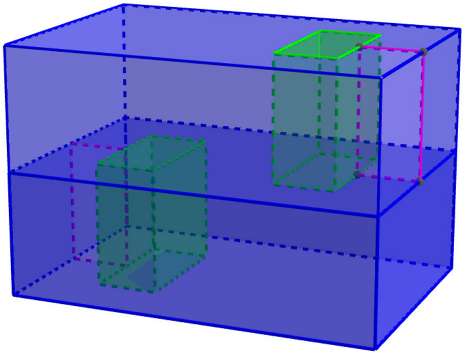
CM-TA2 : Homotopies

Vincent Borrelli

Université de Lyon



La "Bing's house" ou "maison à deux chambres"

Homotopies d'applications

Définition.– Soient X et Y deux espaces topologiques et $f, g : X \to Y$ deux applications continues. Une HOMOTOPIE ENTRE f ET g est une application continue

$$H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

telle que

- $\forall x \in X, \quad H(x,0) = f(x)$
- $\forall x \in X, \quad H(x,1) = g(x)$

Soit $A \subset X$. On dit que l'homotopie H est RELATIVE À A si de plus

- $\forall x \in A, \forall t \in [0,1], \quad H(x,t) = f(x) = g(x)$

Observons que pour qu'une telle homotopie soit possible il faut nécessairement $f_{|A} = g_{|A}$.

Homotopies d'applications

Proposition.– *Deux applications $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ sont toujours homotopes.*

Démonstration.– Il suffit de considérer

$$H(x,t) = t\,f(x) + (1-t)g(x) \qquad \square$$

• Cette démonstration reste valide si les applications $f, g : X \to Y$ sont à valeurs dans un sous-espace convexe $Y \subset \mathbb{R}^n$.

• Si l'espace d'arrivée Y n'est pas un sous-espace convexe alors l'interpolation linéaire entre f et g ne fournit plus une homotopie. Il faut en chercher une autre, si elle existe.

Homotopies d'applications

Exemple.– Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $n \geq m$ une application injective, C^∞ et de rang maximum, à savoir

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \text{rang } df_x = m.$$

Soient $X := \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^{m-1}$ et $Y := \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ (non convexe). On considère les deux applications de $C^0(X, Y)$ suivantes :

$$F(p, u) := f(p+u) - f(p) \quad \text{et} \quad G(p, u) := df_p(u)$$

où $x = (p, u) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^{m-1}$. Notons que comme f est injective, F ne s'annule jamais, et comme f est de rang maximum, G ne s'annule pas non plus.

• Les applications F et G sont homotopes au travers de

$$H(x, t) := \frac{f(p+tu) - f(p)}{t} \qquad \square$$

Homotopies d'applications

• On définit une relation binaire $\simeq$ dans $C^0(X, Y)$ par

$$f \simeq g \iff \text{il existe une homotopie entre } f \text{ et } g$$

Similairement, $f \simeq_A g$ si l'homotopie est relative à A.

Proposition.– *Les relations $\simeq$ et $\simeq_A$ sont des relations d'équivalence.*

Démonstration : Notons que $\simeq$ est un cas particulier de $\simeq_A$ avec $A = \emptyset$. On ne considère donc que $\simeq_A$.

• La relation est réflexive. Il suffit de prendre $H(x, t) := f(x)$.
• La relation est symétrique. Si H est une homotopie relative joignant f à g alors $\widetilde{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$ est une homotopie relative joignant g à f.

Homotopies d'applications

• La relation est transitive. Si H_1 est une homotopie relative joignant f et g et H_2 une homotopie relative joignant g et h alors H définie par

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ H_2(x,2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

$\square$

Notation.– L'ensemble des classes d'équivalence de $\simeq$ est noté $[X, Y]$.

Homotopies d'applications

Définition.– Soit $f \in C^0(X, Y)$. On dit que f est une ÉQUIVALENCE D'HOMOTOPIE s'il existe une application $g \in C^0(Y, X)$ telle que

$$f \circ g \simeq id_Y \quad \text{et} \quad g \circ f \simeq id_X .$$

Si une telle application existe, on dit g est un INVERSE HOMOTOPIQUE DE f et que X et Y ont MÊME TYPE D'HOMOTOPIE ou qu'ils sont HOMOTOPIQUEMENT ÉQUIVALENTS. On note $X \simeq Y$.

Exemple 1.– L'espace $\mathbb{R}^n$ et le singleton $\{O\} \subset \mathbb{R}^n$ ont même type d'homotopie : l'inclusion $i : \{O\} \subset \mathbb{R}^n$ est une équivalence d'homotopie dont un inverse homotopique est l'application constante $r : \mathbb{R}^n \to \{O\} \subset \mathbb{R}^n$.

Homotopies d'applications

• En effet, on a trivialement $r \circ i = id_{\{O\}}$ et $i \circ r$ est homotope à $id_{\mathbb{R}^n}$ par

$$H(x,t) := tx.$$

• Puisque l'origine O est fixe par H, on a aussi prouvé que $i \circ r \simeq_{\{O\}} id_{\mathbb{R}^n}$.

Exemple 2.– Les espaces $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ont même type d'homotopie : l'inclusion $i : \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est une équivalence d'homotopie dont un inverse homotopique est l'application $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ donnée par

$$r(x) := \frac{x}{\|x\|}.$$

Homotopies d'applications

• En effet, on a trivialement $r \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$ et $i \circ r$ est homotope à $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ par

$$H(x,t) := tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|}.$$

• Puisque la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ est fixe par H on a aussi prouvé que $i \circ r \simeq_{\{\mathbb{S}^{n-1}\}} id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$.

Exemple 3.– Soit $C \subset \mathbb{E}^n$ un convexe fermé et C_d son épaississement de largeur $d > 0$

$$C_d := \{x \in \mathbb{R} \,|\, d(x,C) \leq d\}$$

Les espaces C et C_d ont même type d'homotopie.

Homotopies d'applications

• L'inclusion $i : C \to C_d \setminus \{0\}$ est une équivalence d'homotopie dont un inverse homotopique est l'application

$$r : C_d \to C$$

donnée par la projection sur C. Autrement dit, $r(x)$ est l'unique point qui réalise la distance $d(x, C)$. Rappelons que r est 1-Lipschtzienne donc continue.

• On a trivialement $r \circ i = id_C$ et $i \circ r$ est homotope à id_{C_d} par

$$H(x, t) := tx + (1 - t)r(x).$$

Notons que si $x \in C$, alors $H(x, t) = x$ quelque soit t. L'homotopie est donc relative à C. On a montré $i \circ r \simeq_C id_C$.

Homotopies d'applications

Exemple 4.– Soit $M \subset \mathbb{E}^n$ une sous-variété orientée C^∞ et

$$Tub(\epsilon) := \{x = p + sn \,|\, p \in M, s \in [-\epsilon, \epsilon]\}$$

où $n : M \to \mathbb{S}^{n-1}$ est une normale unitaire et où ϵ est choisi suffisamment petit pour assurer que $Tub(\epsilon)$ soit un voisinage tubulaire. Alors $M \simeq Tub(\epsilon)$.

• L'inclusion $i : M \hookrightarrow Tub(\epsilon)$ est une équivalence d'homotopie dont un inverse homotopique est la projection $r(x) = p$. L'homotopie joignant $i \circ r$ à $id_{Tub(\epsilon)}$ est donnée par

$$H(x, t) := tx + (1 - t)r(x).$$

Elle est relative à M. On a donc $i \circ r \simeq_M id_{Tub(\epsilon)}$.

Homotopies d'applications

Proposition.– *Soient X et Y deux espaces homotopiquement équivalents, $X \simeq Y$. Si X est connexe alors Y est connexe.*

Démonstration.– Rappelons qu'un espace Y est connexe si et seulement si toute application continue

$$\alpha : Y \to \{0, 1\}$$

est constante. Soient $f : X \to Y$ une équivalence d'homotopie, $g : Y \to X$ un inverse homotopique de f et $\alpha : Y \to \{0, 1\}$ une application continue. Alors la composée

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha} \{0, 1\}$$

est une application constante $c = \alpha \circ f$ car X est connexe.

Homotopies d'applications

• La composée $\beta := \alpha \circ f \circ g : Y \to \{0,1\}$ est donc elle aussi constante.

• Puisque $g \circ f$ est homotope à id_Y, il existe une homotopie $\beta_t \in C^0(Y, \{0,1\})$ joignant $\beta_0 = \beta$ à $\beta_1 = \alpha$.

• Soit $y \in Y$. L'évaluation en y est une application continue à valeurs dans $\{0,1\}$

$$e_y : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \{0,1\} \\ t & \longmapsto & \beta_t(y). \end{array}$$

Elle est donc constante. Ceci qui montre que

$$\forall y \in Y, \qquad \beta(y) = \alpha(y).$$

• Mais alors $\alpha = \beta$ et puisque β est constante, α l'est également. $\square$

Rétractions

Définition.– Soit $A \subset X$. On dit que A est un RÉTRACT s'il existe $r \in C^0(X, A)$ telle que $r_{|A} = id_A$. L'application r est appelée une RÉTRACTION.

• La condition $r_{|A} = id_A$ est équivalente à $r \circ i = id_A$.

• Toutes les applications notées r dans les exemples précédents sont des rétractions. Ainsi

- $\{O\}$ est un rétract de $\mathbb{R}^n$
- $\mathbb{S}^{n-1}$ est un rétract de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- C est un rétract de C_d
- M est un rétract de $Tub(\epsilon)$

• Soit $x \in X$. L'application constante $c : X \to \{x\}$ est telle que $c_{|\{x\}} = id_{\{x\}}$. N'importe quel singleton $\{x\}$ d'un espace topologique X est donc un rétract de X.

Rétractions

Définition.– Soit $i : A \subset X$ l'inclusion. On dit que $r \in C^0(X, A)$ est une RÉTRACTION PAR DÉFORMATION si $i \circ r \simeq id_X$, on dit que c'est une RÉTRACTION FORTE PAR DÉFORMATION si $i \circ r \simeq_A id_X$.

• Toutes les applications notées r dans les exemples précédents sont des rétractions fortes par déformation.

Proposition.– Si $r : X \to A$ est une rétraction par déformation alors c'est une équivalence d'homotopie et donc $A \simeq X$.

Démonstration.– Soit $i : A \subset X$ l'inclusion. On a $i \circ r \simeq id_X$ par définition d'une rétraction par déformation. De manière évidente, on a aussi $r \circ i = id_A$. $\square$

Rétractions

Exemple d'application 1.– Si $r : X \to A$ est une rétraction et si A n'a pas le type d'homotopie de X alors r n'est pas une rétraction par déformation.

• En particulier si $x \in X$ et si X n'est pas connexe alors l'application constante $c : X \to \{x\}$ est une rétraction qui n'est pas une rétraction par déformation.

• En effet, si c'était le cas alors $\{x\}$ et X auraient le même type d'homotopie. D'après une propriété vue plus haut, puisque $\{x\}$ est connexe, ceci impliquerait que X est connexe. Contradiction.

Rétractions

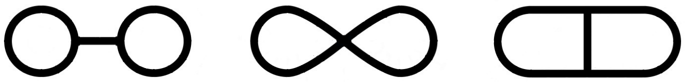


Image : Allen Hatcher

Exemple d'application 2.– Les trois CW-complexes figurés ci-dessus ont même type d'homotopie. En effet, ce sont tous les trois des rétracts par déformation la sphère privée de trois disques disjoints

$$X := \mathbb{S}^2 \setminus (D_1^2 \cup D_2^2 \cup D_3^2).$$

Rétractions

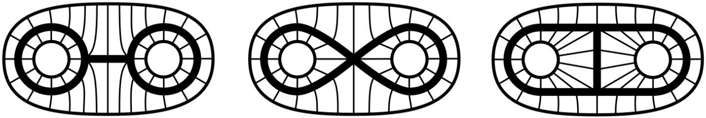


Image : Allen Hatcher

Exemple d'application 2.– Les trois CW-complexes figurés ci-dessus ont même type d'homotopie. En effet, ce sont tous les trois des rétracts par déformation la sphère privée de trois disques disjoints

$$X := \mathbb{S}^2 \setminus (D_1^2 \cup D_2^2 \cup D_3^2).$$

Rétractions

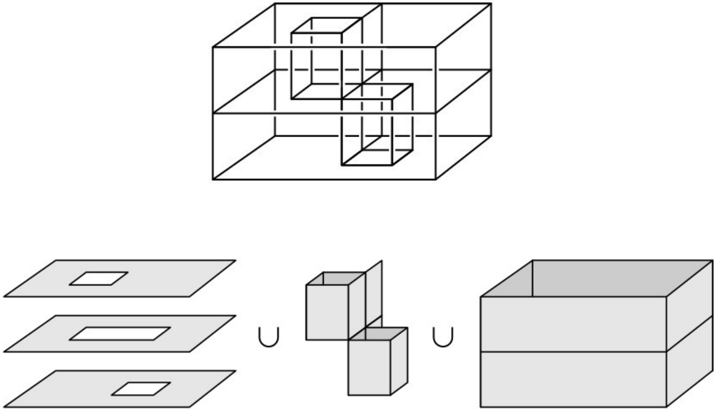


Image : Allen Hatcher

Exemple d'application 3.– La "Bing's house" est le CW-complexe X figuré ci-dessus.

Rétractions

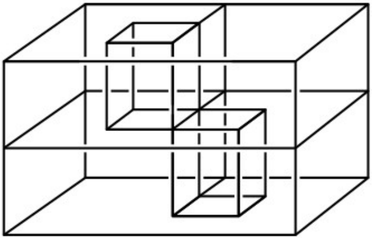


Image : Allen Hatcher

• On va constater que l'espace X est un retract par déformation de la boule B^3 ainsi $X \simeq B^3$, et puisque $B^3 \simeq \{pt\}$, on obtient par transitivité

$$X \simeq \{pt\}$$

Un résultat nullement évident...

Rétractions

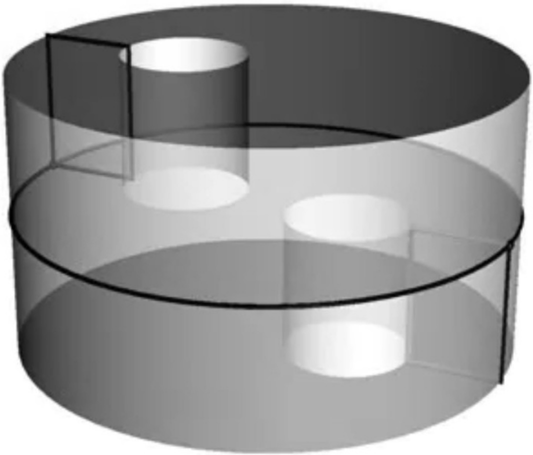


Image : Sketches of Topology

• Pour y voir plus clair, on bouge les murs (cette nouvelle représentation n'affecte pas le type d'homotopie)

Rétractions

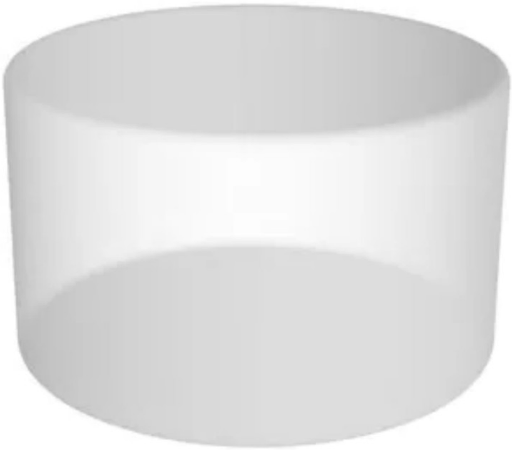


Image : Sketches of Topology

• On part de la boule B^3 vue comme une portion de cylindre plein.

Rétractions

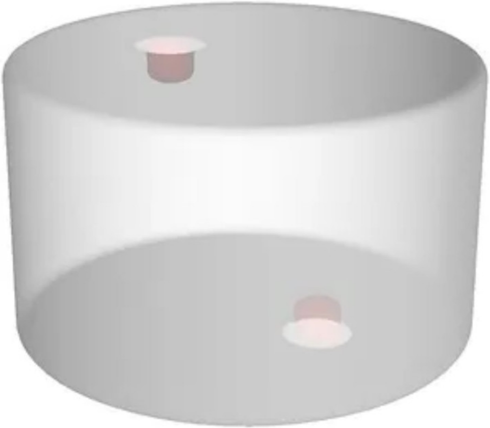


Image : Sketches of Topology

• On déforme B^3 en appuyant avec le doigt sur les faces inférieure et supérieure pour créer des trous.

Rétractions

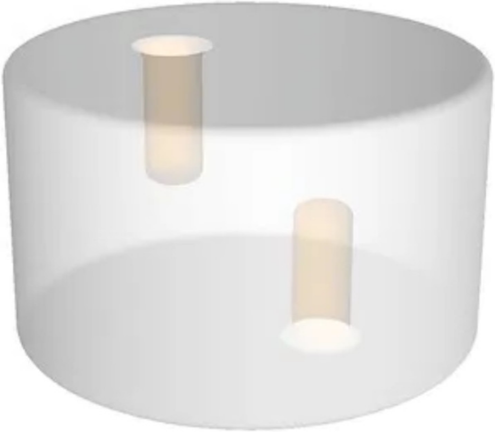


Image : Sketches of Topology

- On se laisse guider par les images...

Rétractions

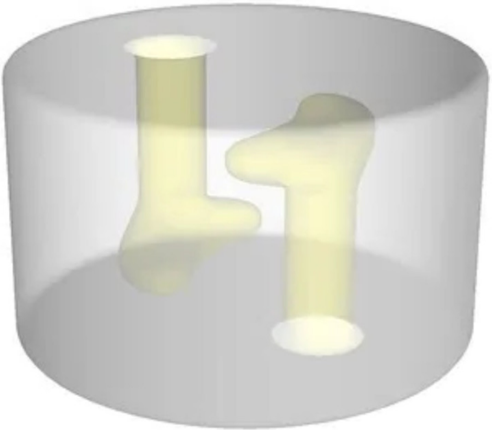


Image : Sketches of Topology

- On se laisse guider par les images...

Rétractions

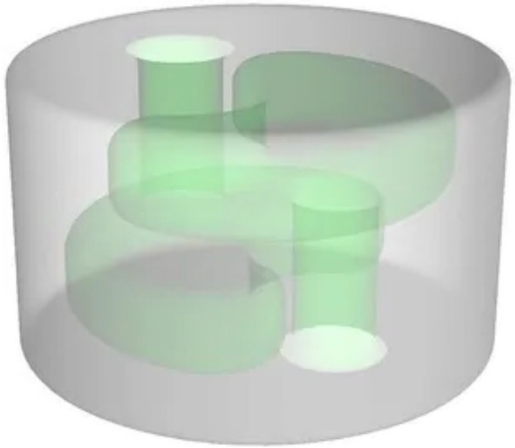


Image : Sketches of Topology

- On se laisse guider par les images...

Rétractions

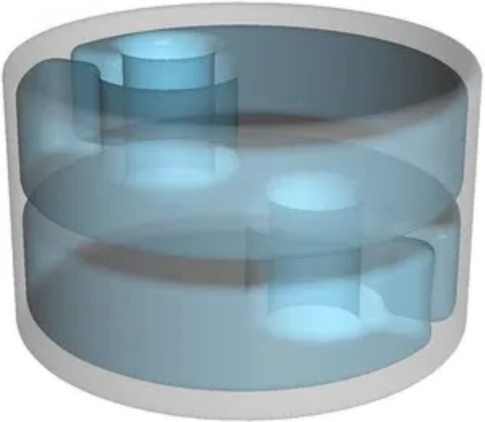
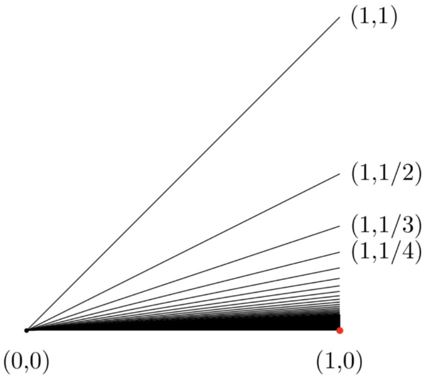


Image : Sketches of Topology

- On se laisse guider par les images... et voilà !

Rétractions



Observation.– Soient $A = (1, 0)$ et $X = \{0, 1\} \cup_{n \in \mathbb{N}^*} L_n$ où L_n est le segment qui joint $(0, 0)$ à $(1, 1/n)$. On peut montrer que A est un rétract par déformation de X et qu'il n'existe pas de rétraction par déformation forte de X sur A.

Rétractions

Définition.– On dit qu'un espace X est CONTRACTILE s'il a le type d'homotopie d'un singleton $\{pt\}$.

Exemples.– Les résultats précédents montrent que $\mathbb{R}^n$, B^n et la "Bing's house" sont des espaces contractiles.

Exemples.– Les domaines étoilés sont contractiles, en particulier les domaines convexes et les cônes.

Lemme.– *X est contractile ssi il existe $x_0 \in X$ telle que l'application constante $x \mapsto c_X(x) = x_0$ est homotope à id_X.*

Démonstration. – X contractile signifie qu'il existe $x_0 \in X$ telle que l'inclusion $i : \{x_0\} \to X$ est une équivalence d'homotopie.

Rétractions

• L'inverse homotopique ne peut être que l'application $r : X \to \{x_0\}$ et par conséquent $i \circ r \simeq id_X$. Puisque $i \circ r$ est précisément l'application constante c_X, on en déduit que celle dernière est homotope à id_X. La réciproque est tout aussi aisée. □

Proposition.– *Si Y est contractile et si $f, g \in C^0(X, Y)$ alors f et g sont homotopes $f \simeq g$.* Autrement dit, l'ensemble $[X, Y]$ est un singleton.

Remarque.– Cette proposition généralise le résultat obtenu en début de leçon énonçant que si Y est partie convexe de $\mathbb{R}^n$ alors deux applications $f, g \in C^0(X, Y)$ sont toujours homotopes.

Rétractions

Démonstration. – Supposons Y contractile. D'après le lemme, il existe $y_0 \in Y$ et une homotopie

$$H : Y \times [0,1] \longrightarrow Y$$

joignant id_Y à l'application constante $y \mapsto c_Y(y) = y_0$.

• Alors $(x,t) \mapsto H(f(x),t)$ est une homotopie joignant f à l'application constante $x \mapsto c_X(x) = y_0$. Ainsi

$$f \simeq c_X$$

• De même $g \simeq c_X$ et par transitivité $f \simeq g$ $\square$

Exos

1) On suppose que X et Y sont homéomorphes. Montrer qu'ils ont même type d'homotopie. Réciproque ?

2) a) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que $[a, b]$ est un rétract de $\mathbb{R}$.

b) Soit X un espace topologique (séparé), montrer que la diagonale

$$\Delta X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

est un fermé de $X \times X$.

c) Soit $r : X \to X$ une rétraction sur $A \subset X$. Montrer que l'ensemble de coïncidence $\mathcal{S}$ de id_X et de r :

$$\mathcal{S} = \{x \in X \mid r(x) = id_X(x)\}$$

est un fermé de X.

d) En déduire que A est un fermé de X.

e) Montrer que $]a, b[$ n'est le rétract d'aucun intervalle le contenant strictement.

Exos

3) a) Soient $0 < k < n$ deux entiers. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{n-k-1}$.
b) On suppose que A et B sont deux espaces topologiques ayant même type d'homotopie. Est-il vrai que $\mathbb{R}^n \setminus A$ et $\mathbb{R}^n \setminus B$ ont le même type d'homotopie ?

4) a) Existe-t-il des éléments de $A \in O(n+1)$ tels que l'application induite $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ n'ait aucun point fixe ? On explorera les cas $n = 1$ et $n = 2$.
b) Montrer que toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ n'ayant pas de point fixe est homotope à l'application antipodie $a(x) = -x$.

Exos

5) Soit X un espace topologique compact. On appelle CONE AU DESSUS DE X l'espace

$$CX = X \times [0,1]/X \times \{0\}$$

a) Montrer que CX est un espace compact.
b) Montrer que CX est contractile.

6) a) Soit $P \in \mathbb{S}^n$. Montrer que la sphère épointée $\mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes.
b) Soit X un espace topologique. Montrer que si $f : X \to \mathbb{S}^n$ n'est pas surjective alors elle est homotope à une application constante.