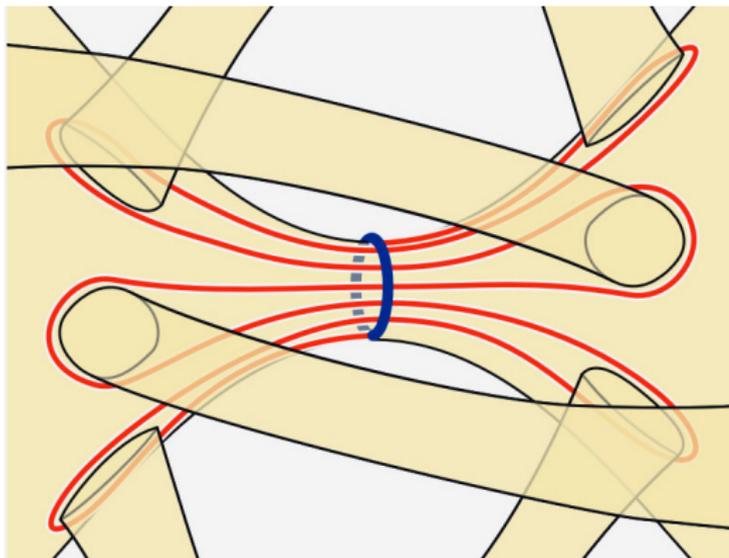


CM-TA3 : Le groupe fondamental

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Un lacet (en bleu) et un chemin (en rouge) sur une surface (Image : F. Lazarus)

La concaténation des chemins

Définition.— Soit X un espace topologique et $x_0, x_1 \in X$.
On appelle CHEMIN JOIGNANT x_0 à x_1 toute application
continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ telle que

$$\gamma(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \gamma(1) = x_1.$$

On appelle LACET BASÉ EN x_0 tout chemin tel que

$$\gamma(0) = \gamma(1) = x_0.$$

Notations.— On note

$$L(X, x_0, x_1) \quad \text{et} \quad \Omega(X, x_0)$$

l'espace des chemins joignant x_0 à x_1 et l'espace des lacets
basés en x_0 . Ces deux espaces sont des sous-espaces de
 $C^0([0, 1], X)$.

La concaténation des chemins

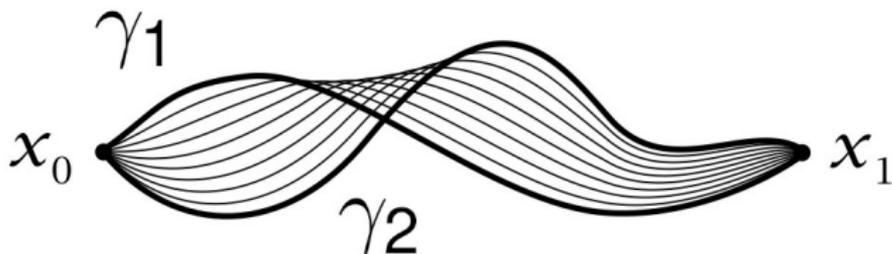


Image : Allen Hatcher

- Sur ces espaces, on note \simeq_{∂} la relation d'homotopie pointée, c'est-à-dire que $\gamma_1 \simeq_{\partial} \gamma_2$ signifie qu'il existe une homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

$$\forall t \in [0, 1], \quad H(0, t) = x_0 \quad \text{et} \quad H(1, t) = x_1$$

et bien sûr $H(s, 0) = \gamma_1(s)$ et $H(s, 1) = \gamma_2(s)$.

La concaténation des chemins

Définition.— Soient $\gamma_1 \in L(X, x_0, x_1)$ et $\gamma_2 \in L(X, x_1, x_2)$. La
CONCATÉNATION de γ_1 et γ_2 est le chemin noté

$$\gamma_1 * \gamma_2 \in L(X, x_0, x_2)$$

défini par

$$\gamma_1 * \gamma_2(s) := \begin{cases} \gamma_1(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2s - 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Proposition 1.— Soient $\gamma_1, \delta_1 \in L(X, x_0, x_1)$ et
 $\gamma_2, \delta_2 \in L(X, x_1, x_2)$. Alors

$$(\gamma_1 \simeq_{\partial} \delta_1 \quad \text{et} \quad \gamma_2 \simeq_{\partial} \delta_2) \implies \gamma_1 * \gamma_2 \simeq_{\partial} \delta_1 * \delta_2.$$

La concaténation des chemins

Démonstration.— Soient H_1 (resp. H_2) l'homotopie entre γ_1 et γ_2 (resp. entre δ_1 et δ_2). L'application

$$H(s, t) := \begin{cases} H_1(2s, t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ H_2(2s - 1, t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

définit une homotopie entre $\gamma_1 * \gamma_2$ et $\delta_1 * \delta_2$. □

Notations.— 1) On note $c_{x_0} \in \Omega(X, x_0)$ le lacet constant

$$\forall s \in [0, 1], \quad c_{x_0}(s) = x_0$$

2) Soit $\gamma \in L(X, x_0, x_1)$, on note $\bar{\gamma} \in L(X, x_1, x_0)$ le chemin défini par

$$\forall s \in [0, 1], \quad \bar{\gamma}(s) := \gamma(1 - s)$$

La concaténation des chemins

Proposition 2.– Soit $\gamma \in L(X, x_0, x_1)$. On a

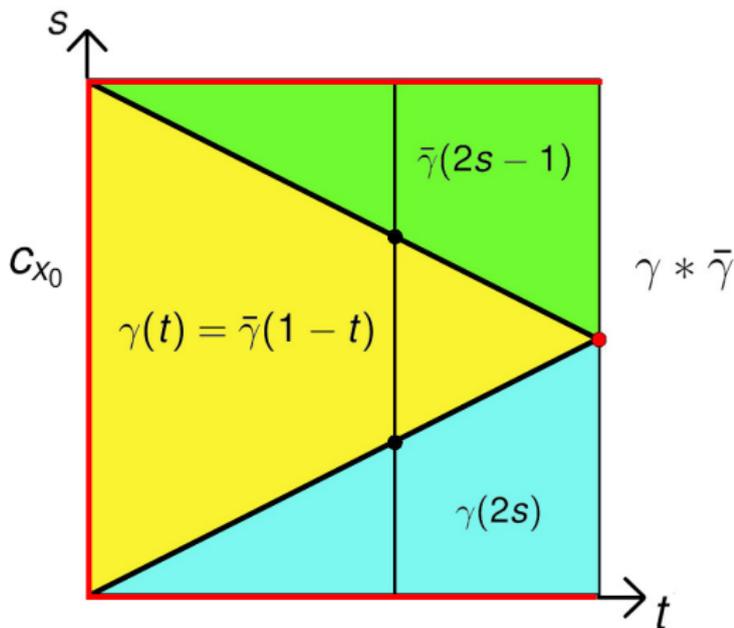
$$\gamma * \bar{\gamma} \simeq_{\partial} c_{x_0} \quad \text{et} \quad \bar{\gamma} * \gamma \simeq_{\partial} c_{x_1}.$$

Démonstration.– L'application $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$
définie par

$$H(s, t) := \begin{cases} \gamma(2s) & \text{si } s \leq \frac{t}{2} \\ \gamma(t) = \bar{\gamma}(1 - t) & \text{si } \frac{t}{2} \leq s \leq 1 - \frac{t}{2} \\ \bar{\gamma}(2s - 1) & \text{si } s \geq 1 - \frac{t}{2} \end{cases}$$

est une homotopie joignant $H(\cdot, 0) = c_{x_0}$ à $H(\cdot, 1) = \gamma * \bar{\gamma}$. \square

La concaténation des chemins



Description visuelle de l'homotopie H . La couleur rouge souligne les points envoyés sur x_0 . La verticale $t = 0$ correspond à c_{x_0} et la verticale $t = 1$ à la concaténation $\gamma * \bar{\gamma}$

La concaténation des chemins

Proposition 3.– Soient $\gamma_0 \in L(X, x_0, x_1)$, $\gamma_1 \in L(X, x_1, x_2)$ et $\gamma_2 \in L(X, x_2, x_3)$. On a

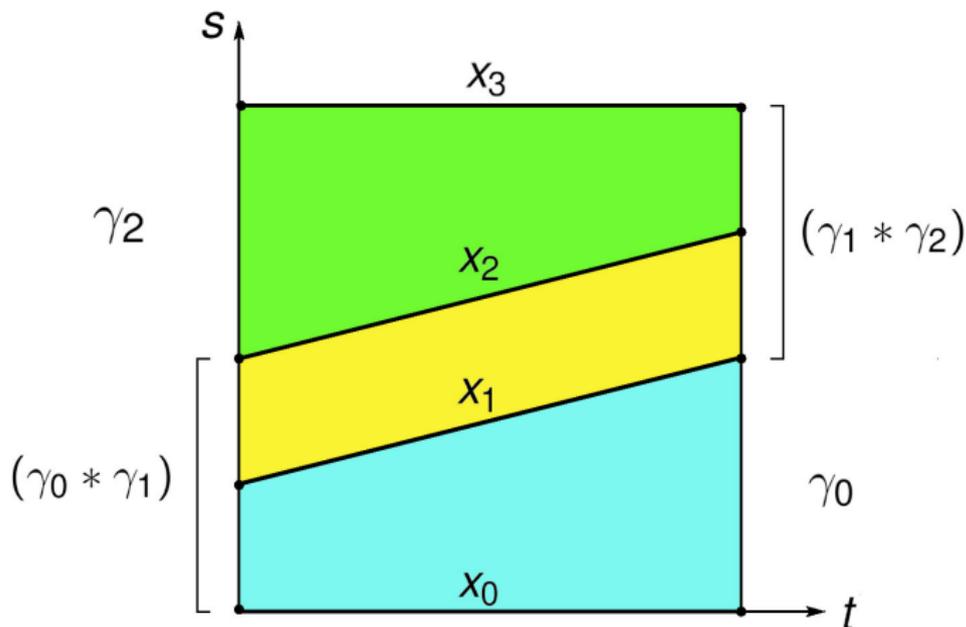
$$(\gamma_0 * \gamma_1) * \gamma_2 \simeq_{\partial} \gamma_0 * (\gamma_1 * \gamma_2).$$

Démonstration.– L'application $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ définie par

$$H(s, t) := \begin{cases} \gamma_0\left(\frac{4s}{1+t}\right) & \text{si } s \leq \frac{1}{4} + \frac{t}{4} \\ \gamma_1(4s - t - 1) & \text{si } \frac{1}{4} + \frac{t}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} + \frac{t}{4} \\ \gamma_2\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & \text{si } s \geq \frac{1}{2} + \frac{t}{4} \end{cases}$$

est une homotopie joignant $H(\cdot, 0) = (\gamma_0 * \gamma_1) * \gamma_2$ à $H(\cdot, 1) = \gamma_0 * (\gamma_1 * \gamma_2)$. □

La concaténation des chemins



Description visuelle de l'homotopie H . Sur la ligne $s = \frac{1}{4} + \frac{t}{4}$ l'homotopie prend la valeur x_1 , sur la ligne $s = \frac{1}{2} + \frac{t}{4}$ elle prend la valeur x_2 . La verticale $t = 0$ correspond à $(\gamma_0 * \gamma_1) * \gamma_2$ et la verticale $t = 1$ à $\gamma_0 * (\gamma_1 * \gamma_2)$.

La concaténation des chemins

Proposition 4.– Soient $\gamma \in L(X, x_0, x_1)$, on a

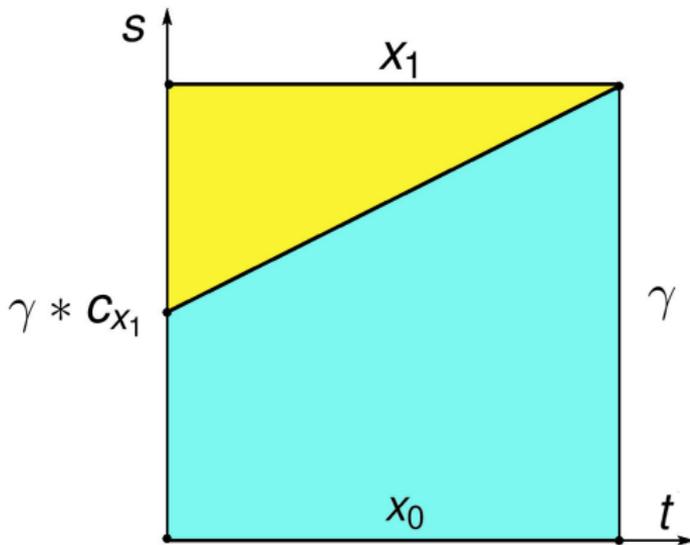
$$\gamma * c_{x_1} \simeq_{\partial} c_{x_0} * \gamma \simeq_{\partial} \gamma.$$

Démonstration.– L'application

$$H(s, t) := \begin{cases} \gamma\left(\frac{2s}{t+1}\right) & \text{si } s \in [0, \frac{t+1}{2}] \\ x_1 & \text{si } s \in [\frac{t+1}{2}, 1] \end{cases}$$

définit une homotopie entre $\gamma * c_{x_1}$ et γ .

La concaténation des chemins



- D'après la proposition 2 :

$$c_{X_0} \simeq_{\partial} \gamma * \bar{\gamma} \quad \text{et} \quad c_{X_1} \simeq_{\partial} \bar{\gamma} * \gamma.$$

- D'après la proposition 3:

$$\gamma * c_{X_1} \simeq_{\partial} \gamma * (\bar{\gamma} * \gamma) \simeq_{\partial} (\gamma * \bar{\gamma}) * \gamma \simeq_{\partial} c_{X_0} * \gamma.$$

Le groupe fondamental

- On note : $\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0) / \simeq_{\partial}$ et on définit sur cet ensemble un produit " \cdot " par

$$[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2].$$

- La proposition 1 montre que ce produit est bien défini, il ne dépend pas des éléments choisis pour représenter chaque classe.

Théorème 1. – *L'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ muni du produit \cdot est un groupe (non commutatif en général).*

Démonstration.– La proposition 4 montre que l'élément neutre est la classe $[c_{x_0}]$ du chemin constant, la proposition que tout élément $[\gamma]$ a pour inverse $[\bar{\gamma}]$ et la proposition 3 l'associativité. □

Le groupe fondamental

Définition.— Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ s'appelle le GROUPE FONDAMENTAL DE X .

- Notons que l'on ne dit pas : "le groupe fondamental de la paire (X, x_0) ". Ceci est justifié par la proposition suivante.

Proposition 5.— Soit $u : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin joignant $x_0 := u(0)$ à $x_1 := u(1)$. Alors, l'application

$$\begin{aligned} \beta_u : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\longmapsto [\bar{u} * \gamma * u] \end{aligned}$$

est isomorphisme de groupes.

Le groupe fondamental

Démonstration.— Remarquons d'abord que l'application est bien définie grâce aux propositions 1 et 3.

- L'application β_u est un morphisme, en effet

$$\begin{aligned}\beta_u([\gamma_1 * \gamma_2]) &= [\bar{u} * \gamma_1 * \gamma_2 * u] \\ &= [\bar{u} * \gamma_1 * u * \bar{u} * \gamma_2 * u] \\ &= \beta_u([\gamma_1]) \cdot \beta_u([\gamma_2]).\end{aligned}$$

- L'application β_u a pour inverse $\beta_{\bar{u}}$, en effet

$$\begin{aligned}\beta_{\bar{u}} \circ \beta_u([\gamma]) &= \beta_{\bar{u}}([\bar{u} * \gamma * u]) \\ &= [u * \bar{u} * \gamma * u * \bar{u}] \\ &= [\gamma]\end{aligned}$$

et similairement pour $\beta_u \circ \beta_{\bar{u}}$.



Le groupe fondamental

Définition.— On dit qu'un espace topologique X est CONNEXE PAR ARCS si tout couple de point $(x_1, x_2) \in X \times X$ peut être joint par un chemin X , autrement dit si $L(X, x_1, x_2)$ est non vide.

Corollaire 1.— *Soient X connexe par arcs et $x_0, x_1 \in X$. Alors $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ sont isomorphes.*

Observation.— En général, cet isomorphisme n'est pas canonique car β_u dépend de la classe dans $L(X, x_0, x_1)$ du chemin u choisi pour joindre x_0 à x_1 .

Définition.— Un espace topologique X est dit SIMPLEMENT CONNEXE s'il est connexe par arcs et s'il existe $x_0 \in X$ tel que $\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$.

Le groupe fondamental

Remarque.– D'après le corollaire 1, si X est simplement connexe, alors pour tout point $x \in X$, on a $\pi_1(X, x) = \{[c_x]\}$.

Exemple 1.– L'espace $X = \{x_0\}$ est simplement connexe.

Exemple 2.– Tout espace contractile X est simplement connexe. L'homotopie joignant $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ à c_{x_0} est induite par l'homotopie joignant id_X à $i \circ r$ où $i : \{x_0\} \subset X$ et $r : X \rightarrow \{x_0\}$.

Le groupe fondamental

- Soient $f \in C^0(X, Y)$, $x_0 \in X$ et $y_0 = f(x_0)$, on définit une application

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

en posant

$$f([\gamma]) := [f \circ \gamma].$$

Cette application est bien définie car si $\gamma \simeq_{\partial} \delta$ alors $f \circ \gamma \simeq_{\partial} f \circ \delta$.

Proposition 6.– *L'application f_* est un morphisme de groupes.*

Démonstration.– On a

$$f([\gamma] \cdot [\delta]) = f([\gamma * \delta]) = [f(\gamma * \delta)]$$

$$f([\gamma]) \cdot f([\delta]) = [f \circ \gamma] \cdot [f \circ \delta] = [(f \circ \gamma) * (f \circ \delta)]$$

Le groupe fondamental

- Montrons que $f(\gamma * \delta) = (f \circ \gamma) * (f \circ \delta)$. En effet, le lacet $\gamma * \delta$ est donnée par

$$(\gamma * \delta)(s) := \begin{cases} \gamma(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2s - 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Donc

$$f(\gamma * \delta)(s) := \begin{cases} f(\gamma(2s)) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(\delta(2s - 1)) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Quant au lacet $(f \circ \gamma) * (f \circ \delta)$ il est donnée par

$$(f \circ \gamma) * (f \circ \delta)(s) := \begin{cases} (f \circ \gamma)(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (f \circ \delta)(2s - 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Le groupe fondamental

Proposition 7.– *On a*

- $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$
- *Soient $f_1, f_2 \in C^0((X, x_0), (Y, y_0))$ alors*

$$f_1 \simeq_{\partial} f_2 \implies (f_1)_* = (f_2)_*$$

- *Soient $f \in C^0((X, x_0), (Y, y_0))$, $g \in C^0((Y, y_0), (Z, z_0))$ alors*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

En particulier, si f est inversible alors f_ l'est et*

$$(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*.$$

Démonstration.– En exercice.



Le groupe fondamental

Théorème 2.— Soient X et Y connexes par arcs. Si X et Y ont même type d'homotopie alors $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(Y, y_0)$ sont isomorphes pour tout choix $(x_0, y_0) \in X \times Y$.

- En particulier si X et Y sont homéomorphes (et c.p.a.) alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.

Démonstration.— Puisque $X \simeq Y$, il existe $f \in C^0(X, Y)$ et $g \in C^0(Y, X)$ telles que $g \circ f \simeq id_X$ et $f \circ g \simeq id_Y$. Nous allons montrer que

$$g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$$

et

$$f_* \circ g_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(g(y_0)))$$

sont des isomorphismes. Ceci implique en effet que f_* et g_* sont des isomorphismes.

Le groupe fondamental

- Montrons d'abord que

$$g_* \circ f_* = \beta_u$$

où u le chemin joignant x_0 à $g(f(x_0))$ défini par

$$u(t) = H(x_0, 1 - t)$$

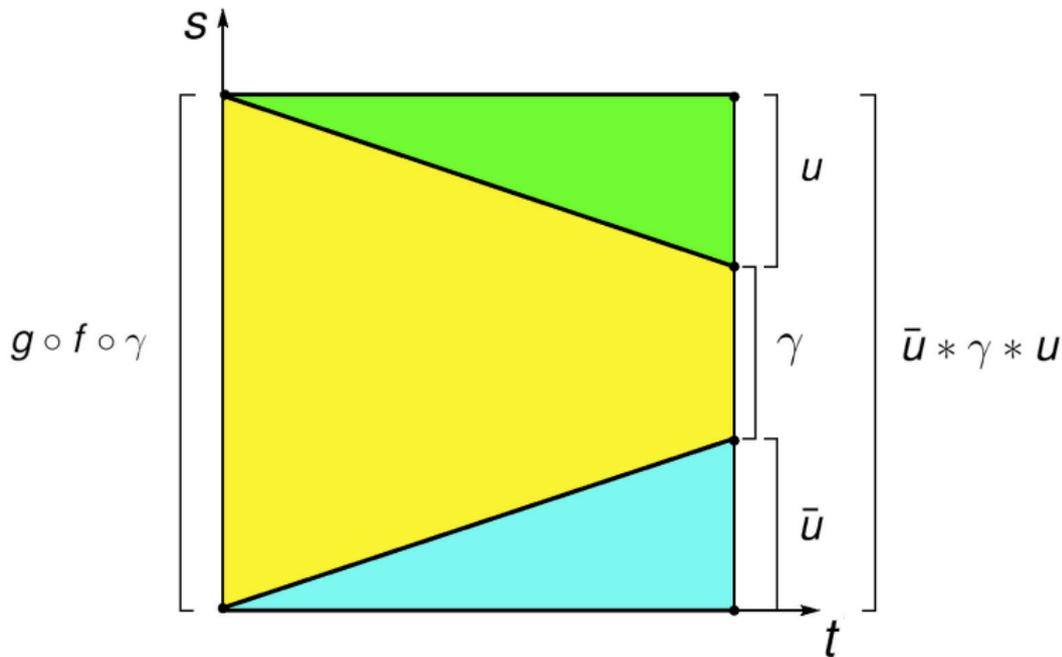
et où H est l'homotopie joignant $g \circ f$ à id_X .

- Soit $\gamma \in \Omega(X, x_0)$. L'application F définie par

$$F(s, t) := \begin{cases} \bar{u}(3s) & \text{si } s \in [0, \frac{t}{3}] \\ H(\gamma(\frac{3s-t}{3-2t}), t) & \text{si } s \in [\frac{t}{3}, 1 - \frac{t}{3}] \\ u(3s - 2) & \text{si } s \in [1 - \frac{t}{3}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie joignant $g \circ f \circ \gamma = H(\cdot, 0)$ à $\bar{u} * \gamma * u = H(\cdot, 1)$.

Le groupe fondamental



Description visuelle de l'homotopie H . Le long de la ligne $s = \frac{t}{3}$ l'homotopie prend la valeur $\bar{u}(t) = u(1 - t) = H(x_0, t)$, le long de la ligne $s = 1 - \frac{t}{3}$ elle prend la valeur $u(1 - t) = H(x_0, t)$. Elle vaut $g(f(x_0))$ sur les segments horizontaux $s = 0$ et $s = 1$.

Le groupe fondamental

- On en déduit $[g \circ f \circ \gamma] = [\bar{u} * \gamma * u]$ soit encore

$$(g_* \circ f_*)([\gamma]) = \beta_u([\gamma])$$

pour tout γ .

- D'après la proposition 5, l'application β_u est un isomorphisme de groupes. On en déduit que $g_* \circ f_*$ est un isomorphisme de groupes.
- On montre que $f_* \circ g_*$ est un isomorphisme de groupes par un raisonnement similaire. □

Exos

1) On considère le morphisme β_u de la proposition 5.
Montrer que

a) Si $u \simeq_{\partial} u'$ alors $\beta_u = \beta_{u'}$

b) $\beta_{c_{x_0}} = id$

c) $\beta_{u*v} = \beta_v \circ \beta_u$

d) On suppose $u \in \Omega(X, x_0)$. Quelle est la nature de β_u ?

2) Soit X un espace connexe par arcs. Montrer que X est simplement connexe ssi pour tout couple $(x_0, x_1) \in X \times X$ et tout couple de chemins (γ_1, γ_2) de $L(X, x_0, x_1)$ on a $\gamma_1 \simeq_{\partial} \gamma_2$.

Exos

3) Un *groupe topologique* est un groupe (G, \star) muni d'une topologie pour laquelle les applications

$$G^2 \rightarrow G, (x, y) \mapsto x \star y \quad \text{et} \quad G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$$

sont continues.

a) Donner des exemples de groupes topologiques.

b) On note $e \in G$ l'élément neutre. Soit $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(G, e)$.

Montrer que \star définit une loi de composition sur $\pi_1(G, e)$ par

$$[\gamma_1] \star [\gamma_2] := [\gamma_1 \star \gamma_2].$$

c) En remarquant que

$$\gamma_1 \star \gamma_2 = (\gamma_1 \star c_e) \star (c_e \star \gamma_2)$$

montrer que le groupe $\pi_1(G, e)$ est abélien.

4) Montrer les assertions de la proposition 7 :

Proposition 7.– *On a*

a) $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$

b) *Soient $f_1, f_2 \in C^0((X, x_0), (Y, y_0))$ alors*

$$f_1 \simeq_{\partial} f_2 \implies (f_1)_* = (f_2)_*$$

c) *Soient $f \in C^0((X, x_0), (Y, y_0))$, $g \in C^0((Y, y_0), (Z, z_0))$
alors*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

En particulier, si f est inversible alors f_ l'est et*

$$(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*.$$

5) Soient $p_X : X \times Y \rightarrow X$ et $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$ les projections canoniques, et

$$p_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

défini par

$$p_*([\gamma]) := ((p_X)_*[\gamma], (p_Y)_*[\gamma])$$

Montrer que p_* est un isomorphisme de groupes.