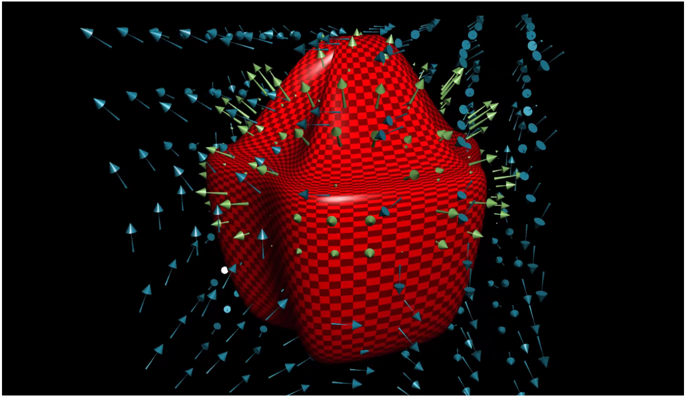
CM 8 - Variations autour de la formule de Stokes

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Théorème de Green-Riemann

• Si $S \subset (Oxy)$ est une surface plane $\overrightarrow{V} = rot\,\overrightarrow{U}$ un champ rotationnel avec

$$\overrightarrow{U}(x,y) = P(x,y)\ \overrightarrow{i} + Q(x,y)\ \overrightarrow{j}$$

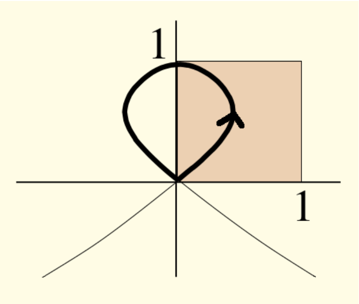
alors $\overrightarrow{V}$ est orthogonal à S et on a

$$\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ \overrightarrow{k}$$

Théorème de Green-Riemann.– On a alors

$$\boxed{\iint_{S^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{\partial S^+} \Big(P\, dx + Q\, dy\Big)}$$

Exemple



Exemple.– Calcul de l'aire enclose par la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x(t),y(t)) = (t^3 - t, 1 - t^2) \end{array}$$

Exemple

• Si on choisit $P(x,y) = 0$ et $Q(x,y) = x$ dans la formule de Grenn-Riemann on constate que

$$\iint_{S^+} 1 \; dx \; dy = \oint_{\partial S^+} x dy$$

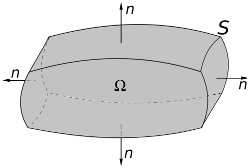
• Or $Aire(S) = \iint_{S^+} \; dx \; dy$ donc

$$Aire(S) = \int_{-1}^{1} x(t) y'(t) dt$$

• On a $x(t)y'(t) = (t^3 - t)(1 - t^2) = 2t^2 - 2t^4$ et

$$Aire(S) = \left[\frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{5} t^5 \right]_{-1}^{1} = \frac{8}{15}$$

Théorème de Gauss-Ostrogradski



Théorème de Gauss-Ostrogradski.– *Soient $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs, S une surface fermée, Ω l'espace borné délimitée par S (en particulier $\partial\Omega = S$) alors :*

$$\boxed{\oiint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{\Omega} div\, \overrightarrow{V}\ dx\ dy\ dz}.$$

Dans cette égalité, l'orientation choisie pour S^+ est celle de la normale sortante.

Exemple

Exemple.– Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs à divergence constante $div\ \overrightarrow{V} = a$ et S une surface fermée englobant un volume $\mathcal{V}$. Alors le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers de S^+ vaut

$$\begin{aligned}
\oiint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} &= \iiint_\Omega div\, \overrightarrow{V}\ dx\ dy\ dz \\
&= a \iiint_\Omega dx\ dy\ dz \\
&= a Vol(\Omega) \\
&= a\mathcal{V}
\end{aligned}$$

Exercice

Énoncé.– Calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\ \overrightarrow{i} + y^2\ \overrightarrow{j} + z^2\ \overrightarrow{k}$ à travers de la surface fermée constituée du cône tronqué

$$S_1^+ = \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z \in [0,3] \end{cases}$$

et du disque

$$S_2^+ = \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ z = 3 \end{cases}$$

et orientée par les vecteurs normaux sortants.

Réponse.– Soit

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 3\right\}$$

on a $\partial\Omega = S$

Exercice

• Puisque S est fermée, on peut appliquer le théorème de Gauss-Ostrogradsky

$$\oiint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_{\Omega} div \overrightarrow{V} \; dx \; dy \; dz$$

avec ici $div \ \overrightarrow{V} = 2(x + y + z)$.

• Pour déterminer l'intégrale triple, on passe en coordonnées cylindriques. On a

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

et

$$\begin{array}{rcl} dx \; dy \; dz & = & |det \; J_h(\rho, \varphi, z)| d\rho d\varphi dz \\ & = & \rho \; d\rho d\varphi dz \end{array}$$

Exercice

- Ainsi

$$\oiint_{S^+} \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS} = 2 \iiint_{\Omega} (x+y+z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z \left(\rho^2(\cos\varphi + \sin\varphi) + \rho z\right) d\rho$$

$$= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}\rho^3(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}\rho^2 z\right]_{\rho=0}^{\rho=z} d\varphi$$

$$= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}z^3(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}z^3\right) d\varphi$$

$$= 2 \int_0^3 dz \left[\frac{1}{3}z^3(\sin\varphi - \cos\varphi) + \frac{1}{2}z^3\varphi\right]_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2 \int_0^3 \frac{1}{2}z^3\, 2\pi\, dz$$

$$= 2\pi \frac{1}{4}3^4 = \frac{81\pi}{2}$$

James Clerk Maxwell (1831-1879)

• Physicien écossais célèbre pour ses équations qui unifient l'électricité, le magnétisme et l'optique.

• Physicien écossais célèbre pour ses équations qui unifient l'électricité, le magnétisme et l'optique.

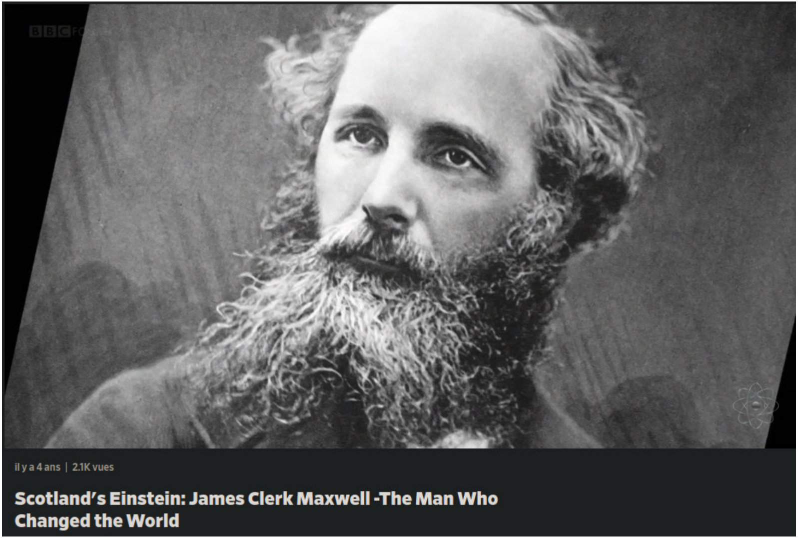
• Il s'intéresse également à la nature de la couleur. Il montre en particulier que la lumière blanche s'obtient par combinaison de lumières rouge, verte et bleue.

• Physicien écossais célèbre pour ses équations qui unifient l'électricité, le magnétisme et l'optique.

• Il s'intéresse également à la nature de la couleur. Il montre en particulier que la lumière blanche s'obtient par combinaison de lumières rouge, verte et bleue.

• Ses travaux influencent profondément la physique du XXème siècle notamment la relativité restreinte et la mécanique quantique.

The Man Who Changed the World

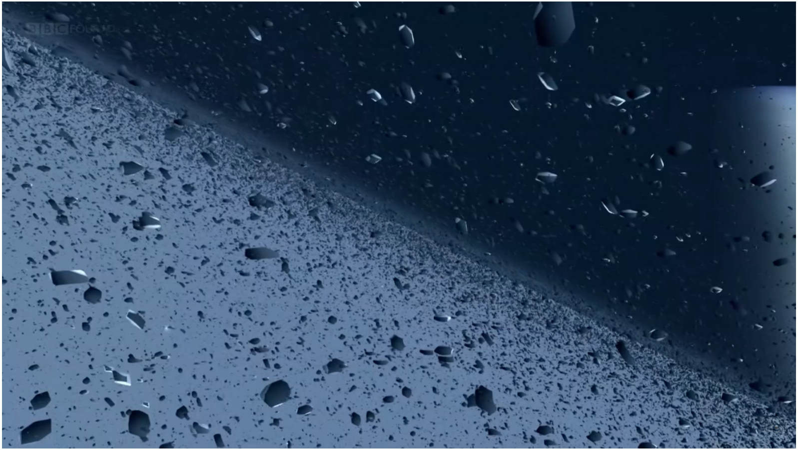


The History Guy

James Clerk Maxwell

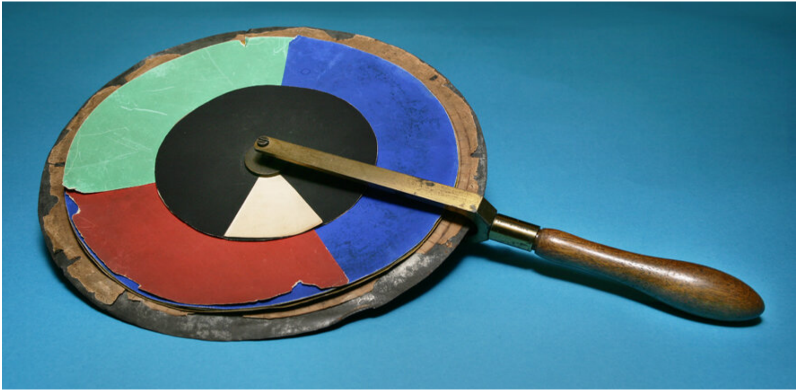
Découverte de la nature des anneaux de Saturne...

James Clerk Maxwell



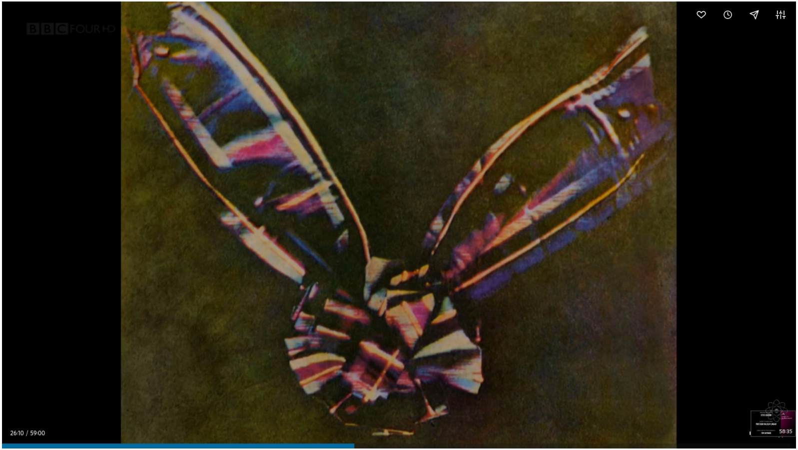
... par un pur calcul mathématique !

James Clerk Maxwell



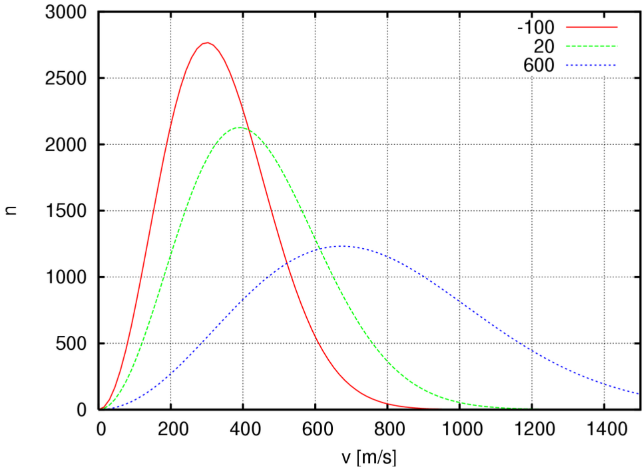
Le disque de Maxwell

James Clerk Maxwell



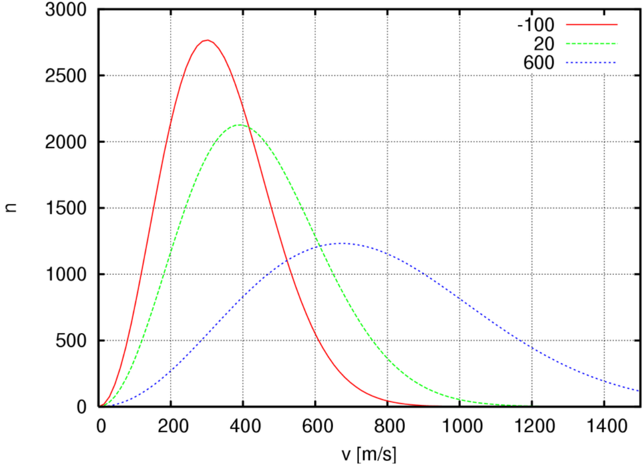
Thomas Sutton et Maxwell : première photo en couleur est une application du disque de Maxwell

Théorie cinétique des gaz



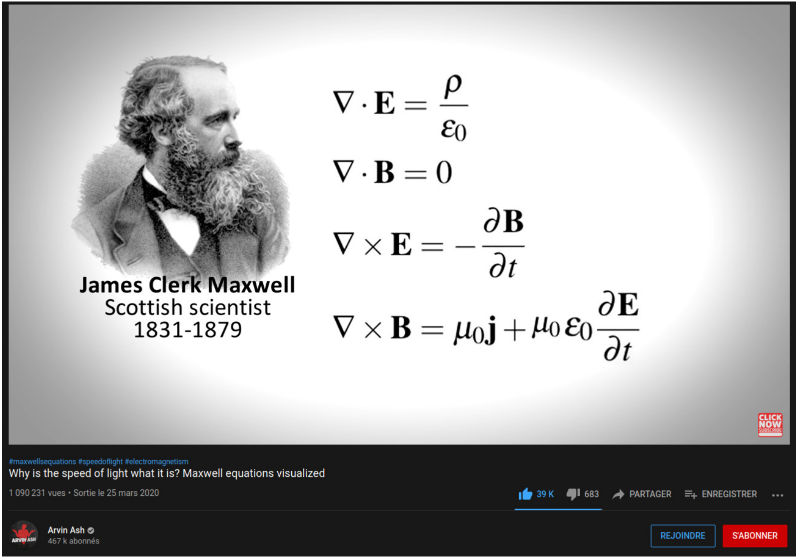
La *loi de distribution de vitesses de Maxwell* quantifie la répartition statistique des vitesses des particules d'un gaz.

Théorie cinétique des gaz



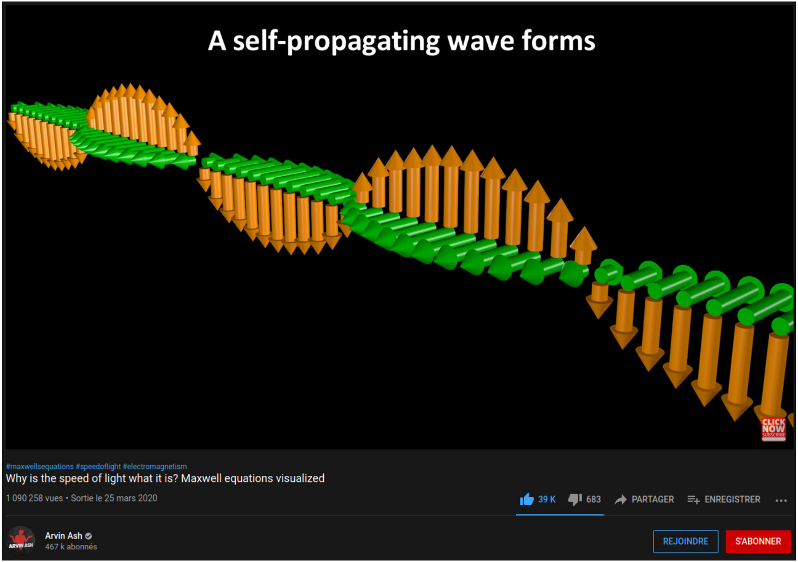
La *statistique de Maxwell-Boltzmann* quantifie la répartition statistique de l'énergie des particules d'un gaz.

Les équations de Maxwell

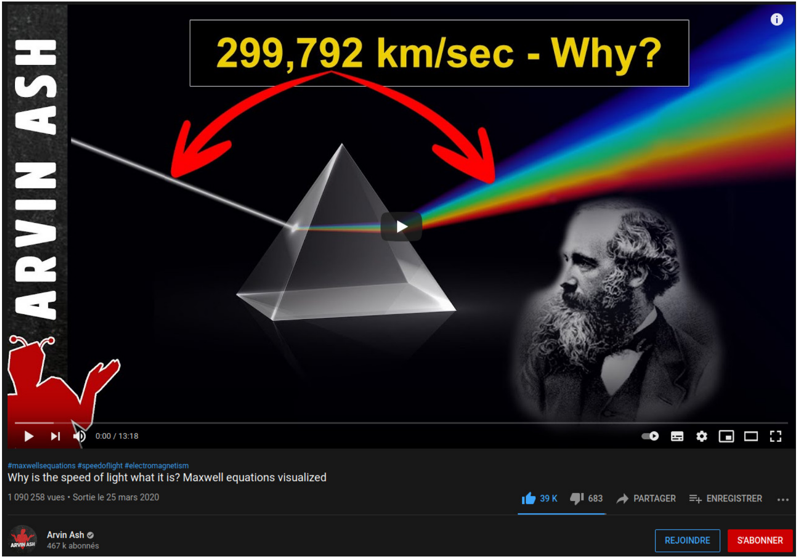


Les équations de Maxwell

L’onde lumineuse



Arvin Ash

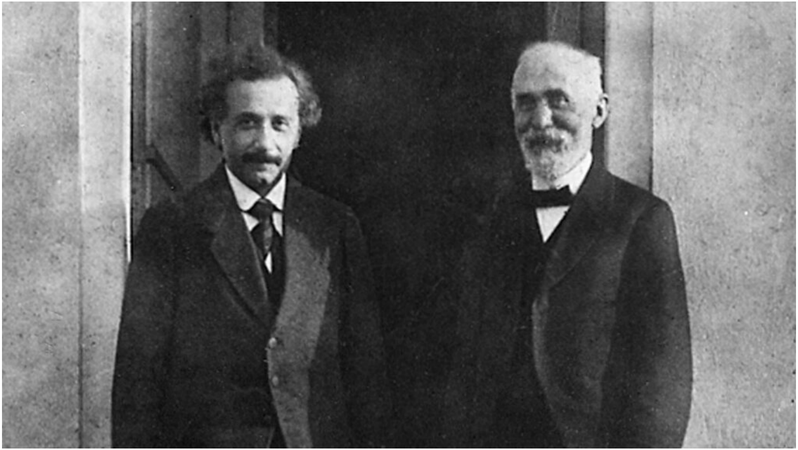

ARVIN ASH
299,792 km/sec - Why?
0:00 / 13:18
#maxwellsequations #speedoflight #electromagnetism
Why is the speed of light what it is? Maxwell equations visualized
1 090 258 vues • Sortie le 25 mars 2020
39 K
683
PARTAGER
ENREGISTRER
Arvin Ash
467 k abonnés
REJOINDRE
S'ABONNER

The Science Asylum

The Science Asylum

3Blue1Brown

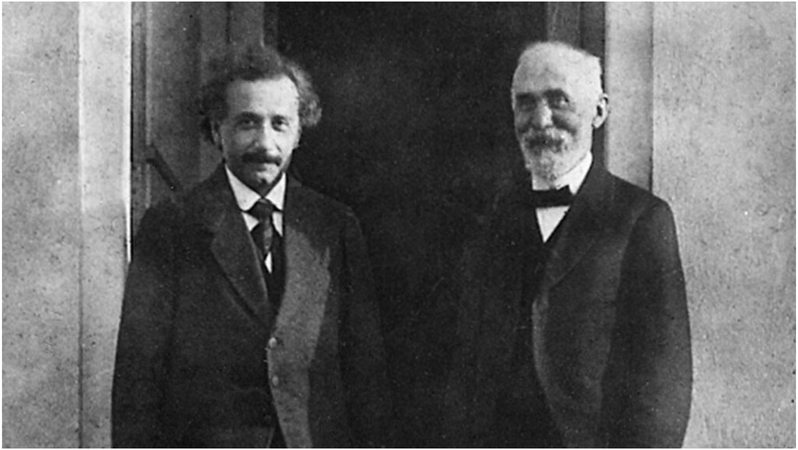
Aux origines de la RR



Albert Einstein et Hendrik Lorentz

Si l’on change de référentiel, le changement de coordonnées classique ne s’applique pas aux équations de Maxwell, il faut utiliser une autre transformation : la *transformation de Lorentz*.

Aux origines de la RR



Albert Einstein et Hendrik Lorentz

Einstein a tenté d'appliquer les transformations de Lorentz à la mécanique classique, ce qui l'a conduit à la théorie de la *relativité restreinte*.

La maison natale de Maxwell

La maison natale de Maxwell

Toby, le chien fidèle de James Maxwell

« Depuis des temps immémoriaux, disons depuis dix mille ans, il y a peu de doute que l'évènement le plus marquant sera [...] la découverte (au XIXe siècle) de Maxwell sur les lois de l'électromagnétisme », Richard Feynman

Fin CM 12 et du cours : Bravo pour votre ténacité !

« Permettez-moi de vous révéler le secret qui m'a conduit à atteindre mon but. Ma force repose uniquement sur ma ténacité »
Louis Pasteur