CM-TA4 : L'ouroboros mathématique

Vincent Borrelli

Université de Lyon

Un ouroboros (Image : Wikimedia commons)

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

• On considère l'application

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & e^{2i\pi s}. \end{array}$$

qui est continue, 1-périodique et réalise un épimorphisme de groupe entre $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{S}^1, \times)$ dont le noyau est $\mathbb{Z}$.

• Notons que si $\widetilde{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est un chemin de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont des points de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ alors $\gamma := p \circ \widetilde{\gamma}$ est un lacet de $\mathbb{S}^1$ basé en $z = 1$.

• Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit $\widetilde{\omega_n} \in L(\mathbb{R}, 0, n)$ et $\omega_n \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1)$ par

$$\widetilde{\omega_n}(s) := ns \quad \text{et} \quad \omega_n(s) := (p \circ \widetilde{\omega_n})(s) = e^{2in\pi s}.$$

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

Théorème 1.– *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \\ & n & \longmapsto & [\omega_n] \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Stratégie de la démonstration.– On procède en trois étapes

- On montre d'abord que Φ est un morphisme de groupe
- On montre ensuite une propriété de *relèvement*
- Grâce à cette propriété, on montre que Φ est injectif et surjectif.

Le point le plus délicat est la propriété de relèvement. Nous allons le traiter à part, en préambule.

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

Propriété de relèvement (1).– *Soient* $\gamma \in L(\mathbb{S}^1, x_0, x_1)$ *un chemin de* $\mathbb{S}^1$ *et* $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, *alors il existe un unique relevé* $\widetilde{\gamma}$ *de* γ *partant de* $\widetilde{x}_0 \in \mathbb{R}$, *c'est-à-dire une application* $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ *telle que* $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{x}_0$. *et* $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

Propriété de relèvement (2).– *Si* $H : [0,1]^2 \to \mathbb{S}^1$ *est une homotopie relative joignant deux chemins* $\gamma_1, \gamma_2 \in L(\mathbb{S}^1, x_0, x_1)$ *:*

$$H(s,0) = \gamma_1(s), \quad H(s,1) = \gamma_2(s)$$

$$H(0,t) = x_0, \quad H(1,t) = x_1$$

et si $\widetilde{\gamma}_1$ *est un relevé de* γ_1 *alors il existe une unique homotopie* $\widetilde{H} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *telle que* $p \circ \widetilde{H} = H$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]^2} \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

et $\widetilde{H}(s,0) = \widetilde{\gamma}_1(s)$.

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

Démonstration de la propriété de relèvement. – Remarquons que la restriction p à l'intervalle $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ est inversible et son inverse est $\psi := \frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}$ où

$$\mathrm{Arg} : \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\} \to]-\pi, \pi[\subset \mathbb{R}$$

est l'argument principal défini par

$$\mathrm{Arg}(z) := 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{y = 0 \text{ et } x \leq 0\}$.

• Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1$, remarquons que $\mathrm{Arg}\,(z_2/z_1)$ est défini ssi $z_2 \neq -z_1$, ou encore, ssi $|z_2 - z_1| < 2$.

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

- Puisque $[0,1]$ est compact, l'application $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ est uniformément continue. Il existe un entier $N > 0$ tel que

$$|s-t| \leq \frac{1}{N} \quad \Longrightarrow \quad |\gamma(s) - \gamma(t)| < 2$$

- Définissons $\widetilde{\gamma}$ par

$$\widetilde{\gamma}(s) := \sum_{\ell=0}^{N-1} \psi\left(\gamma\left(\frac{\ell+1}{N}s\right)/\gamma\left(\frac{\ell}{N}s\right)\right) + \widetilde{x}_0$$

Cette application est bien définie grâce au choix de N effectué plus haut. Elle est continue car composée d'applications continues (sur leurs ensembles de définition).

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

- Puisque $p : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \times)$ est un morphisme de groupes, on a

$$\begin{aligned}(p \circ \widetilde{\gamma})(s) &= p \circ \left(\sum_{\ell=0}^{N-1} \psi \left(\gamma \left(\tfrac{\ell+1}{N} s \right) / \gamma \left(\tfrac{\ell}{N} s \right) \right) + \widetilde{x}_0 \right) \\ &= \left(\prod_{\ell=0}^{N-1} p \circ \psi \left(\gamma \left(\tfrac{\ell+1}{N} s \right) / \gamma \left(\tfrac{\ell}{N} s \right) \right) \right) p(\widetilde{x}_0).\end{aligned}$$

- Puisque $p \circ \psi = id_{\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}}$ on en déduit

$$\begin{aligned}(p \circ \widetilde{\gamma})(s) &= \left(\prod_{\ell=0}^{N-1} \gamma \left(\tfrac{\ell+1}{N} s \right) / \gamma \left(\tfrac{\ell}{N} s \right) \right) x_0 \\ &= (\gamma(s)/\gamma(0))\, x_0.\end{aligned}$$

- Puisque $\gamma(0) = x_0$, il s'en suit que $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

• Montrons l'unicité du relèvement. Soit $\widetilde{\gamma}'$ un second relèvement de γ tel que $\widetilde{\gamma}'(0) = \widetilde{x}_0$. Puisque $p \circ \widetilde{\gamma}' = p \circ \widetilde{\gamma}$ cela signifie que la différence

$$\widetilde{\gamma}' - \widetilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \ker p = \mathbb{Z}$$

est à valeurs dans le noyau de p, c'est-à-dire $\mathbb{Z}$.

• Puisque $\widetilde{\gamma}' - \widetilde{\gamma}$ est continue, elle est donc constante.

• Puisque $\widetilde{\gamma}'(0) = \widetilde{\gamma}(0)$, cette constante vaut zéro, ce qui signifie que $\widetilde{\gamma}' = \widetilde{\gamma}$.

• La démonstration concernant l'existence et l'unicité du relèvement de l'homotopie H procède du même principe en remplaçant l'espace $[0,1]$ par $[0,1] \times [0,1]$. $\square$

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

Démonstration du théorème 1.– Montrons d'abord que Φ est un morphisme.

• Considérons t_m la translation $x \mapsto x + m$. On a

$$t_m \circ \widetilde{\omega}_n \in L(\mathbb{R}, m, m + n)$$

et

$$\widetilde{\omega}_m * (t_m \circ \widetilde{\omega}_n) \in L(\mathbb{R}, 0, m + n).$$

• Puisque $\mathbb{R}$ est simplement connexe et que $\widetilde{\omega}_{m+n} \in L(\mathbb{R}, 0, m + n)$, on a

$$\widetilde{\omega}_m * (t_m \circ \widetilde{\omega}_n) \simeq_\partial \widetilde{\omega}_{m+n}$$

et donc

$$\Phi(m + n) = [p \circ \widetilde{\omega}_{m+n}] = [p \circ (\widetilde{\omega}_m * (t_m \circ \widetilde{\omega}_n))].$$

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

- Puisque $f \circ (\gamma_1 * \gamma_2) = (f \circ \gamma_1) * (f \circ \gamma_2)$ on déduit

$$p \circ (\widetilde{\omega}_m * (t_m \circ \widetilde{\omega}_n)) = (p \circ \widetilde{\omega}_m) * p \circ (t_m \circ \widetilde{\omega}_n)$$

et comme p est 1-périodique

$$p \circ (t_m \circ \widetilde{\omega}_n) = p \circ \widetilde{\omega}_n.$$

- Ainsi

$$\begin{aligned} \Phi(m+n) &= [(p \circ \widetilde{\omega}_m) * (p \circ \widetilde{\omega}_n)] \\ &= [\omega_m * \omega_n] \\ &= [\omega_m] \cdot [\omega_n] \\ &= \Phi(m) \cdot \Phi(n). \end{aligned}$$

et l'on a montré que Φ est un morphisme de groupes.

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

- Montrons maintenant que Φ est surjectif. Soit $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. D'après la propriété de relèvement, il existe un unique $\widetilde{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tel que $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et $\widetilde{\gamma}(0) = 1$.

- Puisque $p \circ \widetilde{\gamma}(1) = \gamma(1) = 1$, il s'en suit que $\widetilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$.

- Donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\widetilde{\gamma}(1) = n$ et donc $\widetilde{\gamma} \in L(\mathbb{R}, 0, n)$.

- Puisque $\mathbb{R}$ est simplement connexe, les chemins $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\omega}_n$ sont relativement homotopes dans $L(\mathbb{R}, 0, n)$.

- Il en est donc de même des lacets $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et $p \circ \widetilde{\omega}_n = \omega_n$ dans $\Omega(\mathbb{S}^1, 1)$.

- Par conséquent, $[\gamma] = [\omega_n]$ et donc $\Phi(n) = [\gamma]$.

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

• Il reste à montrer que Φ est injectif. Supposons que $\Phi(m) = \Phi(n)$. Cela signifie que ω_m et ω_n sont homotopes dans $(\mathbb{S}^1, 1)$.

• Soit H une homotopie dans $(\mathbb{S}^1, 1)$ entre ω_m et ω_n. D'après la propriété de relèvement, il existe une unique homotopie $\widetilde{H}$ telle que

- $\widetilde{H}(s, 0) = \widetilde{\omega}_m$
- $\widetilde{H}(s, 1) = \widetilde{\omega}_n$
- $\widetilde{H}(0, t) = 0$
- $p \circ \widetilde{H} = H$.

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

• Considérons $t \mapsto \widetilde{H}(1,t)$. Puisque pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$p \circ \widetilde{H}(1,t) = H(1,t) = 1,$$

l'application $t \mapsto \widetilde{H}(1,t)$ est à valeur dans $\ker p = \mathbb{Z}$.

• Puisque cette application est continue, elle est constante. Ainsi

$$m = \widetilde{H}(1,0) = \widetilde{H}(1,1) = n$$

ce qui montre que Φ est injective. $\square$

Corollaire 1.– *L'espace $\mathbb{S}^1$ n'est pas simplement connexe. Il s'en suit que tout espace topologique X ayant le type d'homotopie de $\mathbb{S}^1$ n'est pas simplement connexe.*

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

Démonstration du corollaire 1.– D'après la proposition 1, le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ contient une infinité d'éléments et donc n'est pas réduit à l'élément $[c_1]$. D'après le théorème 2 de TA3, si X et $\mathbb{S}^1$ ont même type d'homotopie alors les groupes fondamentaux sont isomorphes et donc X n'est pas simplement connexe. □

Corollaire 2.– L'espace $\mathbb{S}^1$ n'est pas un rétract du disque fermé D^2.

Démonstration.– Supposons que $\mathbb{S}^1$ soit un rétract de D^2. Cela signifie qu'il existe une application $r \in C^0(D^2, \mathbb{S}^1)$ telle que $r_{|\mathbb{S}^1} = id_{\mathbb{S}^1}$.

Le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$

- Soit $i : \mathbb{S}^1 \to D^2$ l'inclusion. On a $r \circ i = id_{\mathbb{S}^1}$ et donc $r_* \circ i_* = id_{\mathbb{Z}}$. Mais le diagramme

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2, 1) \cong \{0\} \xrightarrow{r_*} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$$

montre que $r_* \circ i_* = 0$. Contradiction. $\square$

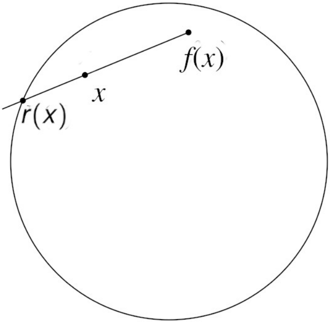
Le théorème du point fixe de Brouwer

Théorème du point fixe de Brouwer dans le plan (1912).– *Toute application continue du disque fermé dans lui-même a un point fixe.*

Observation 1 : Ce théorème se généralise en dimension quelconque pour les applications continues $f : B^n \to B^n$.

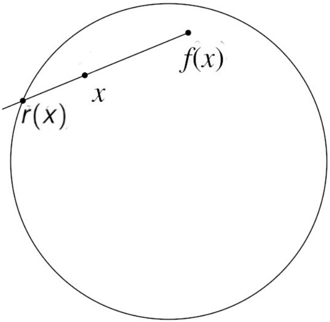
Observation 2 : Le cas $n = 1$ affirme que toute fonction continue $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ admet un point fixe et se démontre en utilisant le théorème de la valeur intermédiaire à la fonction $g = f - id$.

Le théorème du point fixe de Brouwer



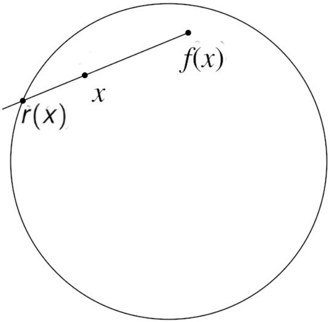
Démonstration.– Par contradiction : on va montrer que s'il existe une application $f : D^2 \to D^2$ continue et sans point fixe alors on peut construire à partir d'elle une rétraction $r : D^2 \to \mathbb{S}^1$, ce qui est en contradiction avec le corollaire 2.

Le théorème du point fixe de Brouwer



CONSTRUCTION DE f : Soit $f : D^2 \to D^2$ continue et supposons que pour tout $x \in D^2$, on ait $f(x) \neq x$. Alors, on peut définir une application $r : D^2 \to \mathbb{S}^1$ dont la valeur en un point x est le point d'intersection $r(x)$ du rayon $[f(x), x)$ avec $\mathbb{S}^1$.

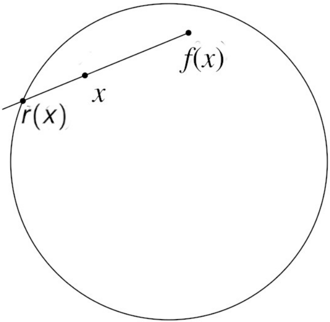
Le théorème du point fixe de Brouwer



• Le point d'intersection $r(x)$ étant sur la droite $(f(x)x)$, il existe $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ tel que

$$r(x) = x + \lambda(x)\overrightarrow{xf(x)}$$

Le théorème du point fixe de Brouwer

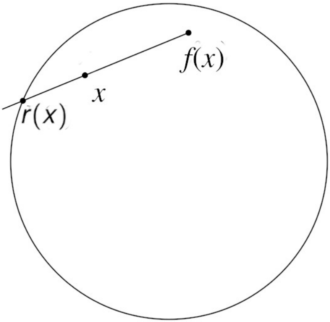


- Le point d'intersection

$$r(x) = x + \lambda(x)\overrightarrow{xf(x)}$$

étant sur le rayon $[f(x)x)$ mais pas sur l'intervalle $]x, f(x)]$, il s'en suit que $\lambda(x) \leq 0$. Notons que $\lambda(x) = 0 \iff r(x) = x$.

Le théorème du point fixe de Brouwer



• On détermine $\lambda(x)$ en résolvant l'équation $\|r(x)\| = 1$ c'est-à-dire l'équation

$$\|\lambda(x)f(x) + (1 - \lambda(x))x\|^2 = 1.$$

Le théorème du point fixe de Brouwer

- Les racines de

$$P(\lambda(x)) = \|\lambda f(x) + (1-\lambda(x))x\|^2 - 1$$

sont

$$\lambda_\pm(x) := \frac{\langle x, x - f(x)\rangle \pm \sqrt{\Delta(x)}}{\|f(x) - x\|^2}$$

où

$$\Delta(x) := \langle x, x - f(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2 \geq 0.$$

- Notons que

$$\sqrt{\Delta(x)} \geq |\langle x, x - f(x)\rangle|.$$

Le théorème du point fixe de Brouwer

- Ainsi

$$\begin{aligned}\lambda_+(x) &\geq \frac{\langle x, x - f(x)\rangle + |\langle x, x - f(x)\rangle|}{\|f(x) - x\|^2} \\ &\geq \frac{-|\langle x, x - f(x)\rangle| + |\langle x, x - f(x)\rangle|}{\|f(x) - x\|^2} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

- Similairement

$$\begin{aligned}\lambda_-(x) &\leq \frac{\langle x, x - f(x)\rangle - |\langle x, x - f(x)\rangle|}{\|f(x) - x\|^2} \\ &\leq \frac{|\langle x, x - f(x)\rangle| - |\langle x, x - f(x)\rangle|}{\|f(x) - x\|^2} \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Le théorème du point fixe de Brouwer

- Il en découle que

$$\lambda(x) = \lambda_-(x) = \frac{\langle x, x - f(x)\rangle - \sqrt{\Delta(x)}}{\|f(x) - x\|^2}.$$

PROPRIÉTÉS DE r : D'après son expression analytique, l'application

$$x \longmapsto r(x) := \lambda(x) f(x) + (1 - \lambda(x))x$$

est continue.

- Observons que

$$\begin{aligned} \langle x, x - f(x)\rangle &= \|x\|^2 - \langle x, f(x)\rangle \\ &\geq \|x\|^2 - |\langle x, f(x)\rangle| \\ &\geq \|x\| \left(\|x\| - \|f(x)\|\right) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la dernière ligne.

Le théorème du point fixe de Brouwer

• Si $x \in \mathbb{S}^1$ alors $\|x\| = 1$ et d'après l'inégalité précédente

$$\langle x, x - f(x)\rangle \geq 1 - \|f(x)\| \geq 0$$

puisque $\|f(x)\| \leq 1$.

• Il s'en suit que si $x \in \mathbb{S}^1$, on a

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \langle x, x - f(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2 \\ &= \langle x, x - f(x)\rangle^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\sqrt{\Delta} = |\langle x, x - f(x)\rangle| = \langle x, x - f(x)\rangle.$$

Le théorème du point fixe de Brouwer

• En remplaçant dans l'expression de $\lambda(x)$ on obtient $\lambda(x) = 0$ et finalement $r(x) = x$.

• Ainsi $r_{|\mathbb{S}^1}$ est l'identité de $\mathbb{S}^1$. L'application r est donc une rétraction de D^2 sur $\mathbb{S}^1$. Ceci est contradictoire avec le corollaire 2. $\square$

Exos

1) Montrer de deux façons différentes que $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (1,1))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

2) Soient $\mathbb{S}^3 := \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ le groupe des unités du corps des quaternions

$$\mathbb{H} := \{q = a + bi + cj + dk \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}.$$

avec

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

a) Montrer que $Re(q_1 q_2) = Re(q_2 q_1)$.

b) On munit $\mathbb{H}$ du produit scalaire $\langle q_1, q_2 \rangle := Re(q_1 \overline{q}_2)$. Montrer que $Im\,\mathbb{H} = Vect(i,j,k) \perp \mathbb{R} = Vect(1)$.

Exos

2c) En déduire que $Im\,\mathbb{H}$ est stable par conjugaison :

$$q\,Im\,\mathbb{H}\,q^{-1} \subset Im\,\mathbb{H}.$$

2d) À tout $q \in \mathbb{S}^3$ on associe

$$\begin{array}{cccc} \Phi_q : & Im\,\mathbb{H} & \longrightarrow & Im\,\mathbb{H} \\ & u & \longmapsto & quq^{-1} \end{array}$$

Montrer que $\Phi_q \in SO(Im\,\mathbb{H})$.

2e) Montrer que tout élément $q \in \mathbb{S}^3$ s'écrit sous la forme $q = \cos\theta + \sin\theta v$ avec $v \in Im\,\mathbb{H}$, $|v| = 1$ et $\theta \in [0, \pi]$.

2f) Une étude spécifique montrerait que Φ_q est la rotation $rot_{v,2\theta}$ d'axe $\mathbb{R}v$ et d'angle 2θ. On considère

$$\begin{array}{cccc} p : & \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & SO(3) \\ & q & \longmapsto & \Phi_q \end{array}$$

Montrer que p est un épimorphisme de groupes et que $\ker p = \{\pm 1\}$.

Exos

2g) On écrit tout élément de $SO(3)$ sous la forme $rot_{v,\theta}$ avec $v \in Im\,\mathbb{H}$, $|v| = 1$ et $\theta \in [0, \pi]$. Cette écriture est-elle unique ?

2h) Soit $\mathcal{R} = \{rot_{v,\pi} \mid v \in Im\,\mathbb{H}, |v| = 1\}$ et

$$\begin{array}{rccc} \psi : & SO(3) \setminus \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^3 \\ & rot_{v,\theta} & \longmapsto & q := \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} v \end{array}$$

Montrer que ψ est bien définie et que $p \circ \psi = id_{SO(3)\setminus\mathcal{R}}$. L'extension naturelle de ψ à $SO(3)$ est-elle bien définie ?

Exos

2i) En s'inspirant de la démonstration du cours, montrer que *p* satisfait à la propriété de relèvement : si $\gamma : [0,1] \to SO(3)$ un chemin partant de $\gamma(0) = Id$, alors il existe un unique relevé

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^3 \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & SO(3) \end{tikzcd}$$

tel que $\widetilde{\gamma}(0) = 1$.

Exos

3) Le but de cet exercice est de démontrer le *théorème fondamental de l'algèbre* avec des méthodes homotopiques. Soient $n \geq 1$ et

$$p(z) := z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

un polynôme à cœfficients dans $\mathbb{C}$. On suppose que $p(z)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$.

a) Pour tout nombre $r \geq 0$ et tout polynôme q sans racine sur le cercle $\{|z| = r\}$, on définit un lacet $\gamma(q, r)$ de $\mathbb{S}^1$ basé en 1 par

$$s \longmapsto \gamma(q, r)(s) := \frac{q(re^{2i\pi s})/q(r)}{|q(re^{2i\pi s})/q(r)|}.$$

Montrer que $[\gamma(p, r)] = [c_1] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

Exos

b) Pour tout $t \in [0, 1]$ on considère le polynôme

$$p_t(z) := z^n + t(a_1 z^{n-1} + ... + a_n).$$

Montrer que si r est suffisamment grand, les polynômes p_t n'ont aucune racine sur le cercle $\{|z| = r\}$.

c) Montrer que $\gamma(p_0, r) = \omega_n$.

d) En déduire que si r est suffisamment grand alors $[\gamma(p, r)] = n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Exos

4) Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Borsuk-Ulam en dimension 2 : *soit $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ continue, alors il existe une paire de points antipodaux x et $-x$ de $\mathbb{S}^2$ tels que $f(x) = f(-x)$.*

a) Montrer le théorème en dimension 1 : si $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ est continue alors il existe une paire de points antipodaux x et $-x$ de $\mathbb{S}^1$ tels que $f(x) = f(-x)$.

Exos

On se place désormais en dimension 2 et on suppose l'hypothèse (H) suivante :

> il existe $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ continue telle que pour tout point $x \in \mathbb{S}^2$, $f(x) \neq f(-x)$.

b) Soient $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ l'application définie par

$$g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

et $\eta : [0, 1] \to \mathbb{S}^2$ le lacet défini par

$$\eta(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0).$$

On considère le lacet $\gamma := g \circ \eta$. Montrer que pour tout $s \in [0, \frac{1}{2}]$, on a

$$\gamma(s + \frac{1}{2}) = -\gamma(s)$$

Exos

c) Soit $x_0 = (1, 0, 0) \in \mathbb{S}^2$. Quitte a effectuer un changement de base dans $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, on peut toujours supposer $g(x_0) = (1, 0)$. Soit $\widetilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ le relevé de γ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = 0$. Montrer qu'il existe un entier impair n tel que

$$\forall s \in [0, \frac{1}{2}], \qquad \widetilde{\gamma}(s + \frac{1}{2}) = \widetilde{\gamma}(s) + \frac{n}{2}.$$

d) Montrer en s'appuyant sur la question précédente que $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ n'est pas trivial.

e) En admettant que $\mathbb{S}^2$ est simplement connexe[1], en déduire contradiction avec l'hypothèse (H).

f) Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un sous-espace quelconque. Montrer $\mathbb{S}^2$ et A ne sont pas homéomorphes.

[1] ceci sera démontré dans la leçon consacrée au théorème de Van Kampen, TA5, corollaire 1.