$\vec{\nu}(u,v) := \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

est un vecteur non nul orthogonal au plan tangent en (u,v) de la surface paramétrée f.



Vecteur normal



Les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ engendrent l'espace tangent à la surface au point $f(u, v)$.

L'aire du parallélogramme défini par ces deux vecteurs est égale à la norme du vecteur $\vec{\nu} = \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}$.

Vecteur normal

Propriété.– *Un point* $(u, v) \in U \times V$ *est régulier si et seulement si*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \neq 0$$

Propriété.– *Soit* f *une surface paramétrée régulière. Le vecteur*

$$\vec{n}(u, v) := \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$$

est un vecteur non nul normal au plan tangent en (u, v) *de la surface paramétrée* f*.*

Vecteur normal

Exemple 1 (suite).– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,v^2) \end{array}$$

On a $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (1,0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (0,1,2v)$ ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent la surface est régulière en tout point de $[0,1]\times[0,1]$ et un vecteur non nul normal à la surface est donné par

$$\overrightarrow{n}(u,v) = (2v, 0, -1)$$

Orientation

Définition.– Soit f une surface paramétrée régulière, le choix d'un champ de vecteurs normaux unitaires

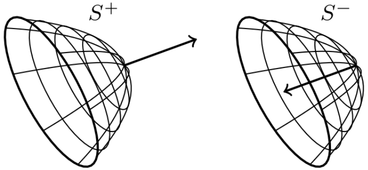
$$\vec{n} : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

s'appelle une ORIENTATION de f.

- Il n'y a que deux choix possibles

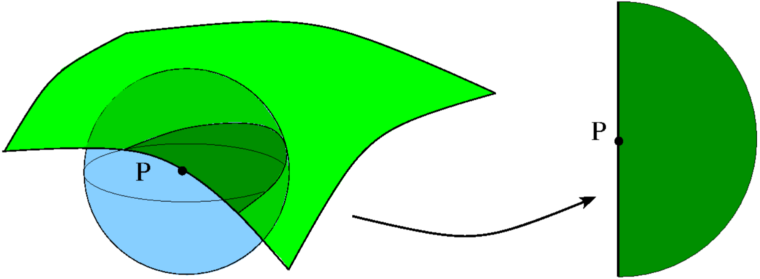
$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{\left|\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\right|} \quad \text{ou} \quad \vec{n} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{\left|\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\right|}$$

- Un choix ayant été effectué, on note S^+ la surface orientée par ce choix et S^- par le choix opposé.



Bord d'un support

• On suppose que f est régulière sur $U \times V$ et injective sur l'intérieur de $U \times V$.

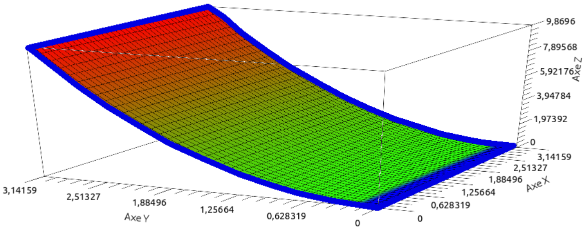


Définition.– Un point $P \in S$ est dit POINT DU BORD si pour toute boule ouverte suffisamment petite $B \subset \mathbb{R}^3$ centrée en P, l'intersection $S \cap B$ « ressemble » au demi-disque fermé $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, x^2 + y^2 < 1\}$. L'ensemble des points du bord de S est noté ∂S.

Bord d'un support

Exemple 1 (suite).– Soit

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,v^2) \end{array}$$

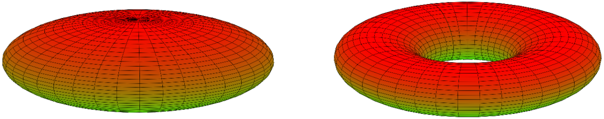


La surface S n'est pas fermée. Son bord est l'union de quatre courbes :

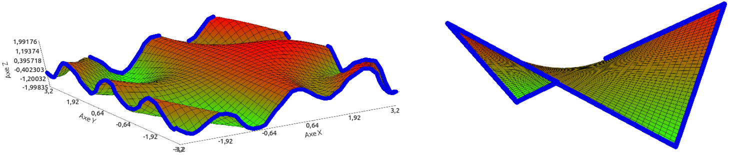
$$\partial S = \left\{ \begin{array}{l} z = x^2 \\ y = 0 \\ x \in [0,1] \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 1 \\ y \in [0,1] \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} z = x^2 \\ y = 1 \\ x \in [0,1] \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y \in [0,1] \end{array} \right.$$

Surfaces fermées

Définition.– Une surface paramétrée régulière sur $U \times V$ et injective sur l'intérieur de $U \times V$ est dite FERMÉE si $\partial S = \emptyset$.



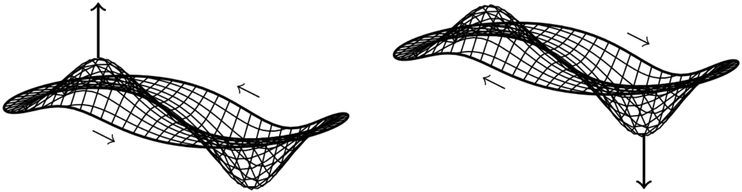
Surfaces fermées



Surfaces à bord non vide

Orientation du bord

Remarque.– Un orientation de la surface induit une orientation de son bord : un promeneur parcourt le bord ∂S dans le sens positif si la surface S se trouve dans la direction de son bras gauche tandis que la pointe du vecteur normal est à la hauteur de sa tête.

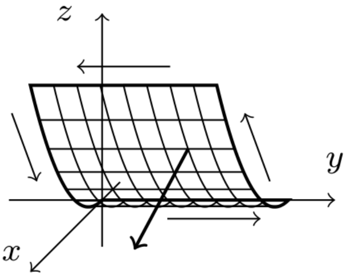


L'orientation de ∂S selon celle de S

Orientation du bord

Exemple 1 (suite).– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,v^2) \end{array}$$

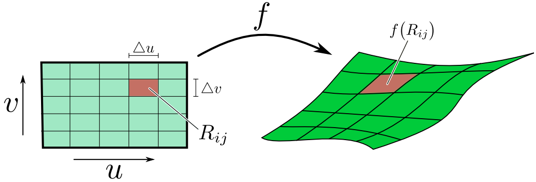


L'orientation de S induit l'orientation du bord ∂S décrite dans la figure ci-dessus.

Aire d'une surface paramétrée

Objectif : Calculer l'aire d'une surface paramétrée.

Stratégie : Subdiviser la surface en petits morceaux qui peuvent être approximés par des parallélogrammes.



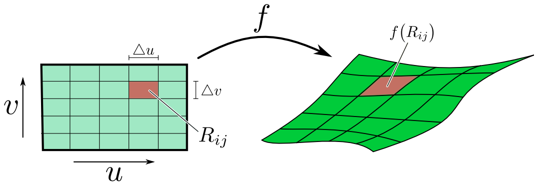
On sait déterminer l'aire d'un parallélogramme en calculant la norme d'un produit vectoriel.

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} U \times V & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$$

une surface paramétrée avec $U \times V = [a,b] \times [c,d]$.

On subdivise le domaine $[a,b] \times [c,d]$ de façon uniforme en $N \times N$ sous-rectangles R_{ij} de taille $\triangle u \times \triangle v$.



Il suffit de calculer l'aire de l'image de chaque R_{ij} et faire leur somme :

$$\mathrm{Aire}\,(f) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Aire}\,\big(f(R_{ij})\big) \ .$$

Aire d'une surface paramétrée

Les rectangles R_{ij} avec $1 \leqslant i \leqslant N$ et $1 \leqslant j \leqslant N$ sont de la forme

$$R_{ij} = [u_i, u_i + \triangle u] \times [v_j, v_j + \triangle v]$$

où

$$\triangle u = \frac{b-a}{N} \ , \quad \triangle v = \frac{d-c}{N}$$

et

$$u_i = a + (i-1)\,\triangle u \ , \quad v_j = c + (j-1)\,\triangle v \ .$$

La formule de Taylor pour f nous permet d'écrire la fonction f près de (u_i, v_j) comme

$$\begin{aligned} f(u,v) = f(u_i, v_j) &+ (u-u_i)\,\frac{\partial f}{\partial u}(u_i, v_j) \\ &+ (v-v_j)\,\frac{\partial f}{\partial v}(u_i, v_j) + o\big(\|(u-u_i, v-v_j)\|^2\big) \ . \end{aligned}$$

Aire d'une surface paramétrée

La formule de Taylor montre que si $\triangle u$ et $\triangle v$ sont suffisamment petits, l'image $f(R_{ij})$ s'approxime par un parallélogramme qui se trouve dans le plan tangent à la surface et dont un des sommets est le point $f(u_i, v_j)$.

Les arêtes du parallélogramme sont les deux vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_i, v_j) \cdot (u_{i+1} - u_i) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_i, v_j) \cdot \triangle u$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u_i, v_j) \cdot (v_{j+1} - v_j) = \frac{\partial f}{\partial v}(u_i, v_j) \cdot \triangle v \ .$$

Aire d'une surface paramétrée

L'aire du parallélogramme est alors

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_i, v_j) \cdot \triangle u \, \triangle v \right\| = \|\vec{\nu}\| \cdot \triangle u \, \triangle v$$

et donc

$$\mathrm{Aire}\,(f) \approx \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left\|\vec{\nu}(u_i, v_j)\right\| \cdot \triangle u \, \triangle v \ .$$

La considération de la limite $N \to \infty$ transforme cette somme en intégrale :

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left\|\vec{\nu}(u_i, v_j)\right\| \cdot \triangle u \, \triangle v$$

$$\xrightarrow{N \to \infty} \iint_{U \times V} \left\|\vec{\nu}(u, v)\right\| du \, dv = \mathrm{Aire}\,(f) \ .$$

Aire d'une surface paramétrée

Définition.– Soit $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière. On appelle

- L'ÉLÉMENT DE SURFACE, le « vecteur »

$$\boxed{\overrightarrow{dS} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right) \; du\, dv}$$

- L'ÉLÉMENT D'AIRE, l'intégrande

$$\boxed{dA = \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\| dudv}$$

- L'AIRE DE LA SURFACE, le réel

$$\boxed{Aire(f) = \iint_{[u_0,u_1]\times[v_0,v_1]} dA}$$

Aire d'une surface paramétrée

Exemple 1 (suite).– Soit

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (u,v,v^2) \end{array}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\overrightarrow{dS} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} dudv$$

et

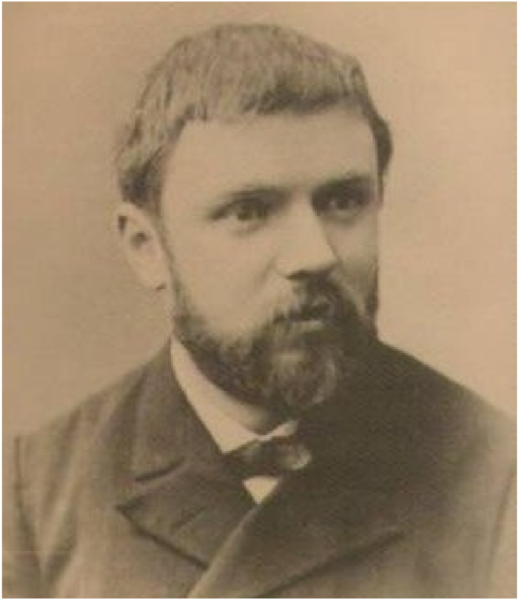
$$dA = \sqrt{1+4v^2}\,dudv$$

Aire d'une surface paramétrée

Ainsi

$$\begin{aligned} Aire(f) &= \iint_{[0,1]\times[0,1]} \sqrt{1+4v^2}dudv \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+4v^2}dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^2 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Henri Poincaré (1854-1912)



Henri Poincaré (1854-1912)

- Mathématicien, physicien théoricien et philosophe des sciences. Ne pas le confondre avec son cousin, Raymond Poincaré, président de la république de 1913 à 1920.

Henri Poincaré (1854-1912)

• Mathématicien, physicien théoricien et philosophe des sciences. Ne pas le confondre avec son cousin, Raymond Poincaré, président de la république de 1913 à 1920.

• Un des derniers grands savants universels maîtrisant l'ensemble des branches des mathématiques de son époque et certaines branches de la physique.

Henri Poincaré (1854-1912)

• Mathématicien, physicien théoricien et philosophe des sciences. Ne pas le confondre avec son cousin, Raymond Poincaré, président de la république de 1913 à 1920.

• Un des derniers grands savants universels maîtrisant l'ensemble des branches des mathématiques de son époque et certaines branches de la physique.

• Ses travaux sur le problème des trois corps le conduisent à fonder la (fameuse) théorie du chaos.

Le prix d'un roi

Le roi Oscar II de Suède et de Norvège

Gösta Mittag-Leffler

• En 1885, Mittag-Leffler convainc le roi Oscar II de financer un prix qui célèbrerait son soixantième anniversaire.

Gösta Mittag-Leffler

- En 1885, Mittag-Leffler convainc le roi Oscar II de financer un prix qui célèbrerait son soixantième anniversaire.

- Les candidats doivent déposer un mémoire sur une des quatre questions scientifiques proposées au concours.

Gösta Mittag-Leffler

- Poincaré dépose un mémoire intitulé *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.*

Gösta Mittag-Leffler

• Poincaré dépose un mémoire intitulé *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.*

• Le jury lui décerne le prix mais lors de la relecture du mémoire par le jeune mathématicien Lars Phragmen, celui-ci découvre une erreur sérieuse...

Lars Edvard Phragmen

- Poincaré travaille avec acharnement pour contourner cette erreur. Ceci le conduit à modifier substantiellement son mémoire et à découvrir les prémices de la théorie du chaos.

Lars Edvard Phragmen

• Poincaré travaille avec acharnement pour contourner cette erreur. Ceci le conduit à modifier substantiellement son mémoire et à découvrir les prémices de la théorie du chaos.

• Il doit rembourser l'impression de la première version de son mémoire : cela lui coûte plus cher que ce que le prix lui avait rapporté.

L'harmonie et le chaos

L'harmonie et le chaos

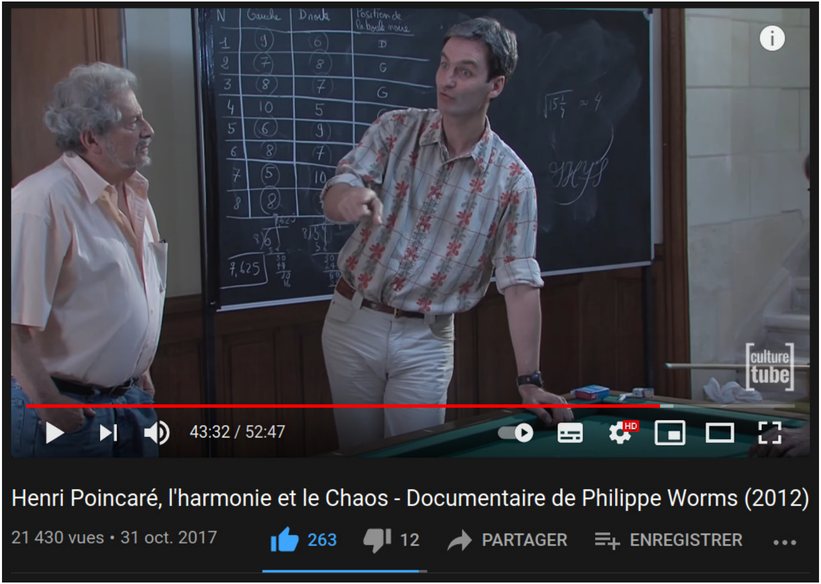
L'harmonie et le chaos

Alberto Verjovski Sola

L'harmonie et le chaos

Alberto Verjovski Sola, Nicolas Bergeron, Cédric Villani

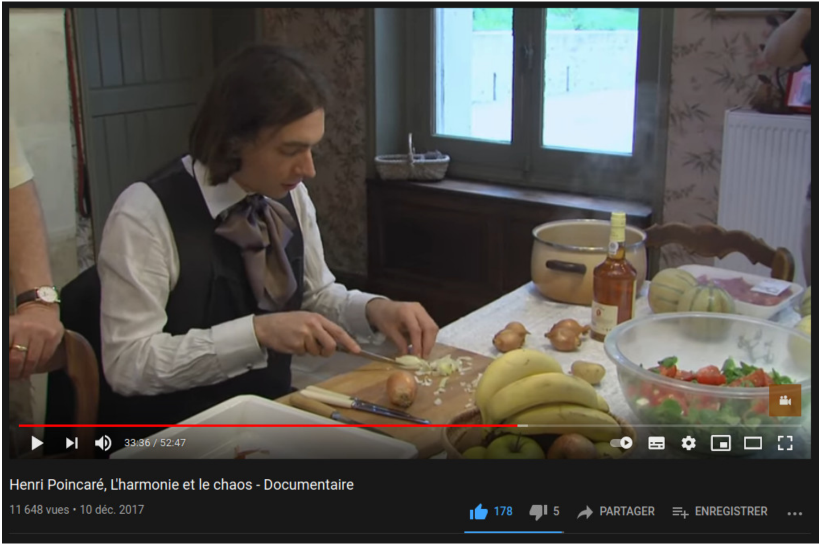
L'harmonie et le chaos



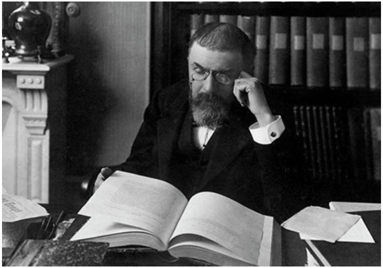
L'harmonie et le chaos

Tadashi Tokieda

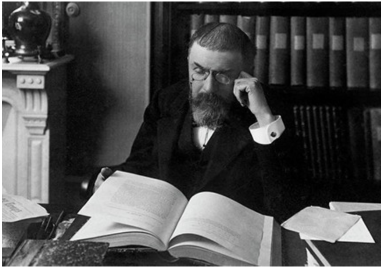
L'harmonie et le chaos



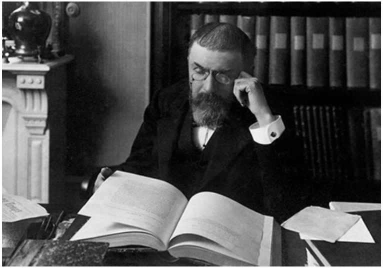
Un député faisant la cuisine



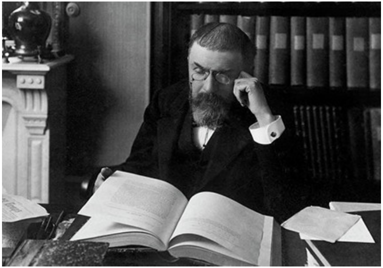
- Henri Poincaré est également un des précurseurs de la Relativité Restreinte



- Henri Poincaré est également un des précurseurs de la Relativité Restreinte
- Il est aussi le fondateur de la topologie algébrique.



- Henri Poincaré est également un des précurseurs de la Relativité Restreinte
- Il est aussi le fondateur de la topologie algébrique.
- De fait, il domine toutes les mathématiques de son époque avec David Hilbert.



• Henri Poincaré est également un des précurseurs de la Relativité Restreinte

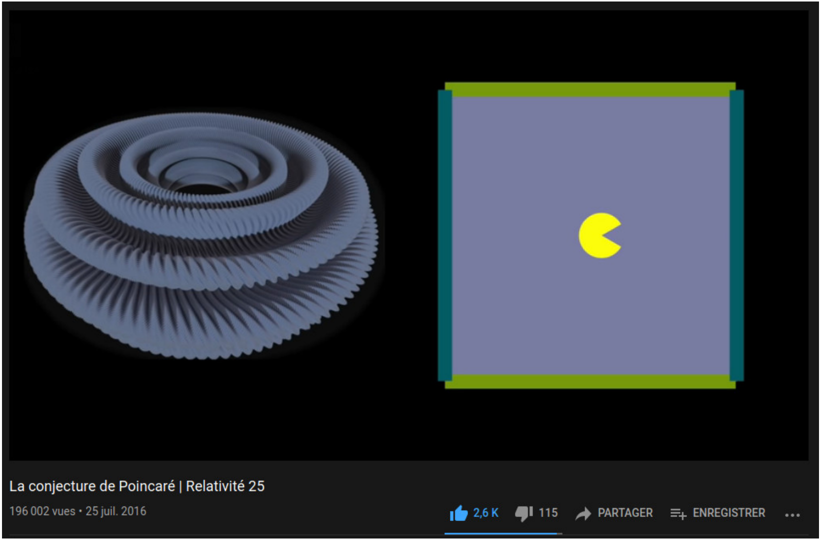
• Il est aussi le fondateur de la topologie algébrique.

• De fait, il domine toutes les mathématiques de son époque avec David Hilbert.

• Il est l'auteur d'une conjecture célèbre, la *conjecture de Poincaré*, qui a été résolue en 2003 par Grigori Perelman.

Henri Poincaré par S4A

Henri Poincaré par S4A



Henri Poincaré par S4A

Henri Poincaré par El Jj

Henri Poincaré par El Jj

Henri Poincaré par Damien Gayet

Damien Gayet à l'Agora des Savoirs : "Henri Poincaré, je doute donc je construis"

Henri Poincaré par Etienne Ghys

Henri Poincaré par Etienne Ghys

Une citation célèbre

Marie Curie et Henri Poincaré au congrès Solvay de 1911

« La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes »