

# CM 8 - Variations autour de la formule de Stokes

Théorème de  
Green-  
Riemann

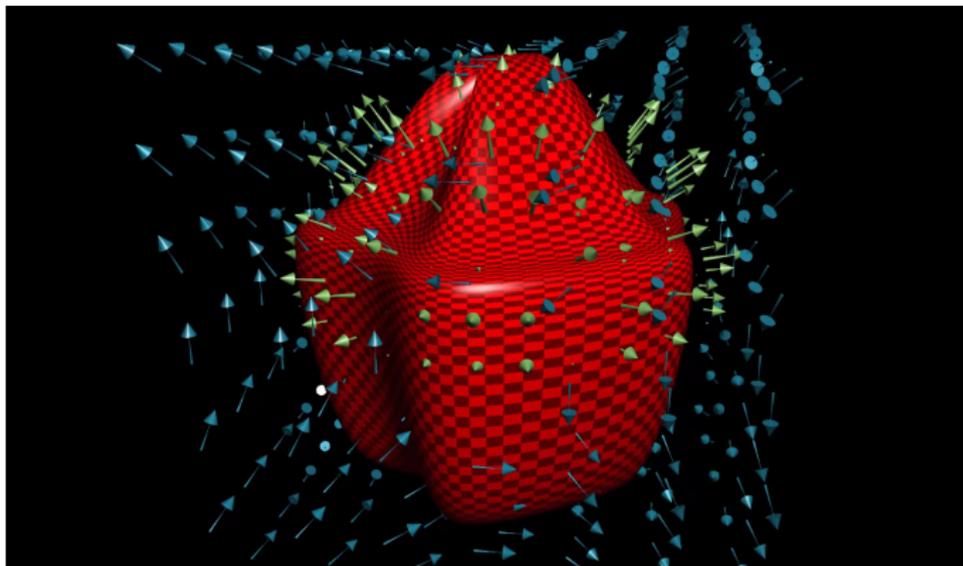
Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

La pause  
culture

Fin du CM

Vincent Borrelli

Université de Lyon



## Théorème de Green-Riemann

- Si  $S \subset (Oxy)$  est une surface plane  $\vec{V} = \text{rot } \vec{U}$  un champ rotationnel avec

$$\vec{U}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$$

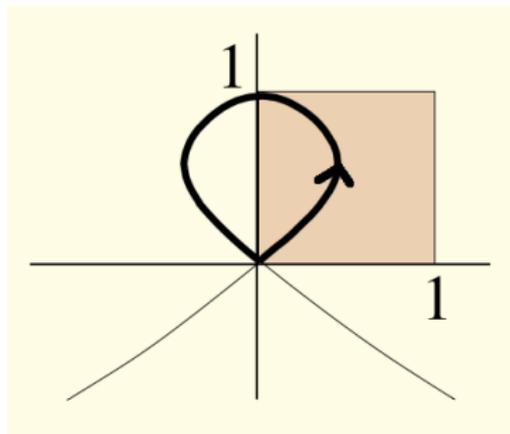
alors  $\vec{V}$  est orthogonal à  $S$  et on a

$$\vec{V} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

**Théorème de Green-Riemann.**— On a alors

$$\iint_{S^+} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial S^+} (P dx + Q dy)$$

## Exemple



**Exemple.**– Calcul de l'aire enclose par la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) = (t^3 - t, 1 - t^2) \end{aligned}$$

## Exemple

- Si on choisit  $P(x, y) = 0$  et  $Q(x, y) = x$  dans la formule de Green-Riemann on constate que

$$\iint_{S^+} 1 \, dx \, dy = \oint_{\partial S^+} x \, dy$$

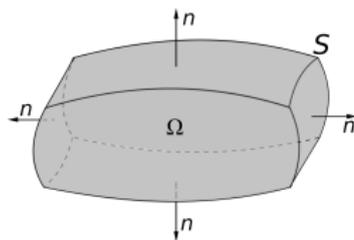
- Or  $\text{Aire}(S) = \iint_{S^+} dx \, dy$  donc

$$\text{Aire}(S) = \int_{-1}^1 x(t)y'(t)dt$$

- On a  $x(t)y'(t) = (t^3 - t)(1 - t^2) = 2t^2 - 2t^4$  et

$$\text{Aire}(S) = \left[ \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 \right]_{-1}^1 = \frac{8}{15}$$

## Théorème de Gauss-Ostrogradski



**Théorème de Gauss-Ostrogradski.**— Soient  $\vec{V}$  un champ de vecteurs,  $S$  une surface fermée,  $\Omega$  l'espace borné délimitée par  $S$  (en particulier  $\partial\Omega = S$ ) alors :

$$\oiint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz .$$

Dans cette égalité, l'orientation choisie pour  $S^+$  est celle de la normale sortante.

## Exemple

**Exemple.**— Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs à divergence constante  $\operatorname{div} \vec{V} = a$  et  $S$  une surface fermée englobant un volume  $\mathcal{V}$ . Alors le flux de  $\vec{V}$  à travers de  $S^+$  vaut

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz \\ &= a \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz \\ &= a \operatorname{Vol}(\Omega) \\ &= a\mathcal{V}\end{aligned}$$

## Exercice

**Énoncé.**— Calculer le flux du champ de vecteurs  $\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$  à travers de la surface fermée constituée du cône tronqué

$$S_1^+ = \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z \in [0, 3] \end{cases}$$

et du disque

$$S_2^+ = \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ z = 3 \end{cases}$$

et orientée par les vecteurs normaux sortants.

**Réponse.**— Soit

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 3\}$$

on a  $\partial\Omega = S$

## Exercice

- Puisque  $S$  est fermée, on peut appliquer le théorème de Gauss-Ostrogradsky

$$\oiint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz$$

avec ici  $\operatorname{div} \vec{V} = 2(x + y + z)$ .

- Pour déterminer l'intégrale triple, on passe en coordonnées cylindriques. On a

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

et

$$\begin{aligned} dx \, dy \, dz &= |\det J_h(\rho, \varphi, z)| d\rho d\varphi dz \\ &= \rho \, d\rho d\varphi dz \end{aligned}$$

## Exercice

• Ainsi

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) \, dx \, dy \, dz \\ &= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z \left( \rho^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) + \rho z \right) d\rho \\ &= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} \rho^3 (\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2} \rho^2 z \right]_{\rho=0}^{\rho=z} d\varphi \\ &= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{3} z^3 (\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2} z^3 \right) d\varphi \\ &= 2 \int_0^3 dz \left[ \frac{1}{3} z^3 (\sin \varphi - \cos \varphi) + \frac{1}{2} z^3 \varphi \right]_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2 \int_0^3 \frac{1}{2} z^3 \, 2\pi \, dz \\ &= 2\pi \frac{1}{4} 3^4 = \frac{81\pi}{2}\end{aligned}$$

CM 8 -  
Variations  
autour de la  
formule de  
Stokes

Théorème de  
Green-  
Riemann

Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

La pause  
culture

Fin du CM

# James Clerk Maxwell (1831-1879)



CM 8 -  
Variations  
autour de la  
formule de  
Stokes

Théorème de  
Green-  
Riemann

Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

La pause  
culture

Fin du CM



- Physicien écossais célèbre pour ses équations qui unifient l'électricité, le magnétisme et l'optique.

CM 8 -  
Variations  
autour de la  
formule de  
Stokes

Théorème de  
Green-  
Riemann

Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

La pause  
culture

Fin du CM



- Physicien écossais célèbre pour ses équations qui unifient l'électricité, le magnétisme et l'optique.
- Il s'intéresse également à la nature de la couleur. Il montre en particulier que la lumière blanche s'obtient par combinaison de lumières rouge, verte et bleue.



- Physicien écossais célèbre pour ses équations qui unifient l'électricité, le magnétisme et l'optique.
- Il s'intéresse également à la nature de la couleur. Il montre en particulier que la lumière blanche s'obtient par combinaison de lumières rouge, verte et bleue.
- Ses travaux influencent profondément la physique du XXème siècle notamment la relativité restreinte et la mécanique quantique.

CM 8 -  
Variations  
autour de la  
formule de  
Stokes

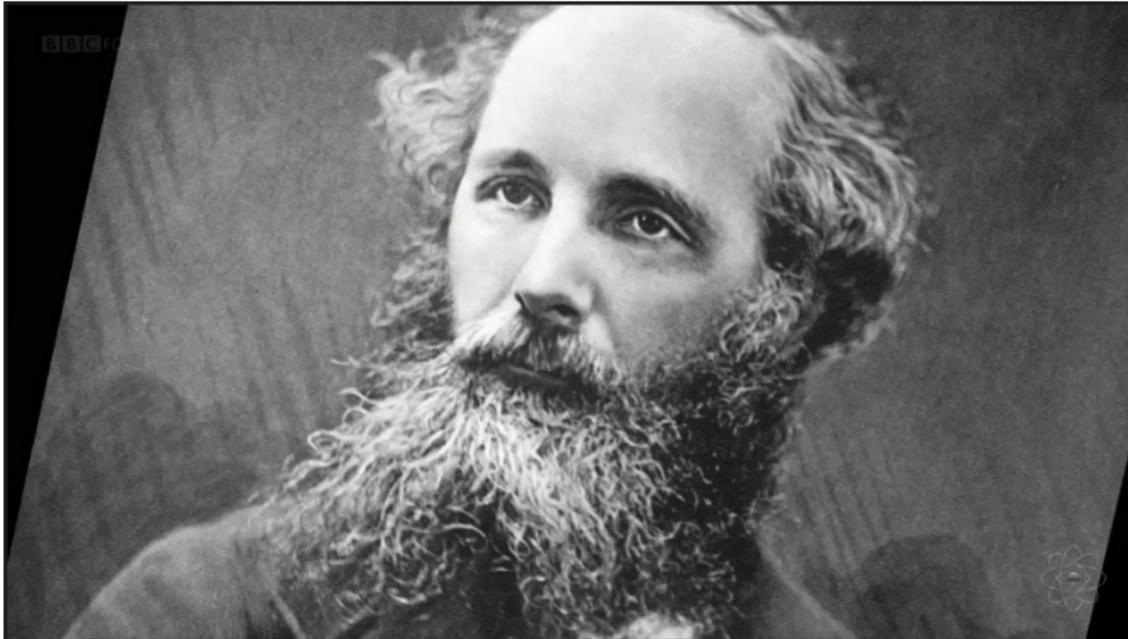
Théorème de  
Green-  
Riemann

Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

La pause  
culture

Fin du CM

# The Man Who Changed the World



Il y a 4 ans | 2.1K vues

**Scotland's Einstein: James Clerk Maxwell -The Man Who  
Changed the World**

CM 8 -  
Variations  
autour de la  
formule de  
Stokes

Théorème de  
Green-  
Riemann

Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

La pause  
culture

Fin du CM

# The History Guy



The History Guy

JAMES CLERK MAXWELL

#history #thehistoryguy #physics  
Father of Modern Physics: James Clerk Maxwell

119 133 vues • 25 mars 2020

9,7 K 61 PARTAGER ENREGISTRER ...

The History Guy: History Deserves to Be Remembered  
949 k abonnés

REJOINDRE S'ABONNER

The video player shows a portrait of James Clerk Maxwell with a play button in the center. The video title is 'Father of Modern Physics: James Clerk Maxwell'. The channel name is 'The History Guy: History Deserves to Be Remembered' with 949k subscribers. The video has 119,133 views and was posted on March 25, 2020. The player interface includes a progress bar at 0:00 / 12:20 and various control icons.

CM 8 -  
Variations  
autour de la  
formule de  
Stokes

Théorème de  
Green-  
Riemann

Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

La pause  
culture

Fin du CM

# James Clerk Maxwell



Découverte de la nature des anneaux de Saturne...

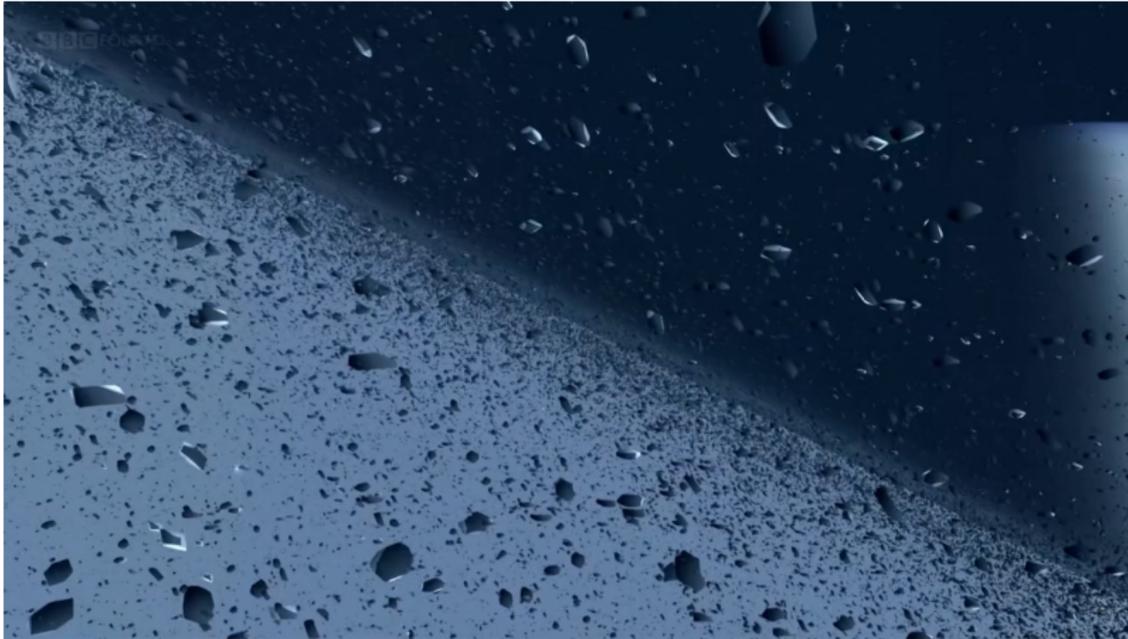
# James Clerk Maxwell

Théorème de  
Green-  
Riemann

Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

La pause  
culture

Fin du CM



... par un pur calcul mathématique !

CM 8 -  
Variations  
autour de la  
formule de  
Stokes

Théorème de  
Green-  
Riemann

Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

La pause  
culture

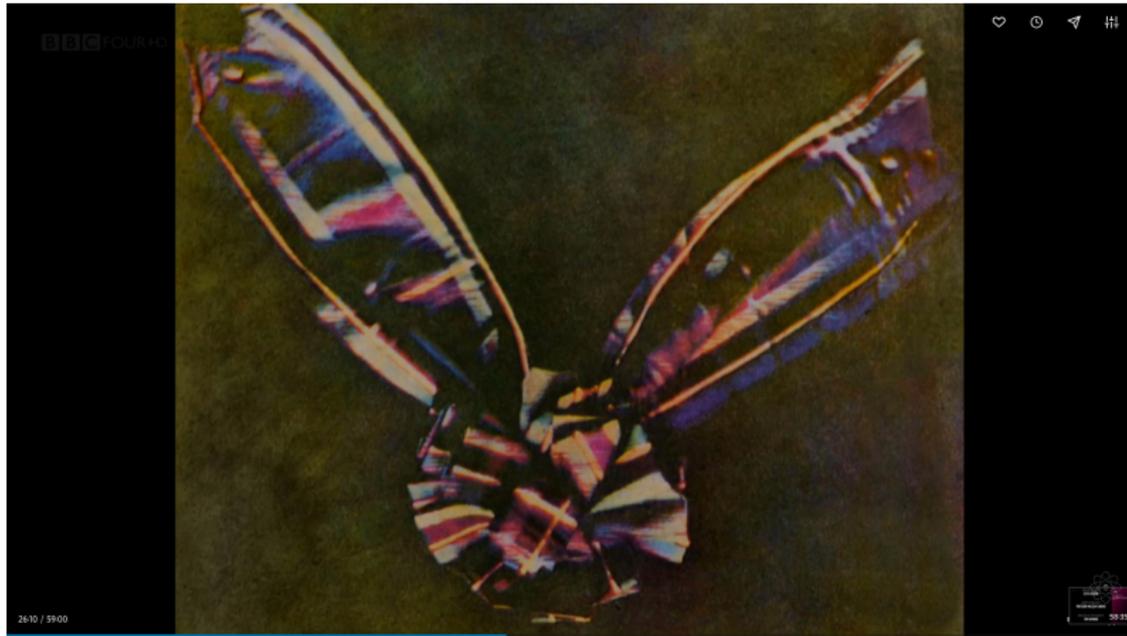
Fin du CM

# James Clerk Maxwell



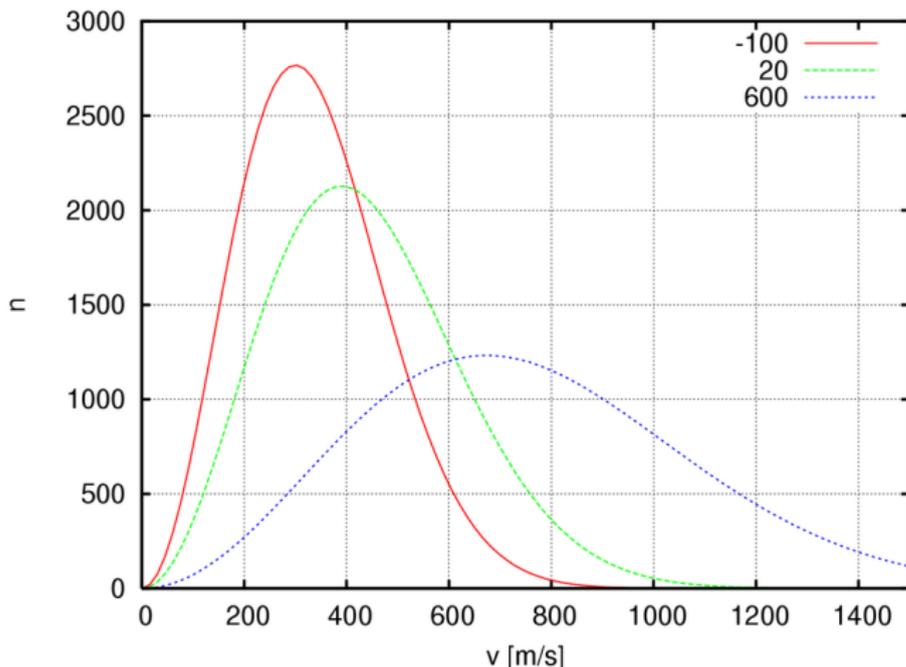
Le disque de Maxwell

# James Clerk Maxwell



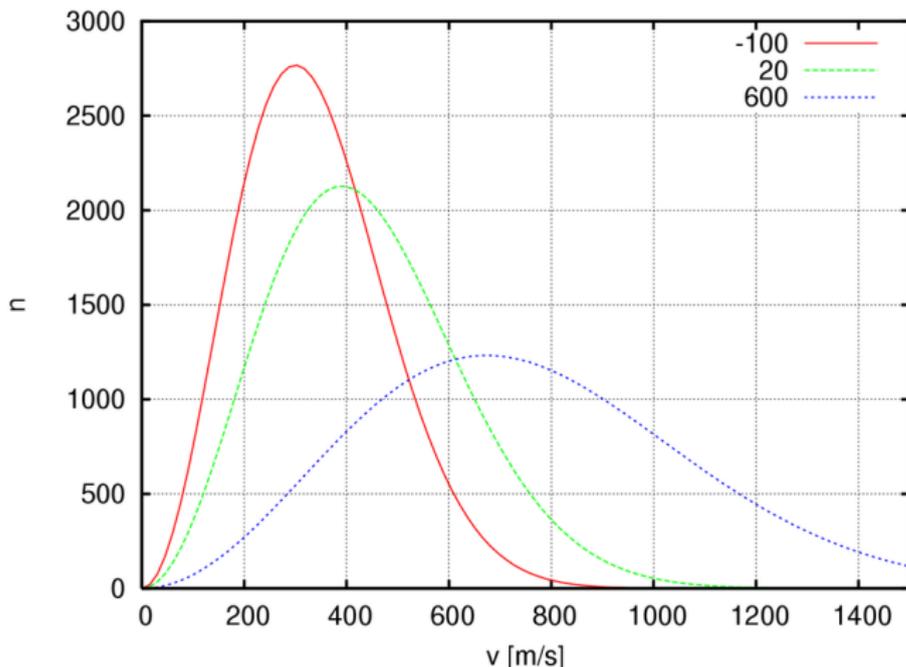
Thomas Sutton et Maxwell : première photo en couleur est une application du disque de Maxwell

# Théorie cinétique des gaz



La *loi de distribution de vitesses de Maxwell* quantifie la répartition statistique des vitesses des particules d'un gaz.

# Théorie cinétique des gaz



La *statistique de Maxwell-Boltzmann* quantifie la répartition statistique de l'énergie des particules d'un gaz.

# Les équations de Maxwell



**James Clerk Maxwell**  
Scottish scientist  
1831-1879

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

CLICK  
NOW

#maxwellequations #speedoflight Electromagnetism

Why is the speed of light what it is? Maxwell equations visualized

1 090 231 vues · Sortie le 25 mars 2020

👍 39 K 🗨️ 683 ➦ PARTAGER ⌵ ENREGISTRER ...



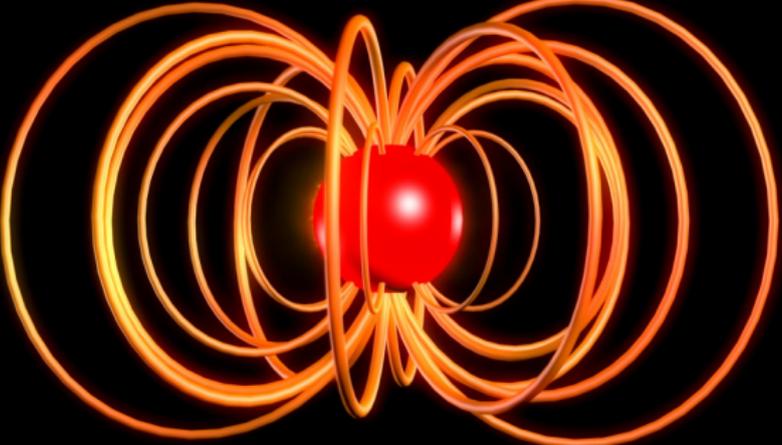
Arvin Ash  
467 k abonnés

REJOINDRE

SABONNER

# Les équations de Maxwell

**Magnets always have two poles**



#maxwellsequations #speedoflight #electromagnetism  
Why is the speed of light what it is? Maxwell equations visualized

1 090 258 vues • Sortie le 25 mars 2020

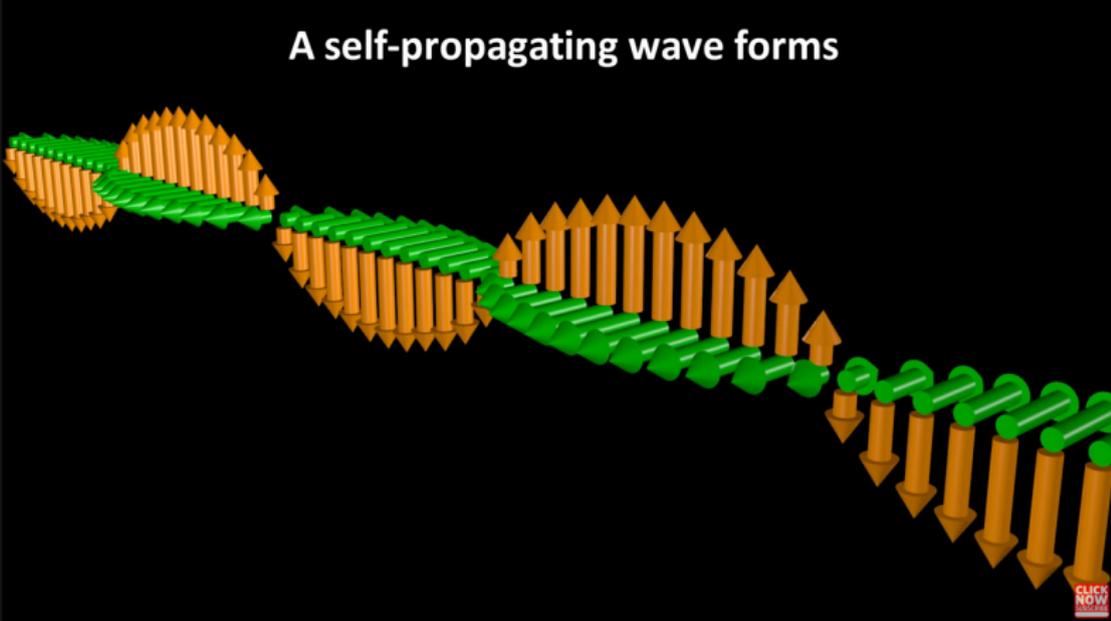
39 K 683 PARTAGER ENREGISTRER ...

Arvin Ash  
457 k abonnés

REJOINDRE SABONNER

# L'onde lumineuse

**A self-propagating wave forms**



#maxwellsequations #speedoflight #electromagnetism  
Why is the speed of light what it is? Maxwell equations visualized

1 090 258 vues · Sortie le 25 mars 2020

39 K 683 PARTAGER ENREGISTRER ...

Arvin Ash  
467 k abonnés

REJOINDRE SABONNER

# Arvin Ash

**ARVIN ASH**

**299,792 km/sec - Why?**

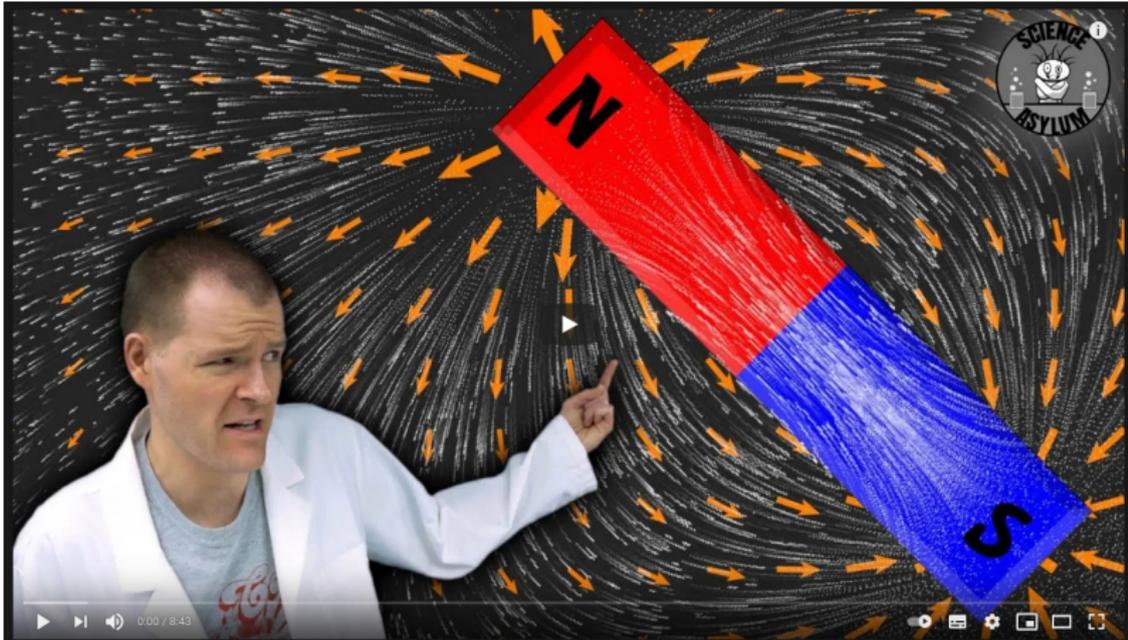
Why is the speed of light what it is? Maxwell equations visualized

1 090 258 vues • Sortie le 25 mars 2020

Arvin Ash  
467 k abonnés

REJOINDRE SABONNER

# The Science Asylum



Maxwell's Equations Visualized (Divergence & Curl)

176 234 vues · 26 août 2019

11 K 122 PARTAGER ENREGISTRER ...

The Science Asylum 325 k abonnés

REJOINDRE ABONNE

CM 8 -  
Variations  
autour de la  
formule de  
Stokes

Théorème de  
Green-  
Riemann

Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

La pause  
culture

Fin du CM

# The Science Asylum



Maxwell's Equations Visualized (Divergence & Curl)

176 233 vues · 26 août 2019

11 K 122 PARTAGER ENREGISTRER ...

The Science Asylum 325 k abonnés

REJOINDRE ABONNÉ

The video content includes several diagrams: a lightning bolt with a red question mark, a red horseshoe magnet with orange field lines and a question mark, a blue lightning bolt between two red wires, a red and blue bar magnet with a yellow and blue ring around it, and a man in a lab coat with a sun and yellow lightning bolts in the background.

CM 8 -  
Variations  
autour de la  
formule de  
Stokes

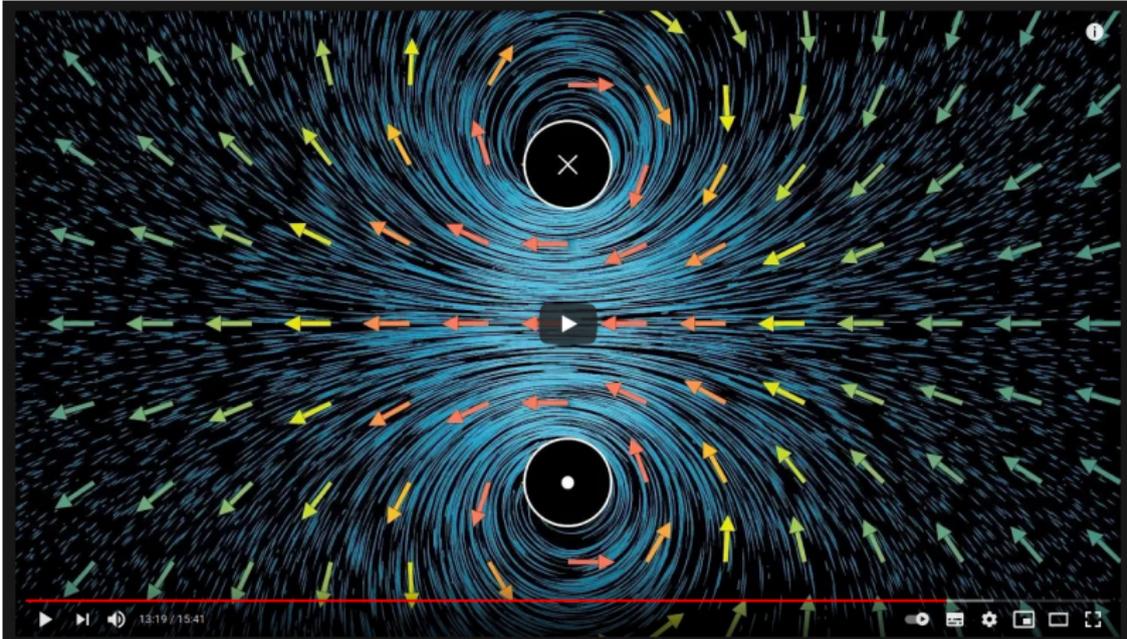
Théorème de  
Green-  
Riemann

Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

La pause  
culture

Fin du CM

# 3Blue1Brown



Divergence and curl: The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more

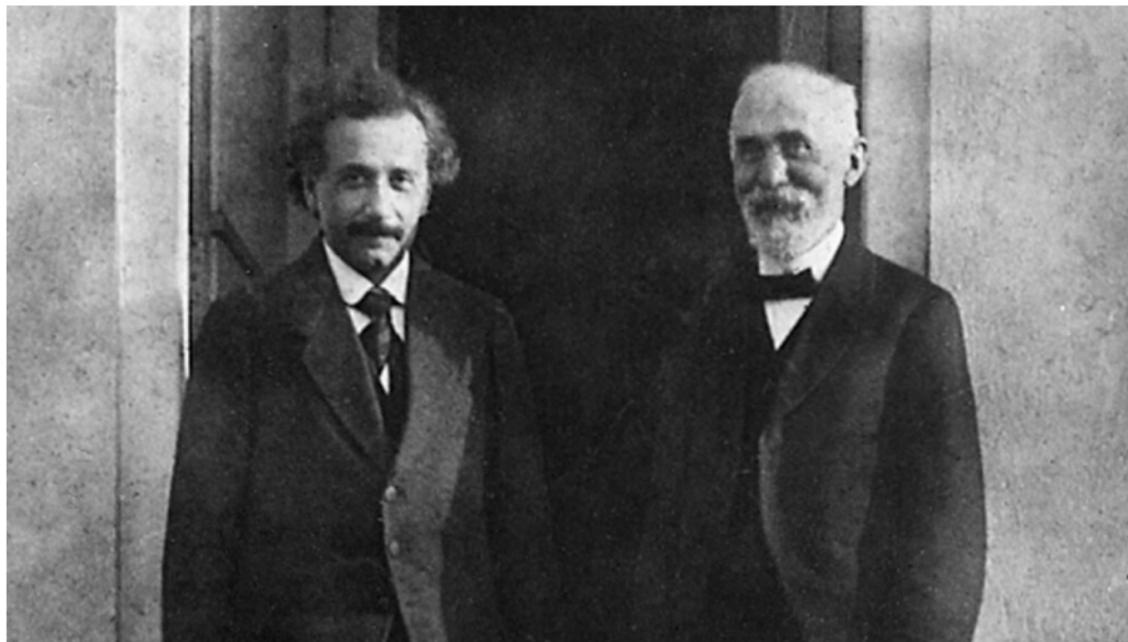
2,102,902 vues • 21 juin 2018

72 K 511 PARTAGER ENREGISTRER ...

3Blue1Brown  
3,63 M d'abonnés

SABONNER

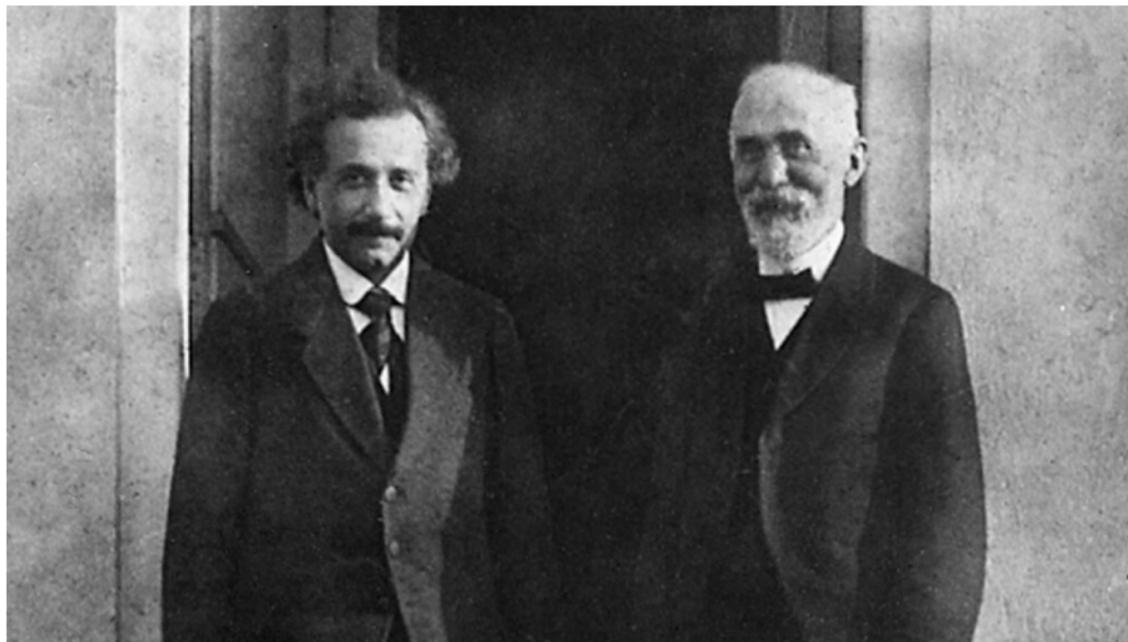
## Aux origines de la RR



Albert Einstein et Hendrik Lorentz

Si l'on change de référentiel, le changement de coordonnées classique ne s'applique pas aux équations de Maxwell, il faut utiliser une autre transformation : la *transformation de Lorentz*.

## Aux origines de la RR



Albert Einstein et Hendrik Lorentz

Einstein a tenté d'appliquer les transformations de Lorentz à la mécanique classique, ce qui l'a conduit à la théorie de la *relativité restreinte*.

CM 8 -  
Variations  
autour de la  
formule de  
Stokes

Théorème de  
Green-  
Riemann

Théorème de  
Gauss-  
Ostrogradski

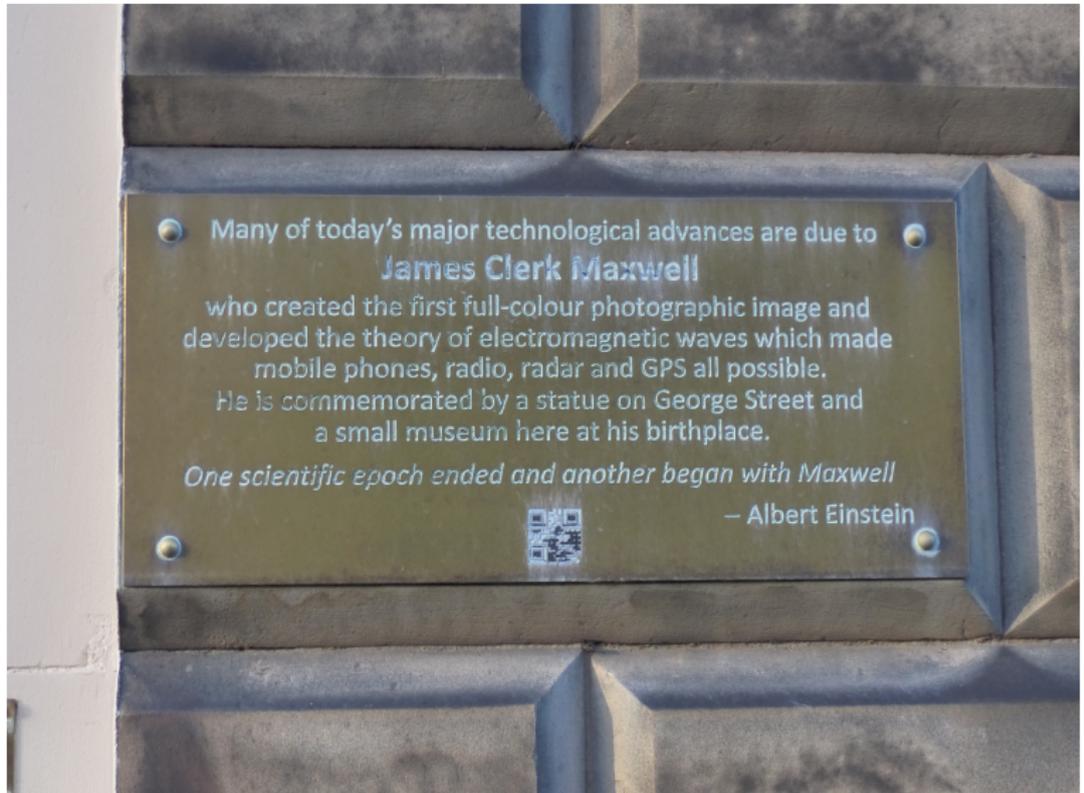
La pause  
culture

Fin du CM

# La maison natale de Maxwell



## La maison natale de Maxwell





Toby, le chien fidèle de James Maxwell

« Depuis des temps immémoriaux, disons depuis dix mille ans, il y a peu de doute que l'évènement le plus marquant sera [...] la découverte (au XIXe siècle) de Maxwell sur les lois de l'électromagnétisme », Richard Feynman »

## Fin CM 12 et du cours : Bravo pour votre ténacité !



« Permettez-moi de vous révéler le secret qui m'a conduit à  
atteindre mon but. Ma force repose uniquement sur ma ténacité »  
Louis Pasteur