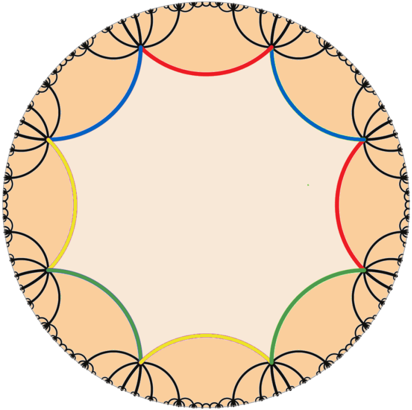
CM-TA11 : La montée vers l'absolu

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Le revêtement universel du tore à deux trous T_2

Le revêtement universel

Définition.– Un revêtement $p : E \to B$ est dit UNIVERSEL si E est simplement connexe.

Exemple 1 : Le revêtement $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ est universel. Les revêtements $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Lambda$ sont universels.

Exemple 2 : Le revêtement $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ est universel.

Exemple 3 : Le revêtement $p : Cay(F_2) \to \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ est universel.

Exemple 4 : Le revêtement $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ est universel.

Remarque : D'après l'*Orbit-Stabilizer Theorem*, si $p : (E, x) \to (B, b)$ est un revêtement universel alors $\pi_1(B, b)$ et $F_b = p^{-1}(b)$ sont en bijection.

Le revêtement universel

Exemple 5 : Supposons que E soit un espace topologique séparé, localement compact sur lequel agit (à droite) un groupe G de façon continue, proprement discontinue et libre. D'après un résultat de la leçon TA7 sur les revêtements, l'application quotient

$$p : E \longrightarrow {}_{G}\backslash^{E}$$

est un revêtement. Si de plus, E est simplement connexe, ce revêtement est universel. D'après le théorème du π_1 du quotient d'un simplement connexe vu à la leçon TA10 :

$$\pi_1\left({}_{G}\backslash^{E}, *\right) \cong G.$$

Ce résultat est plus fort que *Orbit-Stabilizer Theorem* qui affirme seulement que ces deux groupes sont en bijection.

Le revêtement universel

Construction d'un revêtement universel.– Soit $b \in B$. On considère sur l'espace

$$L(B, b) = \{\sigma : [0,1] \to B \,|\, \gamma(0) = b\}$$

la relation d'équivalence suivante :

$$\sigma_1 \sim \sigma_2 \text{ ssi } \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \text{ sont homotopes à extrémités fixées.}$$

Puis on considère

$$P(B, b) := L(B, b)/\sim$$

ainsi que l'application $p : P(B, b) \to B$ donnée par

$$p([\sigma]_{\between}) := \sigma(1)$$

où $[\sigma]_{\between}$ est la classe de σ pour $\sim$.

Le revêtement universel

• Le groupe $\pi_1(B,b)$ agit à gauche sur $P(B,b)$ par

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B,b)\times P(B,b) & \longrightarrow & P(B,b) \\ ([\gamma],[\sigma]_{\between}) & \longmapsto & [\gamma * \sigma]_{\between} \end{array}$$

Cette action préserve les fibres de p puisque trivialement

$$p([\gamma * \sigma]_{\between}) = p([\sigma]_{\between}).$$

• Contrairement à la monodromie qui ne fait agir $\pi_1(B,b)$ que sur la seule fibre F_b, ici l'action porte sur $P(B,b)$ tout entier, il y a donc un espace quotient

$$\pi_1(B,b)\backslash^{P(B,b)}.$$

Le revêtement universel

Programme.– On va

- munir $P(B, b)$ d'une topologie
- montrer que $p : P(B, b) \to B$ est un revêtement
- montrer que $P(B, b)$ est simplement connexe
- établir que

$$B \simeq {}_{\pi_1(B,b)}\backslash^{P(B,b)}.$$

Le revêtement universel

Une topologie pour $P(B, b)$.– La topologie de $P(B, b)$ est définie au moyen d'une base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire d'une famille d'ouverts qui satisfait aux deux conditions suivantes

i) La famille $\mathcal{B}$ constitue un recouvrement de B

ii) L'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est une union (d'un nombre quelconque) d'éléments de $\mathcal{B}$.

Une telle famille engendre par réunion de ses éléments les ouverts d'une unique topologie.

• Par exemple, la famille $\mathcal{B}_1$ des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est une base de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

• La sous-famille $\mathcal{B}_2$ des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont des nombres rationnels est une base (dénombrable) de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$.

Le revêtement universel

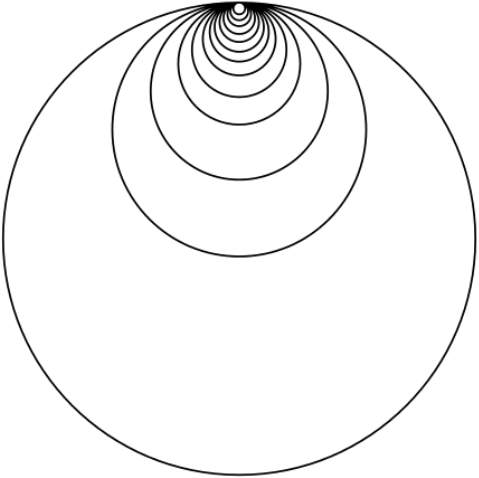
Définition (bis).– Un espace topologique Y est dit LOCALEMENT CONNEXE PAR ARCS s'il admet une base d'ouverts $\mathcal{B}$ dont chacun est connexe par arcs.

• Cette définition est équivalente à celle donnée dans la leçon TA9 "Relèvements".

Définition.– Un espace topologique Y est dit LOCALEMENT SIMPLEMENT CONNEXE s'il admet une base d'ouverts $\mathcal{B}$ dont chacun est simplement connexe par arcs.

• On suppose à partir de maintenant que l'espace B est connexe par arcs et localement simplement connexe par arcs. L'espace B admet donc une base d'ouverts $\mathcal{B}$ dont chacun est simplement connexe par arcs.

Le revêtement universel



La boucle d'oreille hawaïenne : un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs mais par localement simplement connexe.

Le revêtement universel

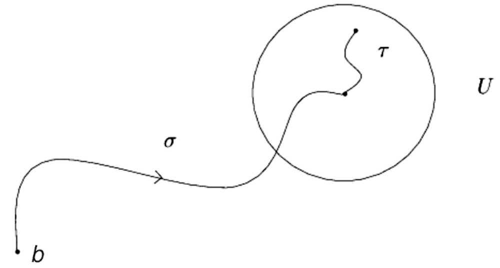


Illustration extraite du site *Analysis situs*

• À tout couple $([\sigma]_{\between}, U)$ où $[\sigma]_{\between} \in P(B,b)$ et où $U \in \mathcal{B}$ est un ouvert simplement connexe de $\sigma(1)$, on associe

$$U_{[\sigma]_{\between}} := \{[\sigma * \tau]_{\between} \in P(B,b) \,|\, \tau \in L(U, \sigma(1))\}$$

et on définit

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{U_{[\sigma]_{\between}} \,|\, [\sigma]_{\between} \in P(B,b), U \in \mathcal{B} \text{ tel que } \sigma(1) \in U\}.$$

Le revêtement universel

Lemme.– *Soit B connexe par arcs et localement simplement connexe par arcs. La famille $\widetilde{\mathcal{B}}$ définit une topologie sur $P(B,b)$.*

Démonstration.– La famille $\widetilde{\mathcal{B}}$ est un recouvrement de $P(B,b)$: en effet pour tout $[\sigma]_{\between} \in P(B,b)$, le point $\sigma(1) \in B$ appartient à un ouvert U de $\mathcal{B}$ puisque $\mathcal{B}$ est un recouvrement de B. Pour un tel U, l'ensemble $U_{[\sigma]_{\between}}$ contient $[\sigma]_{\between}$ et appartient à $\widetilde{\mathcal{B}}$.

• Pour montrer la condition ii) on commence par démontrer que

$$[\delta]_{\between} \in U_{[\sigma]_{\between}} \quad \Longrightarrow \quad U_{[\delta]_{\between}} = U_{[\sigma]_{\between}}$$

Soit $[\gamma]_{\between} \in U_{[\delta]_{\between}}$. Il existe $\mu \in \Omega(U, \delta(1))$ tel que $[\gamma]_{\between} = [\delta * \mu]_{\between}$. Par hypothèse $[\delta]_{\between} \in U_{[\sigma]_{\between}}$ donc il existe $\tau \in L(U, \sigma(1), \delta(1))$ telle que $[\delta]_{\between} = [\sigma * \tau]_{\between}$. Ainsi $[\gamma]_{\between} = [\sigma * (\tau * \mu)]_{\between} \in U_{[\sigma]_{\between}}$ et donc $U_{[\delta]_{\between}} \subset U_{[\sigma]_{\between}}$.

Le revêtement universel

Réciproquement, puisque par hypothese $[\delta]_{\between} = [\sigma * \tau]_{\between}$, on déduit $[\delta * \bar{\tau}]_{\between} = [\sigma]_{\between}$ donc $[\sigma_{\between}] \in U_{[\delta]_{\between}}$. D'après l'implication démontrée plus haut, ceci entraîne $U_{[\sigma]_{\between}} \subset U_{[\delta]_{\between}}$.

• Montrons le point ii). Soit $[\gamma]_{\between} \in U_{[\sigma]_{\between}} \cap V_{[\delta]_{\between}}$. D'après ce que l'on vient de démontrer, on a

$$[\gamma]_{\between} \in U_{[\gamma]_{\between}} \cap V_{[\gamma]_{\between}}.$$

Soit $W \in \mathcal{B}$ tel que $\gamma(1) \in W$ et $W \subset U \cap V$. On a alors

$$[\gamma]_{\between} \in W_{[\gamma]_{\between}} \in \widetilde{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad W_{[\gamma]_{\between}} \subset U_{[\gamma]_{\between}} \cap V_{[\gamma]_{\between}}.$$

• Par conséquent l'intersection $U_{[\sigma]_{\between}} \cap V_{[\delta]_{\between}}$ est obtenue comme la réunion des $W_{[\gamma]_{\between}}$ avec $[\gamma]_{\between} \in U_{[\gamma]_{\between}} \cap V_{[\gamma]_{\between}}$. Ceci prouve ii). $\square$

Le revêtement universel

Lemme.– *Soit B connexe par arcs et localement simplement connexe par arcs. L'application $p : P(B, b) \to B$ est un revêtement.*

• Pour gagner un peu de temps, ce lemme est admis. On pourra trouver une démonstration dans le livre de Bredon, au paragraphe *Classification of Covering Spaces* ou dans le site *Analysis situs*, page "Revêtement universel".

• Lors de cette démonstration, on établit que

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\sigma]_\gamma \in p^{-1}(b)} U_{[\sigma]_\gamma}$$

puis on montre que $p : U_{[\sigma]_\gamma} \to U$ est un homéomorphisme.

Le revêtement universel

• Pour cela on construit explicitement un inverse

$$
\begin{array}{rccc}
q: & U & \longrightarrow & U_{[\sigma]_{\between}} \\
 & b' & \longmapsto & [\sigma * \eta]_{\between}
\end{array}
$$

où η est un chemin dans U joignant b à b'.

• Pour que cet inverse soit bien défini, il faut qu'il ne dépende pas du chemin η choisit. Observons que si μ est un autre chemin de U joignant b à b' alors

$$[\sigma * \eta]_{\between} = [\sigma * \mu]_{\between} \quad \Longleftrightarrow \quad [\eta * \bar{\mu}] = [c_b] \in \pi_1(U, b).$$

• C'est ici que l'hypothèse de la locale simple connexité de B rentre en jeu. Elle implique que $\pi_1(U, b)$ est trivial et donc que q est bien définie.

Le revêtement universel

Lemme.– *Soit B connexe par arcs et localement simplement connexe par arcs. L'espace $P(B,b)$ est simplement connexe.*

Démonstration.– Soit $[\sigma]_\between \in P(B,b)$. Alors $s \longmapsto [\sigma_s]_\between$ où $\sigma_s(t) := \sigma(st)$ est un chemin continu reliant $[c_b]_\between$ à $[\sigma]_\between$. Donc $P(B,b)$ est connexe par arcs.

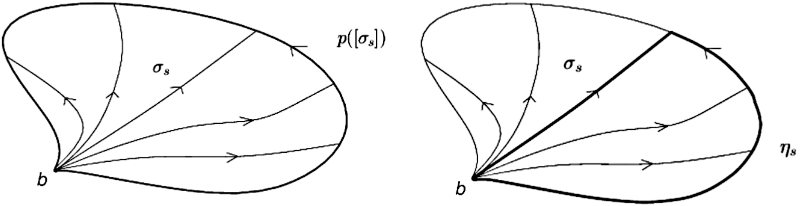
• Par le théorème de l'injectivité de p_* vu dans la leçon TA8, pour montrer que $P(B,b)$ est simplement connexe il suffit de montrer que

$$p_* : \pi_1(P(B,b),[c_b]_\between) \longrightarrow \pi_1(B,b)$$

est nulle.

• Soit $s \longmapsto [\sigma_s]_\between$ un lacet de $P(B,b)$ basé en $[c_b]_\between$. On veut montrer que $s \longmapsto p([\sigma_s]_\between) = \sigma_s(1)$ est contractile.

Le revêtement universel



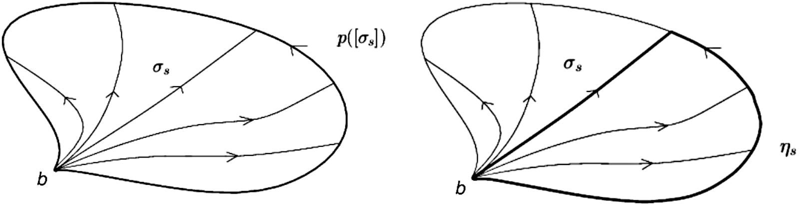
Illustrations extraites du site *Analysis situs*

- On pose $\eta_s(t) := p([\sigma_{st}]_{\between})$. Puisque

$$\eta_s(0) = p([\sigma_0]_{\between}) = p([c_b]_{\between}) = c_b(1) = b$$

on en déduit que $\eta_s \in L(B, b)$ pour tout $s \in [0, 1]$ et donc $[\eta_s]_{\between} \in P(B, b)$.

Le revêtement universel



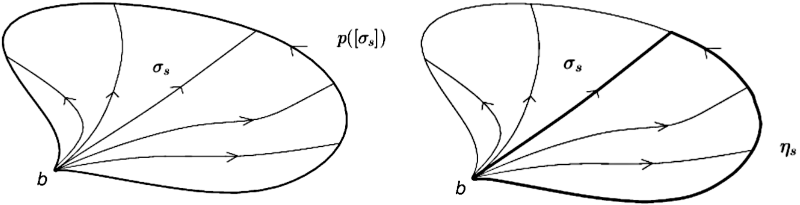
Illustrations extraites du site *Analysis situs*

- Puisque $\eta_s(t) := p([\sigma_{st}]_{\between})$ on a

$$p([\eta_s]_{\between}) = \eta_s(1) = p([\sigma_{s\times 1}]_{\between}) = \sigma_s(1)$$

Ainsi η_s et σ_s sont deux chemins de B dont les extrémités b et $\sigma_s(1)$ sont communes.

Le revêtement universel



Illustrations extraites du site *Analysis situs*

- À partir de la définition $\eta_s(t) := p([\sigma_{st}]_{\between})$ on déduit également que

$$\eta_0(t) = p([\sigma_0]_{\between}) = p([c_b]_{\between}) = c_b(1) = b$$

ainsi $s \mapsto [\eta_s]_{\between}$ et $s \mapsto [\sigma_s]_{\between}$ sont deux chemins de $P(B, b)$ dont l'origine est $[c_b]_{\between}$.

Le revêtement universel

Récapitulons :

1) $s \mapsto [\eta_s]_\between$ et $s \mapsto [\sigma_s]_\between$ sont deux chemins de $P(B, b)$ dont l'origine est commune.
2) puisque $p([\eta_s]_\between) = p([\sigma_s]_\between) = \sigma_s(1)$, ces deux chemins sont des relevés du lacet $s \longmapsto \sigma_s(1)$

• Puisque $P(B, b)$ est connexe par arcs, on en déduit par le lemme de coïncidence vu dans la leçon TA8 sur l'injectivité de p_*, que les chemins $s \mapsto [\eta_s]_\between$ et $s \mapsto [\sigma_s]_\between$ sont égaux.

• En prenant $s = 1$, on obtient $[\eta_1]_\between = [\sigma_1]_\between$. Comme $s \mapsto [\sigma_s]_\between$ est un lacet de $P(B, b)$ basé en $[c_b]_\between$ on a $[\sigma_1]_\between = [c_b]_\between$.

Le revêtement universel

- L'égalité $[\eta_1]_\between = [c_b]_\between$ signifie que η_1 et c_b sont homotopes à extrémités fixées, autrement dit que η_1 est contractile dans B.

- Or $\eta_1 = p([s \mapsto \sigma_s]_\between)$, on en déduit que

$$p_*([s \mapsto \sigma_s]_\between) = [c_b].$$

C'est dire que p_* est nulle. $\square$

Le revêtement universel

Lemme.– Soit B connexe par arcs et localement simplement connexe par arcs. L'application

$$\begin{array}{rcl}\Phi : \quad {}_{\pi_1(B,b)}\backslash^{P(B,b)} & \longrightarrow & B \\ [[\sigma]_{\between}] := \{[\gamma * \sigma]_{\between} \mid [\gamma] \in \pi_1(B,b)\} & \longmapsto & p([\sigma]_{\between}) = \sigma(1)\end{array}$$

est une bijection.

Démonstration.– Remarquons d'abord que l'application Φ est bien définie puisque

$$p([\gamma * \sigma]_{\between}) = \gamma * \sigma(1) = \sigma(1) = p([\sigma]_{\between})$$

et qu'elle est surjective car B est connexe par arcs.

Le revêtement universel

• Supposons $p([\sigma_1]) = p([\sigma_2])$ alors $\gamma := \sigma_1 * \bar{\sigma}_2 \in \Omega(B, b)$. Ceci entraîne que

$$[\sigma_1]_{\between} = [\gamma * \sigma_2]_{\between} \quad \text{avec} \quad [\gamma] \in \pi_1(B, b),$$

autrement dit $[\sigma_1]_{\between}$ et $[\sigma_2]_{\between}$ appartiennent à la même orbite de l'action de $\pi_1(B, b)$. Ceci montre que $\overline{p}$ est injective. $\square$

• Notons

$$q : P(B, b) \longrightarrow {}_{\pi_1(B, b)} \diagdown^{P(B, b)}$$

l'application quotient de l'action à droite par $\pi_1(B, b)$. D'après la leçon TA7 sur les revêtements, cette application est un revêtement si la base est munie de la topologie quotient.

Le revêtement universel

- On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & P(B,b) \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ \pi_1(B,b)\backslash P(B,b) \arrow[rr, "\Phi"] & & (B,b) \end{tikzcd}$$

Lemme.– *L'application* Φ *est un homéomorphisme.*

Démonstration.– D'après les propriétés de la topologie quotient (cf. leçon TA7)

$$\Phi \text{ est continue ssi } f \circ q \text{ est continue.}$$

Or $f \circ q = p$ est un relèvement, c'est donc une application continue. Reste à montrer que Φ^{-1} est continue.

Le revêtement universel

$$\begin{tikzcd} & P(B,b) \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ {}_{\pi_1(B,b)}\backslash^{P(B,b)} \arrow[rr, "\Phi"] & & (B,b) \end{tikzcd}$$

• Soit V un ouvert de ${}_{\pi_1(B,b)}\backslash^{P(B,b)}$, cela revient à montrer que $\Phi(V)$ est ouvert dans B.

• Comme $P(B,b)$ est localement simplement connexe, il en est de même pour l'espace quotient et on peut se contenter de vérifier la propriété sur une base d'ouverts simplement connexe. On suppose donc V simplement connexe.

Le revêtement universel

$$\begin{tikzcd}
 & P(B,b) \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\
\pi_1(B,b)\backslash P(B,b) \arrow[rr, "\Phi"] & & (B,b)
\end{tikzcd}$$

- Soit $S \subset L(B,b)$ un sous-ensemble tel que

$$V = \{[[\eta]_{\between}] \mid \eta \in S\}.$$

On choisit $\sigma \in S$ et on remplace chaque η dans S par

$$\sigma * \tau \quad \text{où} \quad \tau \in L(\Phi(V), \sigma(1), \eta(1))$$

Ceci est possible car $\Phi(V)$ est connexe par arcs.

Le revêtement universel

$$\begin{tikzcd} & P(B,b) \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ \pi_1(B,b)\backslash P(B,b) \arrow[rr, "\Phi"] & & (B,b) \end{tikzcd}$$

- Soit
$$V' := \{[[\sigma * \tau]_{\between}] \,|\tau \in L(\Phi(V), \sigma(1))\}.$$
Notons que $\Phi(V) = \Phi(V')$ et donc, puisque Φ est bijective, $V' = V$.

- Il s'en suit que
$$\begin{aligned} q^{-1}(V) &= \bigcup_{[\gamma]\in\pi_1(B,b),\tau\in L(\Phi(V),\sigma(1))} [\gamma] * [\sigma * \tau]_{\between} \\ &= \bigcup_{[\gamma]\in\pi_1(B,b)} [\gamma] * [\Phi(V)]_{[\sigma]_{\between}} \\ &= \bigcup_{[\gamma]\in\pi_1(B,b)} [\Phi(V)]_{[\gamma*\sigma]_{\between}} = p^{-1}(\Phi(V)). \end{aligned}$$

Le revêtement universel

$$\begin{tikzcd} & P(B,b) \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ \pi_1(B,b)\backslash P(B,b) \arrow[rr, "\Phi"] & & (B,b) \end{tikzcd}$$

- Par définition de la topologie quotient, $q^{-1}(V)$ est un ouvert et donc $p^{-1}(\Phi(V))$ aussi.

- Les revêtements étant des applications ouvertes (exercice), on en déduit que $p(p^{-1}(\Phi(V))) = \Phi(V)$ est un ouvert de B. $\square$

Le revêtement universel

Nous venons de démontrer le théorème suivant :

Théorème d'existence d'un revêtement universel.–*Soit B connexe par arcs et localement simplement connexe par arcs et $b \in B$. Alors*

$$p : P(B,b) \longrightarrow B$$

est un revêtement universel, $\Phi : {}_{\pi_1(B,b)} \backslash {}^{P(B,b)} \longrightarrow B$ est un homéomorphisme et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & P(B,b) \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\
\pi_1(B,b) \backslash P(B,b) \arrow[rr, "\Phi"] & & (B,b)
\end{tikzcd}$$

Le revêtement universel

Notation.– On montrera en exercice que le revêtement universel est unique à isomorphisme de revêtements près. On note $\widetilde{B}$ son espace total qui est naturellement pointé par $[c_b]_{\between}$.

La classification des revêtements

• Dans la leçon TA9 "Revêtements", on a introduit l'ensemble $Rev(B, b)$ l'ensemble des classes d'équivalence des revêtements $p : (E, x) \to (B, b)$ pointés connexes par arcs ainsi que l'ensemble $Sub(G)$ des sous-groupes de G.

Théorème de classification des revêtements.– *Soit B est connexe par arcs et localement simplement connexe par arcs alors la correspondance de Galois*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{G} : & Rev(B, b) & \longrightarrow & Sub(\pi_1(B, b)) \\ & [p : (E, x) \to (B, b)] & \longmapsto & p_*(\pi_1(E, x)) \end{array}$$

est bijective.

La classification des revêtements

Démonstration.– Dans la leçon TA9, nous avons montré que $\mathcal{G}$ est bien définie et injective.

• Pour alléger les formules, on note

$$G := \pi_1(B, b) \quad \text{et} \quad \widetilde{B} = P(B, b).$$

Soit $H \in Sub(G)$. L'application quotient

$$p \quad : \quad \left({}_{H}\backslash^{\widetilde{B}}, [[c_b]_{\between}]_H \right) \longrightarrow \left({}_{G}\backslash^{\widetilde{B}}, [[c_b]_{\between}]_G \right)$$

est un revêtement pointé (démonstration similaire à celle de la leçon TA7, Revêtements, paragraphe "Espace quotient par un groupe discret").

La classification des revêtements

- Posons

$$x := [c_b]_{\between}, \quad x_H := [x]_H \quad \text{et} \quad x_G := [x]_G.$$

D'après le théorème du π_1 du quotient d'un simplement connexe vu dans la leçon TA10 sur la monodromie, on a :

$$\pi_1\left({}_H\backslash^{\widetilde{B}}, x_H\right) \cong H \quad \text{et} \quad \pi_1\left({}_G\backslash^{\widetilde{B}}, x_G\right) \cong G$$

L'isomorphisme associe à chaque $[\gamma]_H$ l'élément $h \in H$ tel que $\widetilde{\gamma}(1) = h \cdot x$ (resp. à chaque $[\gamma]_G$ l'élément $g \in G$ tel que $\widetilde{\gamma}(1) = g \cdot x$).

- On va montrer que $p_* : H \to G$ est l'inclusion.

La classification des revêtements

$$\begin{tikzcd}
 & (\widetilde{B}, x) \arrow[d, "p_H"] \\
 & \left(H \backslash \widetilde{B}, x_H\right) \arrow[d, "p"] \\
{[0,1]} \arrow[uur, bend left, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "p \circ \gamma"] & \left(G \backslash \widetilde{B}, x_G\right)
\end{tikzcd}$$

• Notons que si $\widetilde{\gamma}$ est un relèvement de γ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x$ alors c'est un relèvement de $p \circ \gamma$ (tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x$ évidemment).

La classification des revêtements

$$\begin{tikzcd}
& (\widetilde{B}, x) \arrow[d, "p_H"] \\
& \left(H\backslash\widetilde{B}, x_H\right) \arrow[d, "p"] \\
{[0,1]} \arrow[uur, bend left, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "p\circ\gamma"] & \left(G\backslash\widetilde{B}, x_G\right)
\end{tikzcd}$$

- Soient $\gamma : [0,1] \to H\backslash\widetilde{B}$ et $h \in H$ tel que $\widetilde{\gamma}(1) = h \cdot x$. Alors

$$\widetilde{p \circ \gamma}(1) = \widetilde{\gamma}(1) = h \cdot x$$

ce qui montre que $p_*(h) = h$.

La classification des revêtements

• Il ne reste plus qu'à remarquer que d'après le théorème d'existence d'un revêtement universel

$$\left({}_{G}\backslash^{\widetilde{B}}, x_G\right) \cong (B, b).$$

L'application p est donc un revêtement pointé

$$p \quad : \quad \left({}_{H}\backslash^{\widetilde{B}}, x_H\right) \longrightarrow (B, b)$$

tel que

$$\mathcal{G}(p) = p_*(\pi_1(H\backslash\widetilde{B}, x_H)) = H.$$

$\square$

La classification des revêtements

Corollaire.– *À isomorphisme de revêtements pointés près, le revêtement universel est unique.*

Démonstration.– Soient $p_i : (E_i, x_i) \to (B, b)$, $i \in \{1, 2\}$ deux revêtements universels pointés de B. On a

$$\pi_1(E_1, x_1) \cong \pi_1(E_2, x_2) \cong \{e\}$$

et donc

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, x_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, x_2)) = \{[c_b]\}$$

Puisque que $\mathcal{G}$ est bijective, cela signifie que $[p_1] = [p_2]$. $\square$

Exos

1) a) Décrire un revêtement universel $p : E \to \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ du bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$.
b) Soit e le sommet où $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^2$ sont attachés. Faire figurer la monodromie du $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2, e)$ sur la fibre $p^{-1}(e)$.

Exos

2) a) Déterminer le groupe fondamental de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$.
b) Soit $q : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2$ l'application quotient. Pour quelle raison

$$q \vee q : \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$$

n'est pas un revêtement universel de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$?
c) Soient $\{S, N\}$ les pôles sud et nord de la sphère. On considère le collier de deux sphères

$$E = \mathbb{S}^2 \cup_f \mathbb{S}^2$$

où $f : \{S, N\} \to \{S, N\}$ est l'identité et $q_f : E \to \mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ le revêtement induit par l'application quotient q. Pour quelle raison q_f n'est pas un revêtement universel ?
d) Décrire un revêtement universel de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$.
e) Le nombre de revêtements pointés de $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ est-il fini (à isomorphisme près) ?

Exos

3) On définit une relation binaire $\geq$ sur $Rev(B, b)$ par :

$$[p_1] \geq [p_2]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\exists$ un morphisme de revêtements pointés f entre p_1 et p_2

$$\begin{tikzcd} (E_1, x_1) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_2, x_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (B, b) & \end{tikzcd}$$

On dit alors que p_1 EST AU DESSUS DE p_2. On a montré dans un exercice de la leçon TA9 "Relèvements" que $\geq$ est une relation d'ordre partielle sur $Rev(B, b)$.

a) Montrer que

$$[p_1] \geq [p_2] \Longrightarrow \mathcal{G}([p_1]) < \mathcal{G}([p_2])$$

b) En déduire que le revêtement universel est le plus grand élément de $Rev(B, b)$.

Exos

4) Soient $n \geq 2$ un entier et Y_n le *CW* complexe de dimension 2

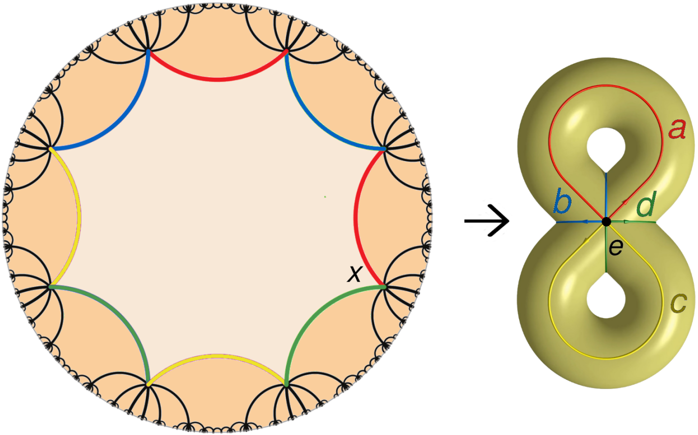
$$Y_n := \mathbb{S}^1 \cup_\varphi e^2$$

où $\varphi : \partial e^2 \to \mathbb{S}^1$ est l'application $z \to z^n$ et bien sûr $\mathbb{S}^1 = \{e\} \cup_{\partial e^1} e^1$.

a) Reconnaître Y_2.

b) Calculer le groupe fondamental de Y_n.

c) Décrire un revêtement universel $p : \widetilde{Y_n} \to Y_n$.

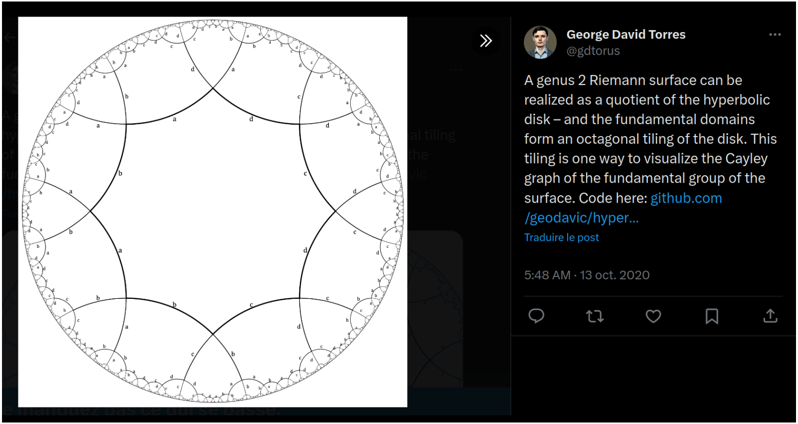


5) a) On considère le revêtement universel du tore à deux trous $p : (\mathbb{H}^2, x) \to (T_2, e)$ représenté ci-dessus. Faire figurer l'action par monodromie du groupe fondamental

$$\pi_1(T_2, e) = \langle a, b, c, d, \mid [a, b][c, d] = \emptyset \rangle$$

sur les huit sommets colorés de la fibre $p^{-1}(e)$.

Exos



5) b) Commenter ce tweet.