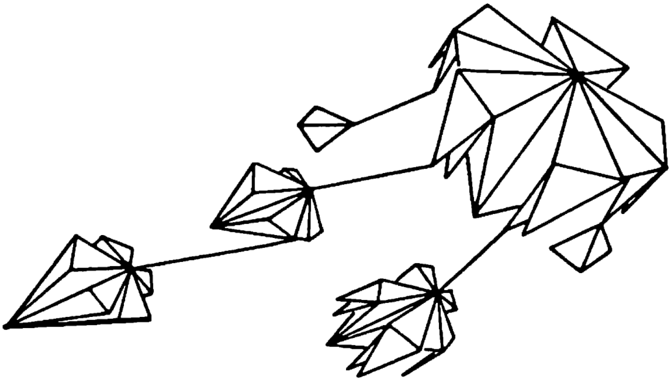
CM-TA1 : Plus d'espaces !

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Un complexe simplicial.

Image extraite du livre *Topology* de Klaus Janich.

Complexes simpliciaux

• On travaille dans $\mathbb{R}^\infty$, c'est-à-dire, dans le plus “petit espace affine de dimension infini” :

$$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{R}^n.$$

Choisir un point $p \in \mathbb{R}^\infty$ c'est choisir un point d'un certain $\mathbb{R}^n$. et donc, de tous les $\mathbb{R}^N$, $N \geq n$, via l'inclusion $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$.

• Pour se fixer les idées, on peut penser $\mathbb{R}^\infty$ comme $\mathbb{R}[X]$, les deux espaces étant affinement isomorphes.

Complexes simpliciaux

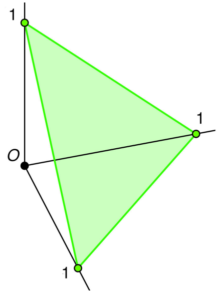
Définition.– Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle simplexe affine de dimension n tout sous-ensemble $\sigma \subset \mathbb{R}^\infty$ tel qu'il existe $(n+1)$-points $\{p_0, ..., p_n\}$ affinement indépendants dont l'enveloppe convexe soit égale à σ :

$$\sigma = Conv(p_0, ..., p_n)$$

• Les points p_i sont appelés les SOMMETS de σ.

• Soit $0 \leq k \leq n$. On appelle FACE DE DIMENSION k de σ, toute enveloppe convexe de n'importe quel sous ensemble de k points de $\{p_0, ..., p_n\}$.

Complexes simpliciaux



Le 2-simplexe standard Δ_2

Exemple de simplexes : le n-SIMPLEXE STANDARD défini par

$$\Delta_n := \{O + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

où $\overrightarrow{\mathbb{R}}^{n+1} = Vect(e_1, ..., e_{n+1})$.

Complexes simpliciaux

Définition.– On appelle COMPLEXE SIMPLICIAL K une collection de simplexes

$$K = \{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

telle que

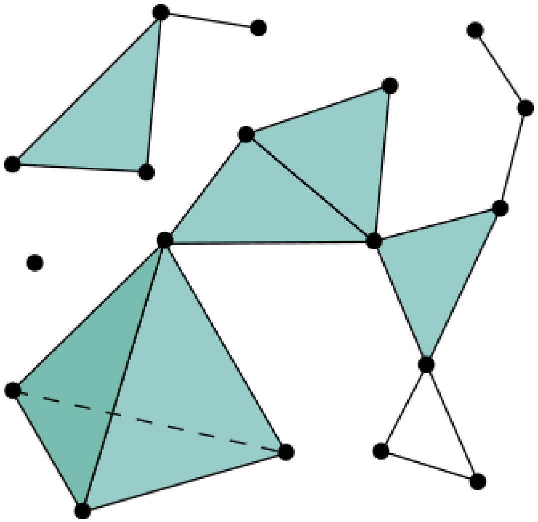
1) $\sigma_\alpha \in K \Longrightarrow$ toutes les faces de σ_α sont dans K

2) $\sigma_\alpha, \sigma_\beta \in K \Longrightarrow \begin{cases} \sigma_\alpha \cap \sigma_\beta = \emptyset \\ \text{ ou} \\ \sigma_\alpha \cap \sigma_\beta = \text{ une face de } \sigma_\alpha \text{ et de } \sigma_\beta. \end{cases}$

La réalisation géométrique de K est le POLYÈDRE $|K|$ de $\mathbb{R}^\infty$ définit par

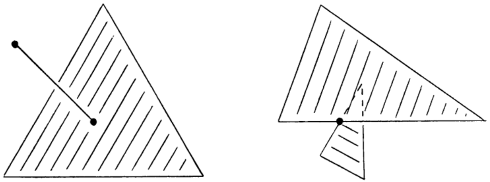
$$|K| = \bigcup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha.$$

Complexes simpliciaux



Un exemple de polyèdre $|K|$ *(Image : Wikipédia)*

Complexes simpliciaux

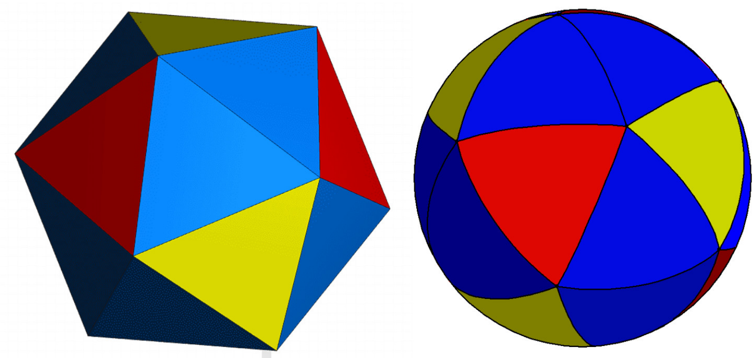


Exemples d'ensembles qui ne sont pas des polyèdres de complexes simpliciaux (Image : Bredon)

Définition.– Si $\sup_{\alpha \in A} \dim \sigma_\alpha = k < +\infty$ on dit que K est un complexe simplicial de dimension k.

- Un complexe simplicial de dimension 0 est espace topologique discret
- Un complexe simplicial de dimension 1 est un graphe

Complexes simpliciaux



Une triangulation de la sphère où $|K|$ est un icosaèdre

Définition.– Une TRIANGULATION d'un espace topologique X est un homéomorphisme entre $|K|$ et X où K est un complexe simplicial de dimension 2.

Espaces quotients

• On considère un espace topologique Y ainsi que relation d'équivalence $\sim$ entre les points de Y. On note

$$p : Y \to Y/\sim$$

la surjection canonique de Y sur son espace quotient.

• Rappelons que l'on définit une topologie sur $Y/\sim$ en décrétant que

$$U \subset Y/\sim \quad \text{est ouvert si } p^{-1}(U) \text{ est ouvert dans } Y.$$

• Pour cette topologie, la surjection canonique p est tautologiquement continue.

Espaces quotients

• L'espace quotient $Y/\sim$ n'est pas nécessairement séparé.

• Un espace topologique est dit SÉPARÉ si tout couple de points distincts admet des voisinages disjoints.

• Le SATURÉ d'un ensemble $F \subset Y$ est l'ensemble $p^{-1}(p(F))$, c'est-à-dire tous les points de Y qui sont en relation par $\sim$ à un point de F.

• La relation d'équivalence $\sim$ est dite FERMÉE si le saturé de toute partie fermée est fermée.

Propriété (rappel).– *Si Y est compact et la relation d'équivalence $\sim$ fermée alors $Y/\sim$ est séparé.*

Espaces quotients

• Dans la propriété ci dessus, la compacité est une hypothèse contraignante. Elle peut être remplacée par une propriété beaucoup plus faible, la compacité locale.

Définition.– Un espace topologique X est dit LOCALEMENT COMPACT s'il est séparé et si tout point x élément de X admet un voisinage compact, autrement dit si x appartient à un ouvert relativement compact (c'est-à-dire d'adhérence compacte).

Exemples.– Sont relativement compacts, tous les compacts, tous les espaces homéomorphes à $\mathbb{R}^n$, toutes les variétés topologiques, tous les espaces discrets.

Propriété bis (rappel).– *Si Y est relativement compact et la relation d'équivalence $\sim$ fermée alors $Y/\sim$ est séparé.*

Espaces quotients

Proposition de transfert de continuité au quotient.– *Soit $f : Y \to Z$ une application continue telle que pour tout $(y_1, y_2) \in Y^2$ on ait*

$$y_1 \sim y_2 \Longrightarrow f(y_1) = f(y_2).$$

Alors l'application $\bar{f} : Y/\sim \to Z$ donnée par $\bar{f}([y]) = f(y)$ est bien définie et continue.

Démonstration.– Le caractère bien défini provient du fait que f est constante sur chaque classe d'équivalence.

• Soit U un ouvert de Z. L'image réciproque $\bar{f}^{-1}(U)$ est un ouvert de $Y/\sim$ si et seulement si $p^{-1}(\bar{f}^{-1}(U))$ est un ouvert de Y.

Espaces quotients

• Or par construction $f = \bar{f} \circ p$ donc

$$p^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) = (\bar{f} \circ p)^{-1}(U) = f^{-1}(U).$$

• Puisque f est continue, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de Y. Ainsi $\bar{f}$ est continue. $\square$

Un exemple fondamental : On considère $Y = [0,1]$ et la relation d'équivalence $\sim$ sur Y définie par

$$y_1 \sim y_2 \iff y_1 = y_2 \text{ ou } (y_1, y_2) = (0,1) \text{ ou } (y_1, y_2) = (1,0).$$

Proposition.– *L'espace quotient $Y/\sim$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.*

Espaces quotients

Démonstration.– Montrons d'abord que la relation d'équivalence $\sim$ est fermée.

• Soit F un fermé de $Y = [0,1]$ alors :

- si F ne contient ni 0 ni 1, alors $p^{-1}(p(F)) = F$ et il est fermé,
- si F contient $\{0,1\}$ alors $p^{-1}(p(F)) = F$ et il est fermé,
- si F contient $\{0\}$ ou (exclusif) $\{1\}$ alors $p^{-1}(p(F)) \neq F$. Néanmoins
  $$p^{-1}(p(F)) = F \cup \{0,1\}$$
  est l'union de deux fermés, il est donc fermé.

• Ainsi la relation d'équivalence $\sim$ est fermée. Puisque Y est compact, on en déduit que le quotient $Y/\sim$ est séparé.

Espaces quotients

• Puisque p est continue, Y compact et $Y/\sim$ séparé, on en déduit que $p(Y) = Y/\sim$ est compact.

• L'application

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ y & \longmapsto & e^{2i\pi y} \end{array}$$

est continue et $f(0) = f(1)$. D'après la proposition de transfert de continuité au quotient, l'application

$$\bar{f} : [0,1]/\sim \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

est continue.

• L'application $\bar{f}$ est aussi bijective car f est surjective et son seul défaut d'injectivité concerne le couple $(0,1)$.

• Une bijection continue d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme. Donc $[0,1]/\sim$ et $\mathbb{S}^1$ sont homéomorphes.

Espaces quotients

• Soit Y un espace topologique et soit $A \subset Y$. On considère la relation d'équivalence suivante

$$y_1 \sim y_2 \iff y_1 = y_2 \text{ ou } (y_1, y_2) \in A^2$$

L'espace quotient $Y/\sim$ est donc formé de la classe $[a]$ où $a \in A$ et des classes d'équivalence $[y]$ avec $y \in Y \setminus A$.

Définition.– L'espace quotient est noté Y/A et est appelé ESPACE QUOTIENT DE Y PAR A.

Exemple.– $[0, 1]/\{0, 1\}$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.

Exercice.– Montrer que $D^2/\partial D^2$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$.

Espaces quotients

• Soient X et Y deux espaces topologiques, $A \subset Y$ et $f : A \to X$ une application continue. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur la somme disjointe $Z = X \sqcup Y$ par

$$z_1 \sim z_2 \quad \text{si} \quad \begin{cases} z_1 = z_2 \\ \quad \text{ou} \\ (z_1 \in A \text{ et } z_2 = f(z_1)) \\ \quad \text{ou} \\ (z_2 \in A \text{ et } z_1 = f(z_2)) \end{cases}$$

Définition.– L'espace quotient est noté

$$X \cup_f Y = X \sqcup Y / \sim$$

et s'appelle le RECOLLEMENT DE X À Y LE LONG DE f.

Espaces quotients

Proposition.– *Si $X = \{x\}$ est un singleton et Y/A est compact alors $X \cup_f Y$ est homéomorphe à Y/A.*

Démonstration.– Si $X = \{x\}$ alors $f : A \to X$ est nécessairement constante. La classe d'équivalence de tout élément $z \in Y \setminus A$ est triviale : $[z] = \{z\}$. La seule classe d'équivalence non triviale est celle de $z = x$ ou $z = a$, $a \in A$, puisque l'on a

$$[x] = \{x\} \sqcup A = [a].$$

Ainsi $X \cup_f Y$ est en bijection avec Y/A.

• On vérifie sans peine que la relation $\sim$ est fermé, ainsi $X \cup_f Y$ est un espace séparé.

Espaces quotients

• On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \sqcup Y \arrow[d, "p"] \\ Y/A \arrow[r, "j"] & X \cup_f Y \end{tikzcd}$$

où i est l'inclusion naturelle (et continue) et j la bijection décrite ci-dessus.

• Puisque $j \circ p = p \circ i$ et que $p \circ i$ est continue, on en déduit que $j \circ p$ est continue. Par transfert de continuité au quotient, j est continue.

• Supposons que Y/A soit compact (par exemple en supposant Y compact) alors j est un homéomorphisme car c'est une bijection continue d'un compact dans un espace séparée.

Espaces quotients

Un exemple non trivial.– Soit $X = \mathbb{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$ où $\mathbb{M}^2$ est le ruban de Möbius donné comme image de la paramétrisation

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \times [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) & \longmapsto & \left(\rho(\theta, t) \cos 2\theta, \rho(\theta, t) \sin 2\theta, \frac{t}{2} \sin \theta\right) \end{array}$$

où $\rho(\theta, t) = 1 + \frac{t}{2} \cos \theta$.

Espaces quotients

• On choisit $Y = D^2$, $A = \partial D^2 = \mathbb{S}^1$ et $f : A \to X$ donnée par

$$f(\theta) := g(\theta, 1).$$

L'application f est un homéomorphisme sur son image (en jaune dans l'illustration).

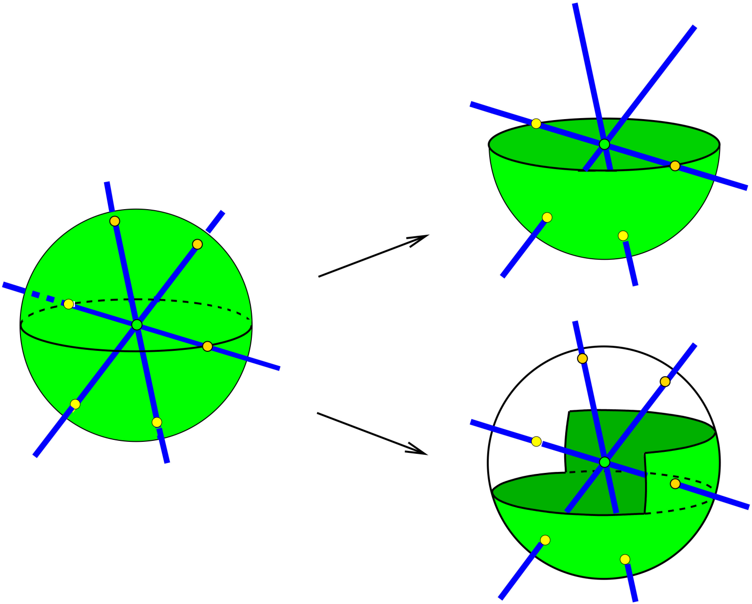
• Nous allons nous convaincre que $X \cup_f Y$ est homéomorphe à l'ESPACE PROJECTIF

$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2 / \sim$$

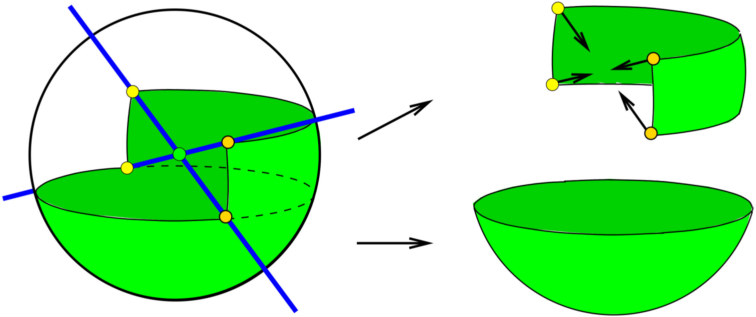
c'est-à-dire l'espace quotient de la sphère par la relation d'équivalence dite d'ANTIPODIE

$$x_1 \sim x_2 \quad \text{si} \quad x_1 = \pm x_2.$$

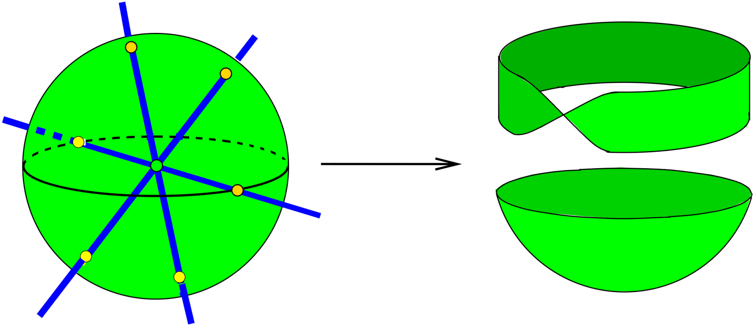
Espaces quotients



Espaces quotients



Espaces quotients



L'espace projectif est homéomorphe au recollement d'un disque et d'un ruban de Möbius le long de leur bord. Formellement

$$\mathbb{R}P^2 \approx \mathbb{M}^2 \cup_f D^2$$

où f est l'application décrite plus haut.

Espaces quotients

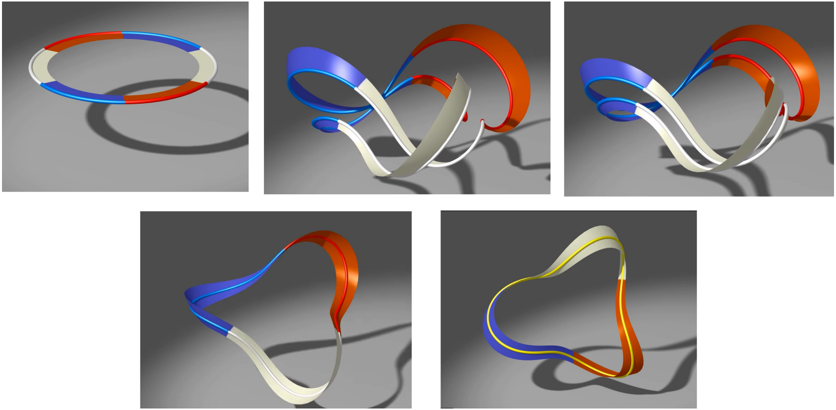
L'exemple non trivial sous une autre forme.– Soient $X = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, $Y = D^2$, $A = \partial D^2 = \mathbb{S}^1$ et

$$f : \begin{array}{ccc} \partial D^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

• Les classes d'équivalence non triviales sont les pairs de points $\{e^{i\theta}, e^{i(\theta+\pi)}\}$ antipodaux de $\mathbb{S}^1$.

• Ainsi, et d'après ce que nous venons de faire, le recollement $\mathbb{S}^1 \cup_f D^2$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^2$.

Espaces quotients



Images : Jos Leys

Déformation réalisant le recollement de $X = \mathbb{S}^1$ avec un voisinage Y de $A = \partial D^2$ le long de l'application $z \to z^2$. L'espace $\mathbb{S}^1 \cup_f Y$ est homéomorphe au ruban de Möbius $\mathbb{M}^2$.

Espaces quotients

Définition.– La donnée d'un espace topologique X et d'un point base $x_0 \in X$ est appelé un ESPACE POINTÉ et noté (X, x_0).

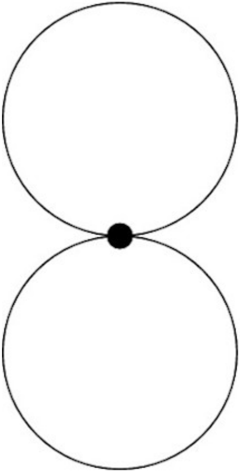
Définition.– Étant donnés deux espaces pointés (X, x_0) et (Y, y_0), on appelle BOUQUET DE X ET DE Y et on note

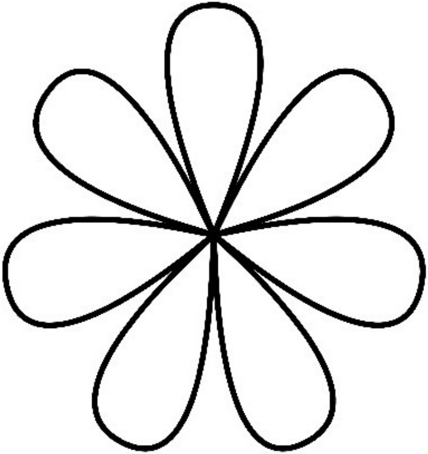
$$X \vee Y$$

le recollement $X \cup_f Y$ où $A = \{y_0\}$ et $f(y_0) = x_0$.

• On dit également que $X \vee Y$ est la SOMME POINTÉE de X et de Y.

Espaces quotients





Bouquets de deux cercles $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ et de 7 cercles $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

Espaces quotients

Exemple 1.– Soit K un complexe simplicial connexe et fini de dimension 1 et S l'ensemble de ses sommets (=face de dimension 0). L'espace $|K|/S$ est homéomorphe à un bouquet de cercles dont le nombre de cercles est celui des arêtes (=face de dimension 1) de K.

Exemple 2.– Soit $A \subset \mathbb{S}^2$ un grand cercle, l'espace $\mathbb{S}^2/A$ est un bouquet de deux sphères $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2$.

Exemple 3.– Soit $A \subset \mathbb{S}^2$ l'ensemble des arêtes de la triangulation par l'icosaèdre (cf. l'image plus haut dans ce cours). L'espace $\mathbb{S}^2/A$ est un bouquet de vingt sphères.

CW-complexes

Définition.– Un *CW*-COMPLEXE X est un espace topologique défini par la donnée d'une suite croissante (finie ou non)

$$\emptyset \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots$$

d'espaces topologiques $(X^n)_{n\in I}$ avec $I = \{0, 1, ..., N\}$ ou $I = \mathbb{N}$, et telle que :

- $X = \cup_{n\in I} X^n$
- X^0 est un espace discret non vide
- X^n est homéomorphe à l'espace obtenu en effectuant le recollement de X^{n-1} avec une famille $(e^n_\alpha)_{\alpha\in A_n}$ de n-boules fermées, par des applications continues

$$\varphi_\alpha : \partial e^n_\alpha \to X^{n-1}, \quad \alpha \in A_n.$$

- Une partie F est un fermé de X ssi son intersection avec X^n est fermée pour tout $n \in I$.

CW-complexes

• Les espaces X^n sont appelés les n-SQUELETTES, les n-boules e^n_α sont appelées les n-CELLULES.

• Si I est finie, le dernier axiome est une conséquence directe du fait que les inclusions entre les squelettes sont des applications continues.

• La topologie de X est la plus faible pour laquelle les inclusions $X^n \subset X$ sont continues. C'est la topologie de la limite directe $\varinjlim X^n$, autrement dit la TOPOLOGIE FAIBLE.

• Cette topologie n'est par reliée à la TOPOLOGIE INITIALE des espaces vectoriels topologiques, dite elle aussi, TOPOLOGIE FAIBLE.

CW-complexes

Exemple 1.– On considère le CW-complexe de dimension 1 donné par $X^0 = 1$ et

$$X^1 = X^0 \cup_\varphi e^1$$

où $e^1 = B^1 = [-1, 1]$ et $\varphi : \partial e^1 = \{-1, 1\} \to X^0 = 1$ est l'application constante.

D'après ce que l'on a établi plus haut

$$X^1 \approx e^1/\partial e^1 \approx \mathbb{S}^1.$$

Ceci montre que le cercle $\mathbb{S}^1$ admet une structure de CW-complexe ayant un point et une 1-cellule.

Exemple 2.– Plus généralement, la sphère $\mathbb{S}^n$ admet une structure de CW-complexe ayant un point et une n-cellule.

CW-complexes

Exemple 3.– L'espace projectif $\mathbb{R}P^2$ admet une structure de CW-complexe ayant un point, une 1-cellule et une 2-cellule. Le 1-squelette est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ et le 2-squelette est obtenu en attachant la 2-cellule avec $\varphi : \partial e^2 \to X^1$ donnée par $z \mapsto z^2$.

Exemple 4.– Un complexe simplicial $|K|$ a une structure naturelle de CW-complexe donnée par sa filtration $|K^n|$ par les n-simplexes.

• Le point clé est que tout n-simplexe σ_α est (homéomorphe à) une n-boule. L'application de recollement

$$\varphi_\alpha : \partial\sigma_\alpha \to |K^{n-1}|$$

est l'inclusion naturelle.

CW-complexes

Proposition.– *Soit X un CW-complexe alors*

- *X est séparé,*
- *l'adhérence de toute cellule e_α ne rencontre qu'un nombre fini d'autres cellules,*
- *X est compact ssi il se compose d'un nombre fini de cellules.*

Démonstration.– Voir le Hatcher, p. 521-523.

• On peut comprendre maintenant la dénomination de ces espaces. Les lettres "CW" sont les initiales de *Closure-finiteness* et de *Weak topology*.

• Les CW-complexes sont les « bons » espaces topologiques. Kirby et Siebenmann démontrent que toute variété topologique compacte de dimension $n \neq 4$ possède une structure de CW-complexe.

Exos

1) Montrer que l'espace quotient Y/A d'un cylindre $Y := \mathbb{S}^1 \times [-1,1]$ par $A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ est homéomorphe au cône de $\mathbb{R}^3$ défini par $C = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \in [-1,1]\}$.

2) On définit le ruban de Möbius comme le quotient

$$\mathbb{M}^2 = [0,\pi] \times [-1,1]/\sim$$

où les seules relations non triviales de $\sim$ sont $(0,\rho) \sim (\pi,-\rho)$ pour tout $\rho \in [-1,1]$.
a) Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{M}^2 & \longrightarrow & D^2 \subset \mathbb{R}^2 \\ (\theta,\rho) & \longmapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array}$$

est continue.
b) Soit $A = [0,\pi] \times \{0\}/\sim$ l'âme de $\mathbb{M}^2$. Montrer que $\mathbb{M}^2/A$ est homéomorphe au disque D^2.

Exos

3) Soit K le 2-complexe simplicial de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets sont

$$p_0 = (1,1,1), \quad p_1 = (1,-1,-1),$$
$$p_2 = (-1,1,-1) \quad \text{et} \quad p_3 = (-1,-1,1),$$

les arêtes sont les six segments $[p_i p_j]$ et les faces les quatre triangles $[p_i p_j p_k]$.

a) Faire un dessin de $|K|$ et montrer que les sommets sont inscrits dans une sphère S.

b) Pour tout $p = (x,y,z)$, on pose

$$\ell_0(\overrightarrow{Op}) = x+y+z, \quad \ell_1(\overrightarrow{Op}) = x-y-z,$$
$$\ell_2(\overrightarrow{Op}) = -x+y-z, \quad \ell_3(\overrightarrow{Op}) = -x-y+z.$$

On note F_i la face ne contenant pas le point p_i. Montrer que

$$p \in F_i \iff \ell_i(\overrightarrow{Op}) = -1 \text{ et } \ell_j(\overrightarrow{Op}) \geq -1 \text{ si } j \neq i$$

Exos

c) Soit

$$\delta(\overrightarrow{Op}) := \max_{i\in\{0,\dots,3\}}(-\ell_i(\overrightarrow{Op}))$$

i) Montrer que $\delta(\overrightarrow{Op}) = 0$ ssi $p = O$.

ii) Constater que $\ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$ et en déduire que si $p \neq O$ alors $\delta(\overrightarrow{Op}) > 0$.

iii) Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\delta(\lambda\overrightarrow{Op}) = \lambda\,\delta(\overrightarrow{Op})$.

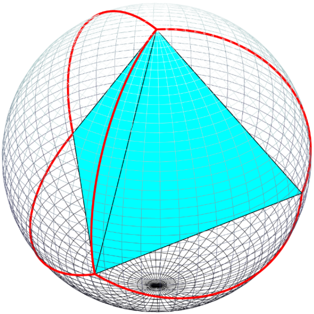
iv) Montrer enfin que $p \in |K| \iff \delta(\overrightarrow{Op}) = 1$.

d) On considère

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{S}^2(\sqrt{3}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p = (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{\delta(\overrightarrow{Op})}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrer que l'image de f est incluse dans $|K|$.

Exos

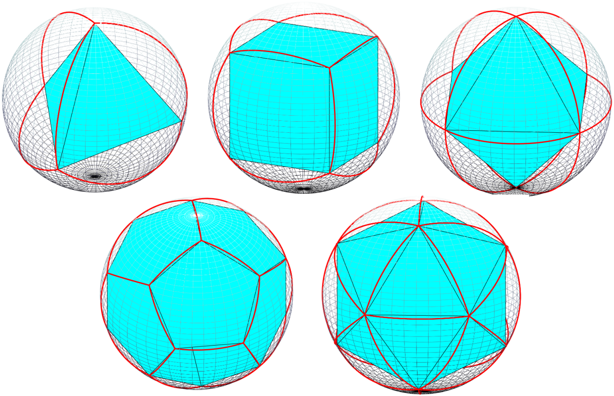


L'application f^{-1}.

e) Écrire explicitement la fonction réciproque de f et en déduire que f^{-1} est une triangulation de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$.

f) À votre avis, est-il possible de construire une triangulation de la sphère ayant moins de quatre sommets ?

Exos



L'application f^{-1} pour les solides de Platon.

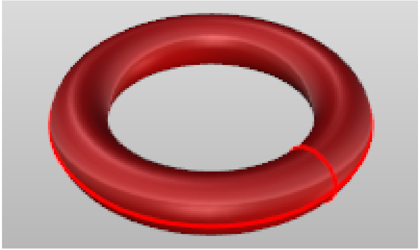
g) Imaginer d'autres triangulations de la sphère en s'inspirant de la démarche précédente et de l'illustration ci-dessus.

Exos

4) Soit $h : X \to Y$ un homéomorphisme, e^n une n-boule et $\varphi : \partial e^n \to X$ une application de recollement. Montrer que

$$X \cup_\varphi e^n \simeq Y \cup_{h\circ\varphi} e^n.$$

Exos



Les espaces X^0, X^1 et $X^2 = T$.

5) Soit $0 < b < a$ et $I = [0, 2\pi]$. On considère l'espace topologique $T = f(I \times I)$ où

$$\begin{array}{rccc} f: & I \times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta, \varphi) & \longmapsto & \left(\begin{array}{l} x(\theta, \varphi) = (a + b\cos\theta)\cos\varphi \\ y(\theta, \varphi) = (a + b\cos\theta)\sin\varphi \\ z(\theta, \varphi) = b\sin\theta \end{array} \right). \end{array}$$

Exos

a) On note $\sim$ la relation d'équivalence dont les seules relations non triviales sont

$$(0, \varphi) \sim (2\pi, \varphi) \quad \text{et} \quad (\theta, 0) \sim (\theta, 2\pi)$$

pour tout $\varphi, \theta \in [0, 2\pi]$. Montrer que $I \times I / \sim$ est homéomorphe à T.

b) On considère la suite croissante de sous-espaces suivants :

$$X^0 = f(0,0), \quad X^1 = f(I \times \{0\} \cup \{0\} \times I)), \quad X^2 = T.$$

Montrer que X^1 est homéomorphe au bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

c) On note $p : I^2 \to I^2 / \sim$ la projection canonique et

$$\psi := p_{|\partial I^2} : \partial I^2 \longrightarrow p(I^2)$$

Montrer que

$$p(\partial I^2) \cup_\psi I^2 \simeq p(I^2).$$

Exos

d) Montrer que

$$\emptyset \subset X^0 \subset X^1 \subset X^2 = T$$

définit une structure de CW-complexe sur T. On admettra que le carré $I \times I$ est homéomorphe à la 2-boule e^2.