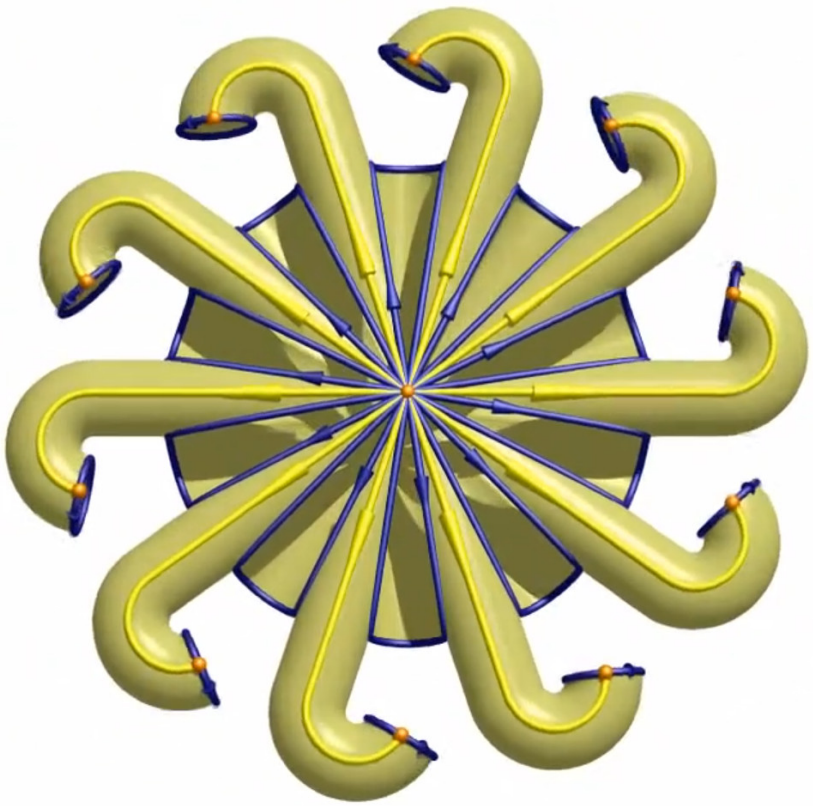
CM-TA6 : La grande exhibition des π_1

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Du 40-gone vers la surface de genre 10

Image : Henri Paul de Saint-Gervais

Groupe fondamental d'un CW complexe

• Soient X un CW complexe connexe par arcs, $x_0 \in X$ et Y le CW complexe obtenu en attachant une 2-cellule e^2

$$Y := X \cup_\varphi e^2 \quad \text{où} \quad \varphi : \partial e^2 \to X$$

• Puisque e_2 est le disque unité, $\partial e_2 \subset \mathbb{C}$ est le cercle unité. Soit

$$\omega : [0,1] \to \partial e_2 = \mathbb{S}^1$$

le lacet $\omega(s) := e^{2i\pi s}$. Comme nous l'avons vu en TA3, ce lacet est un générateur du groupe fondamental $\pi_1(\partial e_2, 1)$.

• On note alors

$$\varphi_\omega := \varphi \circ \omega \in \Omega(X, \varphi(1)) \subset \Omega(Y, \varphi(1))$$

Groupe fondamental d'un CW complexe

• Puisque le lacet ω est homotope au lacet constant c_1 dans e_2, le lacet φ_ω est homotope à $c_{\varphi(1)} = c_1$ dans Y (les points 1 et $\varphi(1)$ sont identifiés dans Y).

• On considère un chemin γ quelconque de X joignant $\varphi(1)$ à x_0. Ainsi

$$\delta_\gamma := \bar{\gamma} * \varphi_\omega * \gamma$$

est un lacet basé en x_0.

Groupe fondamental d'un CW complexe

• On note $N = N([\delta_\gamma])$ le sous-groupe normal de $\pi_1(X, x_0)$ engendré par $[\delta_\gamma]$.

• Ce sous-groupe est indépendant du choix du chemin γ. Si η est un autre chemin joignant $\varphi(1)$ à x_0 alors

$$\begin{aligned} \delta_\eta &= \bar{\eta} * \varphi_\omega * \eta \\ &= (\bar{\eta} * \gamma) * \bar{\gamma} * \varphi_\omega * \gamma * (\bar{\gamma} * \eta) \\ &= \bar{g} * \delta_\gamma * g \end{aligned}$$

avec $g = \bar{\gamma} * \eta$. Ainsi δ_η et δ_γ sont conjugués, ils engendrent le même sous-groupe normal.

Groupe fondamental d'un CW complexe

• Puisque δ_γ "borde" le disque e_2, il est homotope dans Y au lacet constant c_{x_0}. Ainsi $[\delta_\gamma]$ est l'élément neutre de $\pi_1(Y, x_0)$.

• Soit $i : X \subset Y$ l'inclusion et $i_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ l'application induite. On en déduit

$$N([\delta_\gamma]) \subset \ker i_*$$

• La proposition qui suit montre que l'on a égalité et traite du cas général où une cellule de dimension quelconque est ajoutée à X.

Groupe fondamental d'un CW complexe

Théorème de l'attachement d'une n-cellule.– *Soient X un CW complexe connexe par arcs, $x_0 \in X$ et Y le CW complexe obtenu en attachant une n-cellule e^n*

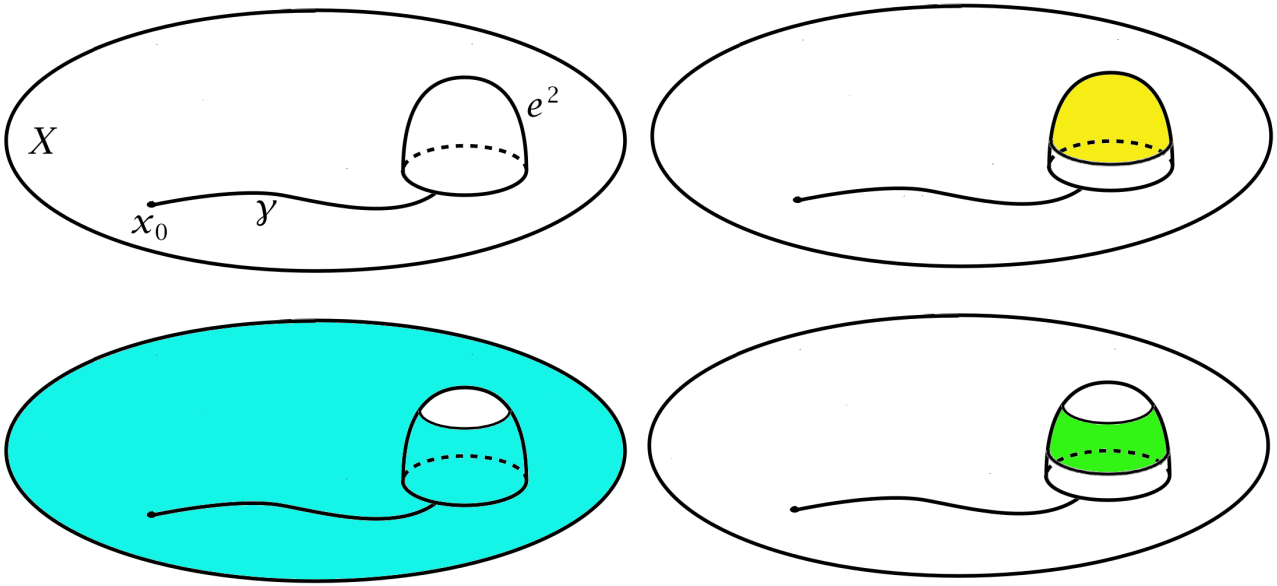
$$Y := X \cup_\varphi e^n \quad \text{où} \quad \varphi : \partial e^n \to X$$

on a

- *si $n = 1$ alors $\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) * \mathbb{Z}$*
- *si $n = 2$ alors $\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)/N$*
- *si $n \geq 3$ alors $\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$.*

où $N = N([\delta_\gamma])$ le sous-groupe normal de $\pi_1(X, x_0)$ engendré par le lacet $[\delta_\gamma]$ défini plus haut.

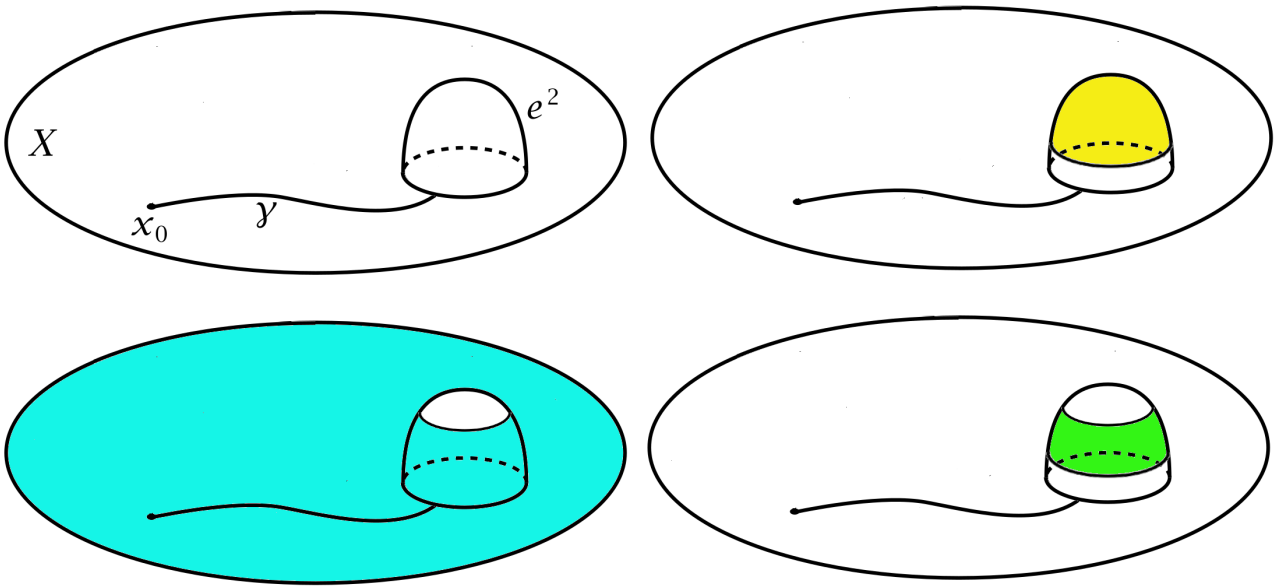
Groupe fondamental d'un CW complexe



Démonstration.– On commence par le cas $n = 2$ et on va obtenir le résultat énoncé dans la proposition comme une conséquence du théorème de Van Kampen.

• On choisit pour U_1 le disque ouvert $D^2(0, \frac{3}{4}[\subset e^2 \subset Y$, figuré en jaune (en haut à droite).

Groupe fondamental d'un CW complexe

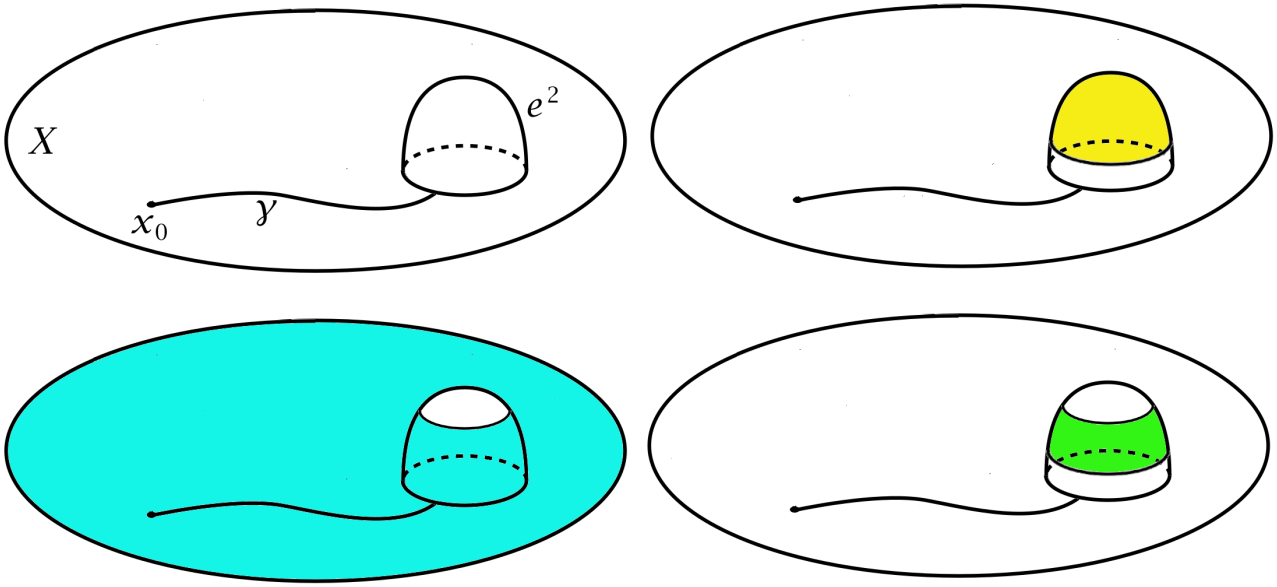


• On choisit pour U_2 (en bleu), le complémentaire dans Y du disque fermé $D^2(0, \frac{1}{4}]$.

• L'intersection $U_1 \cap U_2$ est l'anneau figuré en vert

$$U_1 \cap U_2 = D^2(0, \frac{3}{4}[\setminus D^2(0, \frac{1}{4}].$$

Groupe fondamental d'un CW complexe



• On choisit un nouveau point base $z_0 \in U_1 \cap U_2$ de coordonnée polaire $(r_0, 0)$ dans e_2. Puisque U_1 est contractile on a

$$\pi_1(U_1, z_0) \cong \{[c_{z_0}]\}$$

• Puisque $U_1 \cap U_2$ se rétracte sur le cercle, on a aussi

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, z_0) \cong \mathbb{Z}$$

Groupe fondamental d'un CW complexe

• Un générateur est le lacet $\omega_0 = r_0\omega \in \Omega(U_1 \cap U_2, z_0)$. Dans notre cas, le théorème de Van Kampen affirme que

$$\pi_1(Y, z_0) \cong \pi_1(U_2, z_0)/K$$

où K est le sous-groupe normal engendré par

$$R = \{\beta_2([\omega']) \mid [\omega'] \in \pi_1(U_1 \cap U_2, z_0)\}$$

• Mais puisque $\pi_1(U_1 \cap U_2, z_0) =< [\omega_0] >$ est monogène, le groupe $K = N(R)$ est en réalité engendré par le seul élément $\beta_2([\omega_0])$. Ainsi

$$\pi_1(Y, z_0) \cong \pi_1(U_2, z_0)/N(\beta_2([\omega_0]))$$

Groupe fondamental d'un CW complexe

• Puisque $\pi_1(U_1, z_0)$ est trivial, le diagramme de Van Kampen

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U_1, z_0) \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "(j_1)_*"] & \\
\pi_1(U_1 \cap U_2, z_0) \arrow[ur, "(i_1)_*"] \arrow[r, shift left, "\beta_1"] \arrow[r, shift right, "\beta_2"'] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] & \pi_1(U_1, z_0) * \pi_1(U_2, z_0) \arrow[r, "\phi"] & \pi_1(Y, z_0) \\
 & \pi_1(U_2, z_0) \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[ur, "(j_2)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

se simplifie en

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, z_0) \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[dr, "(i_2)_*"'] & \pi_1(U_2, z_0) \arrow[r, "\phi"] & \pi_1(Y, z_0) \\
 & \pi_1(U_2, z_0) \arrow[u, "\alpha_2 = id"] \arrow[ur, "(j_2)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Groupe fondamental d'un CW complexe

- On en déduit

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, z_0) \xrightarrow{\beta_2 = (i_2)_*} \pi_1(U_2, z_0) \xrightarrow{\phi = (j_2)_*} \pi_1(Y, z_0).$$

- Le théorème de Van Kampen affirme donc que

$$\pi_1(Y, z_0) \cong \pi_1(U_2, z_0) / \ker(j_2)_*$$

où

$$\ker(j_2)_* = N([i_2 \circ \omega_0])$$

et où $(j_2)_{|X}$ est l'inclusion $X \subset Y$.

Groupe fondamental d'un CW complexe

• Il nous faut maintenant exprimer ce résultat non plus en z_0 mais au point base x_0. Pour tout chemin u joignant z_0 à x_0 l'isomorphisme

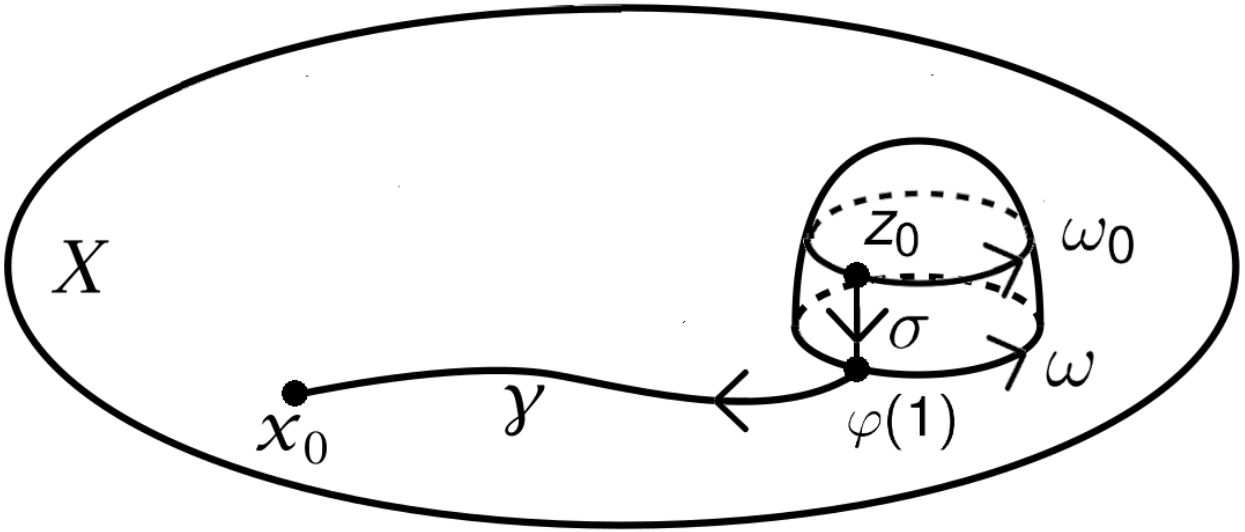
$$\begin{array}{rccc} \beta_u : & \pi_1(U_2, z_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_2, x_0) \\ & [\eta] & \longmapsto & [\bar{u} * \eta * u] \end{array}$$

permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} \pi_1(Y, x_0) &\cong \pi_1(U_2, x_0)/\beta_u(N([i_2 \circ \omega_0])) \\ &\cong \pi_1(U_2, x_0)/N(\beta_u([i_2 \circ \omega_0])) \end{aligned}$$

• Nous allons montrer que $\beta_u([i_2 \circ \omega_0]) = [\delta_\gamma]$ en choisissant convenablement le chemin u.

Groupe fondamental d'un CW complexe



• Soit σ le chemin rectiligne de e^2 joignant le point $z_0 = r_0 e^{i0}$ au point $1 = e^{i0}$ et soit u le chemin

$$u := \sigma * \gamma \in L(Y, z_0, x_0).$$

Groupe fondamental d'un CW complexe

- Il est immédiat que,

$$[\omega] = [\bar{\sigma} * (i_2 \circ \omega_0) * \sigma]$$

et donc $\beta_\sigma([i_2 \circ \omega_0]) = [\omega]$. Notons que l'homotopie peut être effectuée entièrement dans e_2.

- Ainsi

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(U_2, x_0)/N(\beta_u([i_2 \circ \omega_0]))$$

devient

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(U_2, x_0)/N(\beta_\gamma([\omega]))$$

puisque $u = \sigma * \gamma$ et $\beta_u = \beta_\gamma \circ \beta_\sigma$.

Groupe fondamental d'un CW complexe

• Puisque dans U_2 les lacets ω et φ_ω sont identifiés, on a

$$\beta_\gamma([\omega]) = [\bar{\gamma} * \omega * \gamma] = [\bar{\gamma} * \varphi_\omega * \gamma] = [\delta_\gamma]$$

• Comme X est un rétract par déformation de U_2, on peut conclure

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)/N([\delta_\gamma])$$

ce qui prouve le cas $n = 2$.

Groupe fondamental d'un CW complexe

• Passons au cas $n \geq 3$. La démarche est la même mais un le fait que l'intersection entre U_1 et U_2 se rétracte désormais sur une sphère de dimension $n-1 \geq 2$ montre que cette intersection est simplement connexe

$$\pi_1(U_1 \cap U_2, z_0) = \{[c_{z_0}]\}$$

ce qui va considérablement simplifier la situation

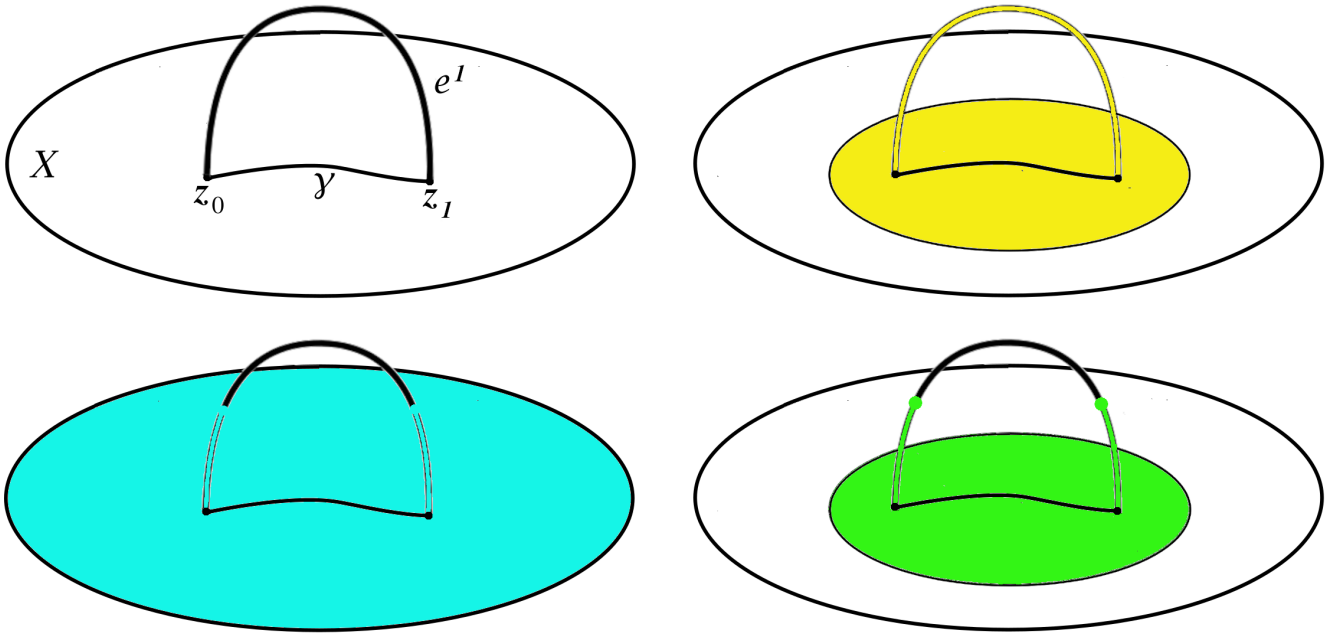
• En effet, ceci implique que N est réduit à l'élément neutre et que donc

$$\pi_1(Y, z_0) \cong \pi_1(X, z_0).$$

• Puisque X et Y sont connexes par arcs, ceci implique

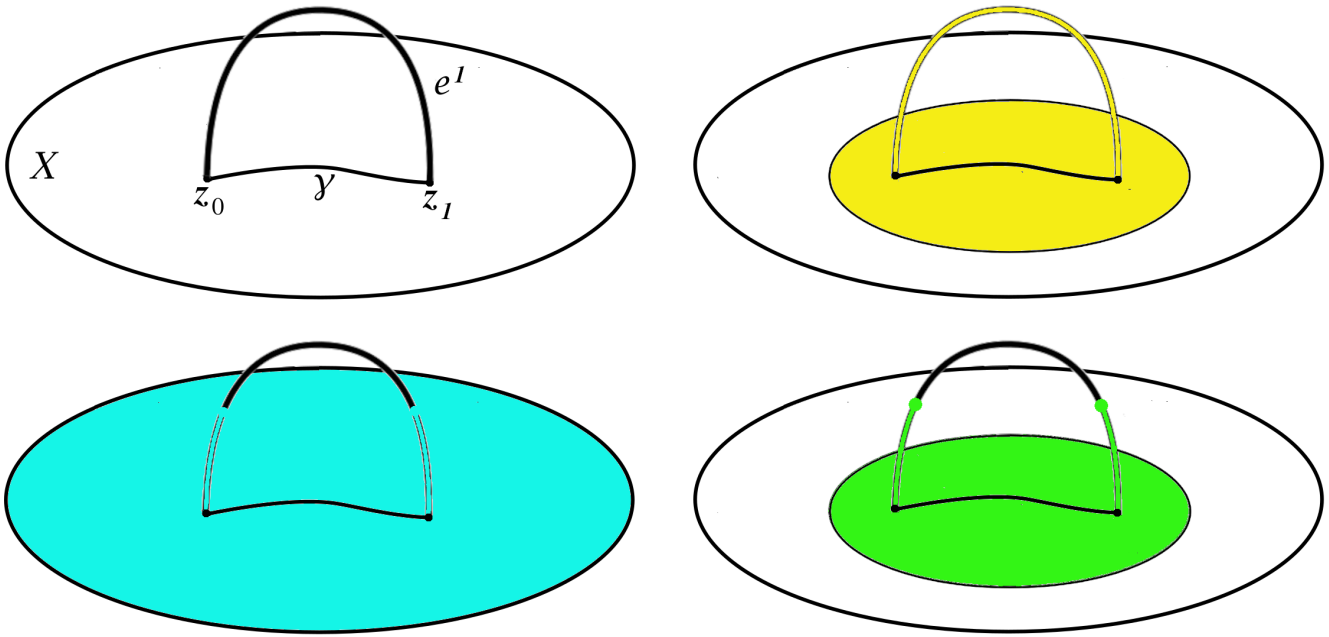
$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0).$$

Groupe fondamental d'un CW complexe



• Il ne reste plus qu'à traiter le cas $n = 1$. Soient $e_1 = [0, 1]$ et γ un chemin de X joignant $z_0 = \varphi(0)$ à $z_1 = \varphi(1)$. On considère les ouverts U_1 (jaune) et U_2 (bleu) tels que décrits dans la figure. Le dernier dessin représente l'intersection $U_1 \cap U_2$ (vert).

Groupe fondamental d'un CW complexe



• L'ouvert U_1 a le type d'homotopie du cercle, l'ouvert U_2 se rétracte sur X et l'intersection $U_1 \cap U_2$ se rétracte sur le point z_0 ainsi

$$\pi_1(U_1, z_0) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_1(U_1 \cap U_2, z_0) \cong \{[c_{z_0}]\}$$

$$\pi_1(U_2, z_0) \cong \pi_1(X, z_0).$$

Groupe fondamental d'un CW complexe

- Le théorème de Van Kampen donne alors

$$\pi_1(Y, z_0) \cong \pi_1(X, z_0) * \mathbb{Z}$$

et puisque les espaces X et Y sont connexes par arc

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0) * \mathbb{Z}.$$

$\square$

Corollaire.– *Le groupe fondamental d'un CW complexe X est celui de son 2-squelette X^2. Précisément, l'inclusion $X^2 \subset X$ induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux.*

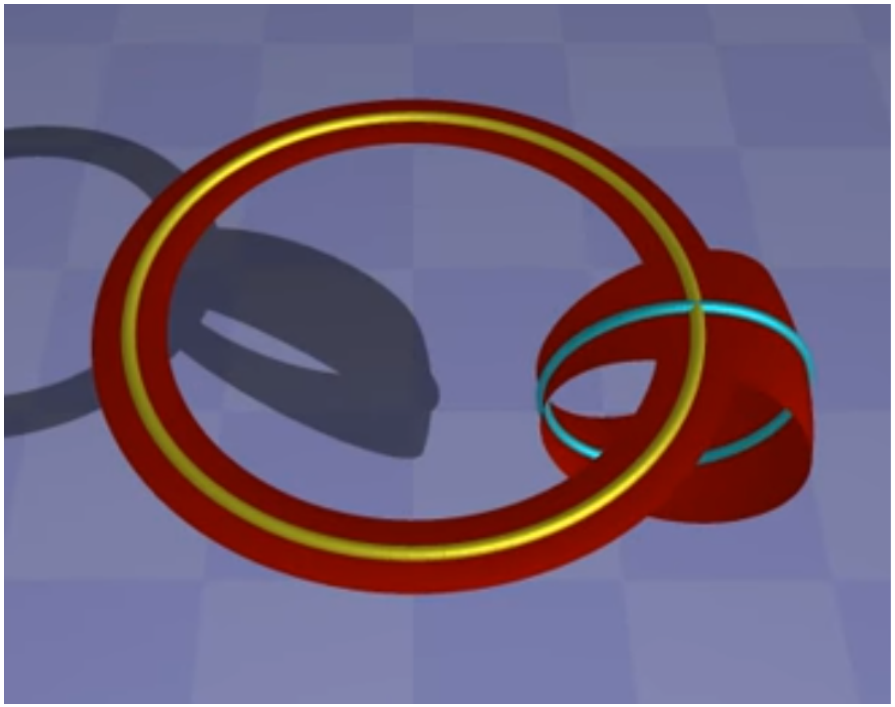
Groupe fondamental des surfaces

• Nous allons exhiber une structure de CW complexe sur les surfaces connexes compactes complètes et orientables afin de déterminer leurs groupes fondamentaux.

Le tore $\mathbb{T}^2$.– Le travail effectué en TA5 corollaire 3, montre qu'une structure de CW complexe de $\mathbb{T}^2$ est donnée comme suit :

- Le 1-squelette est le bouquet $X^1 = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$
- Le 2-squelette est obtenu en recollant une unique cellule e^2 à X^1
- L'application de recollement $\varphi : \partial e^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ est donnée par $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ où $\alpha : \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^1 \vee \{X^0\}$ et $\beta : \mathbb{S}^1 \subset \{X^0\} \vee \mathbb{S}^1$ sont les inclusions naturelles.

Groupe fondamental des surfaces



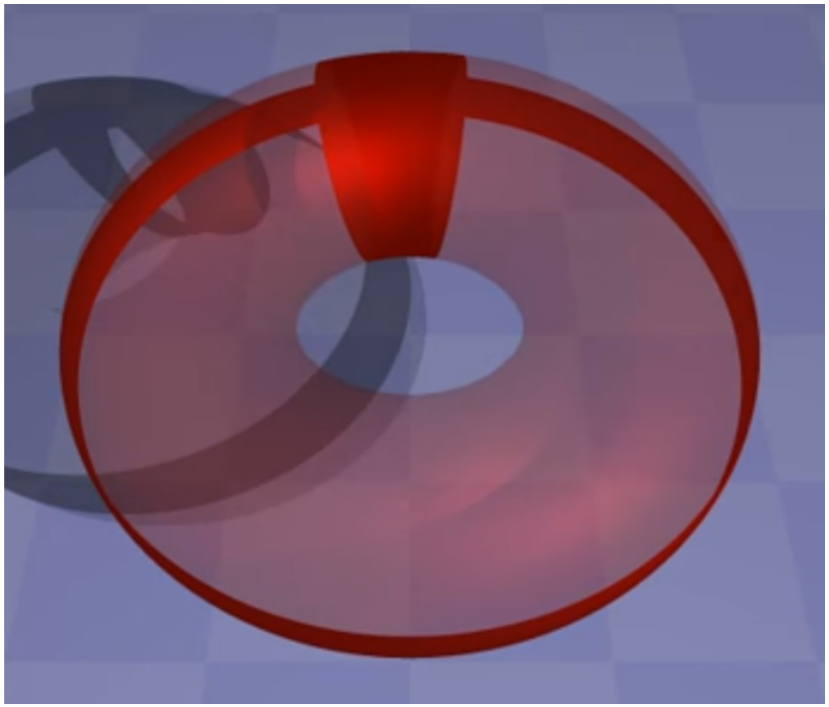
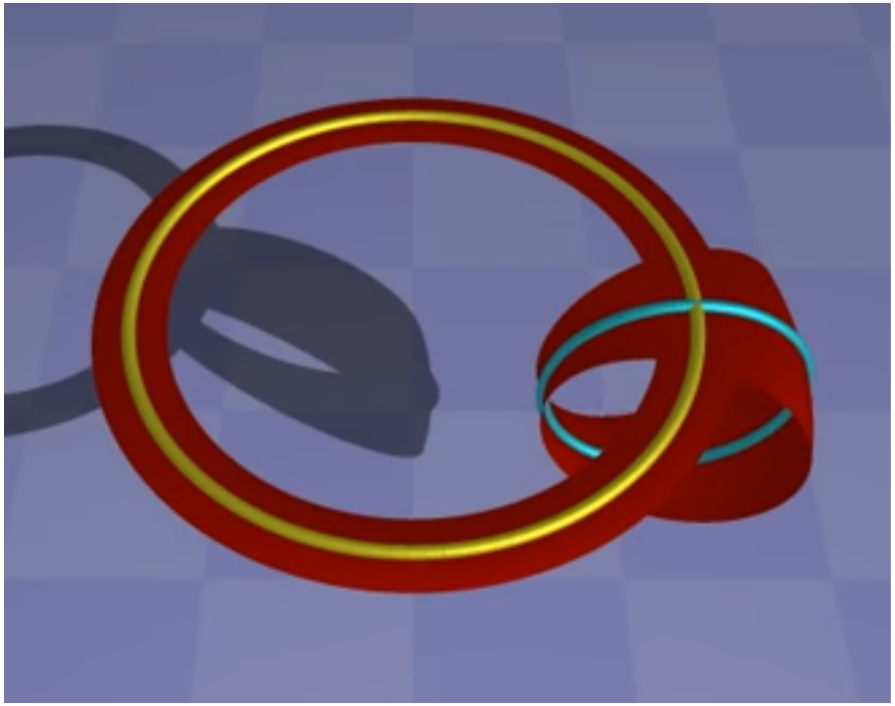
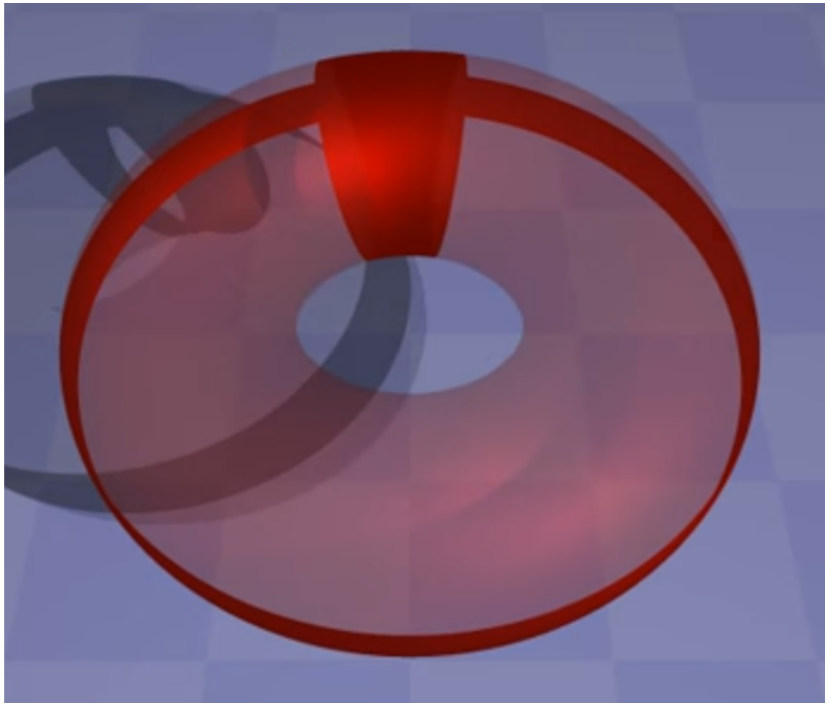


Image : Ester Dalvit

Visualisation de la CW structure : à gauche, un voisinage du 1-squelette ; à droite, l'attachement de la 2-cellule e^2.

Groupe fondamental des surfaces



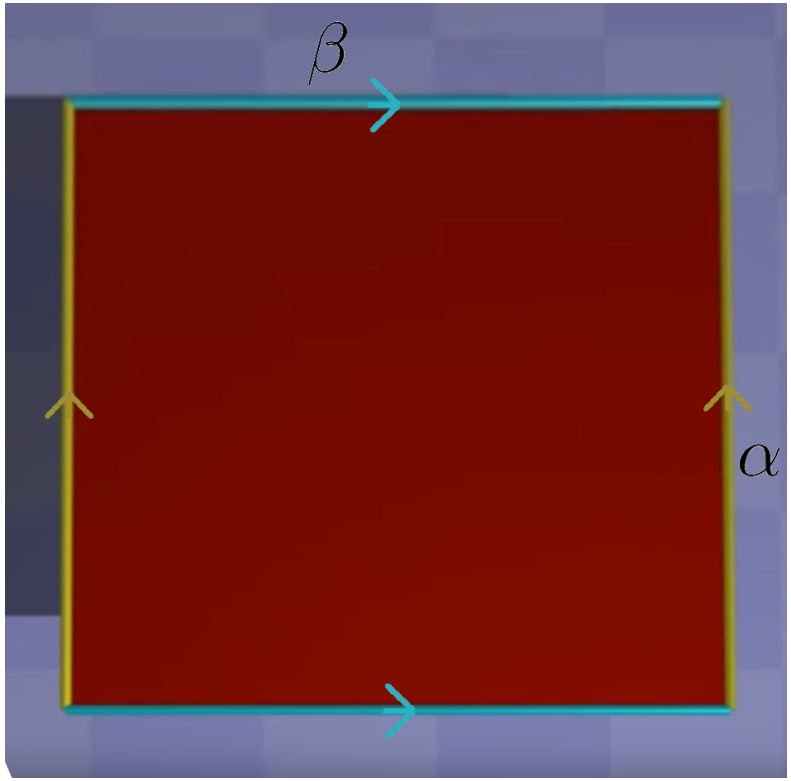


Cette CW structure à permis en TA5 de déterminer le groupe fondamental :

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, X^0) \cong < a > \oplus < b >$$

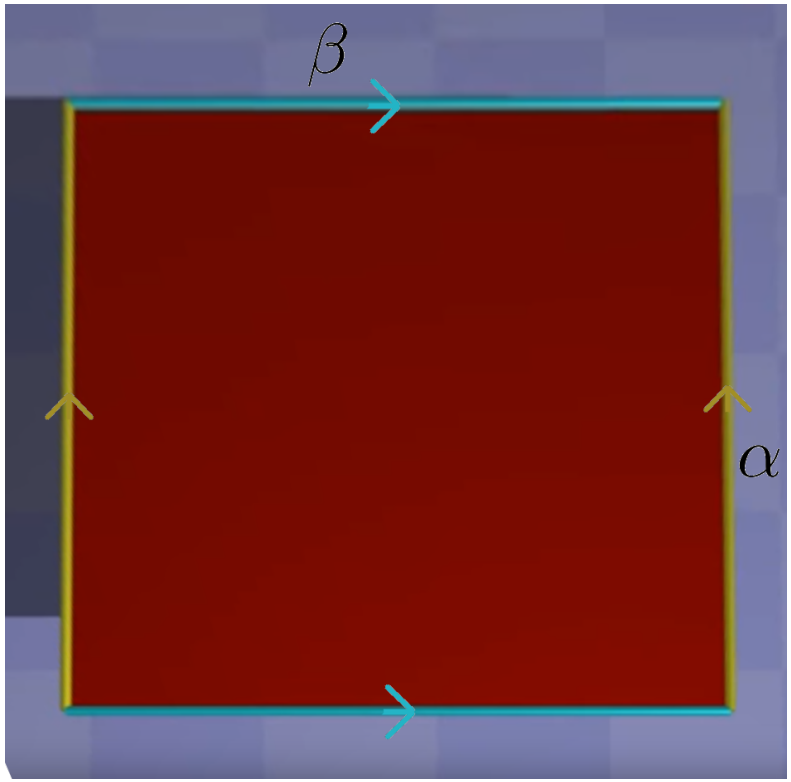
où $a = [\alpha] \in \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \{X^0\}, X^0)$ et $b = [\beta] \in \pi_1(\{X^0\} \vee \mathbb{S}^1, X^0)$

Groupe fondamental des surfaces



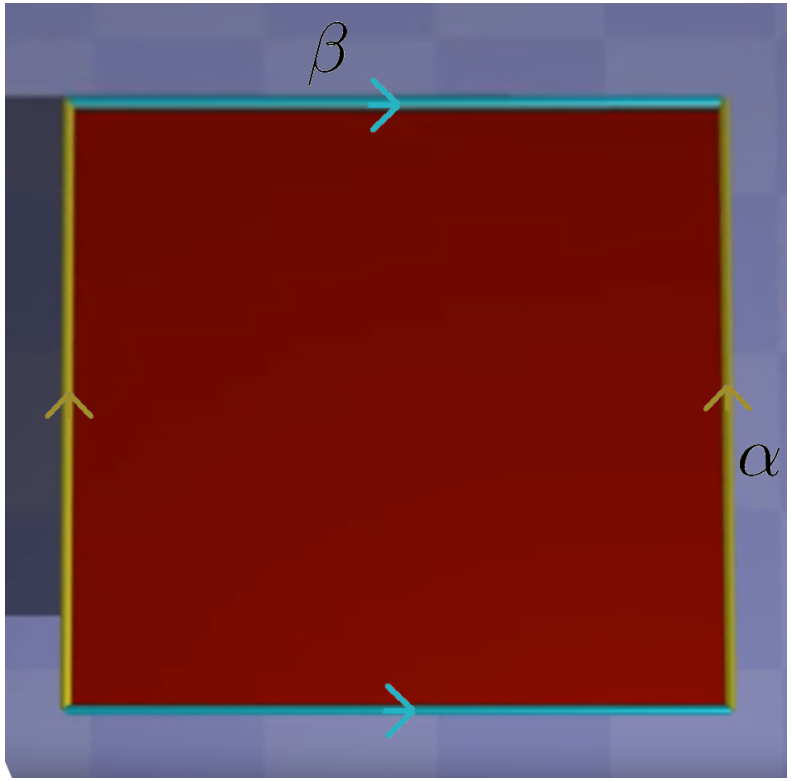
La structure en CW-complexe du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est apparente sur le domaine fondamental $[0,1] \times [0,1]$.

Groupe fondamental des surfaces



Les quatre sommets du carré représente l'unique 0-cellule X^0, les bords opposés représentent soit $\mathbb{S}^1 \vee \{X^0\}$ (en bleu), soit $\{X^0\} \vee \mathbb{S}^1$ (en jaune) et la 2-cellule ouverte est l'intérieur du carré (en rouge).

Groupe fondamental des surfaces



Observons que le tore $\mathbb{T}^2$ s'obtient comme un quotient topologique du carré par la relation $\sim$ définie par $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ou si $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$ ou si $y_1, y_1 \in \{0, 1\}$.

Groupe fondamental des surfaces

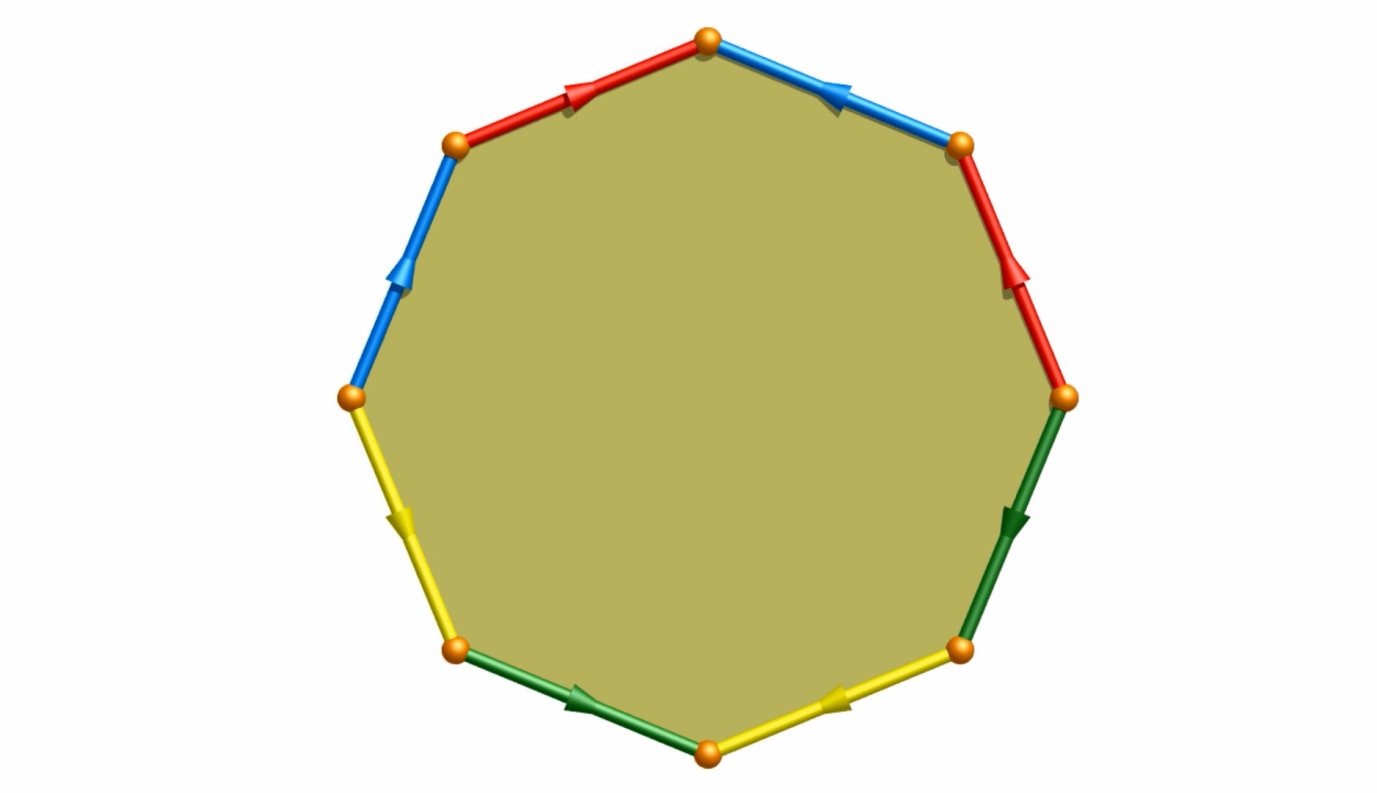


Image extraite d'une vidéo de la chaîne Youtube Henri Paul de Saint Gervais

Le tore à deux trous T_2.– Le tore à deux trous T_2 est la surface obtenue en identifiant les côtés d'un octogone de la façon suggérée par la figure ci-dessus.

Groupe fondamental des surfaces

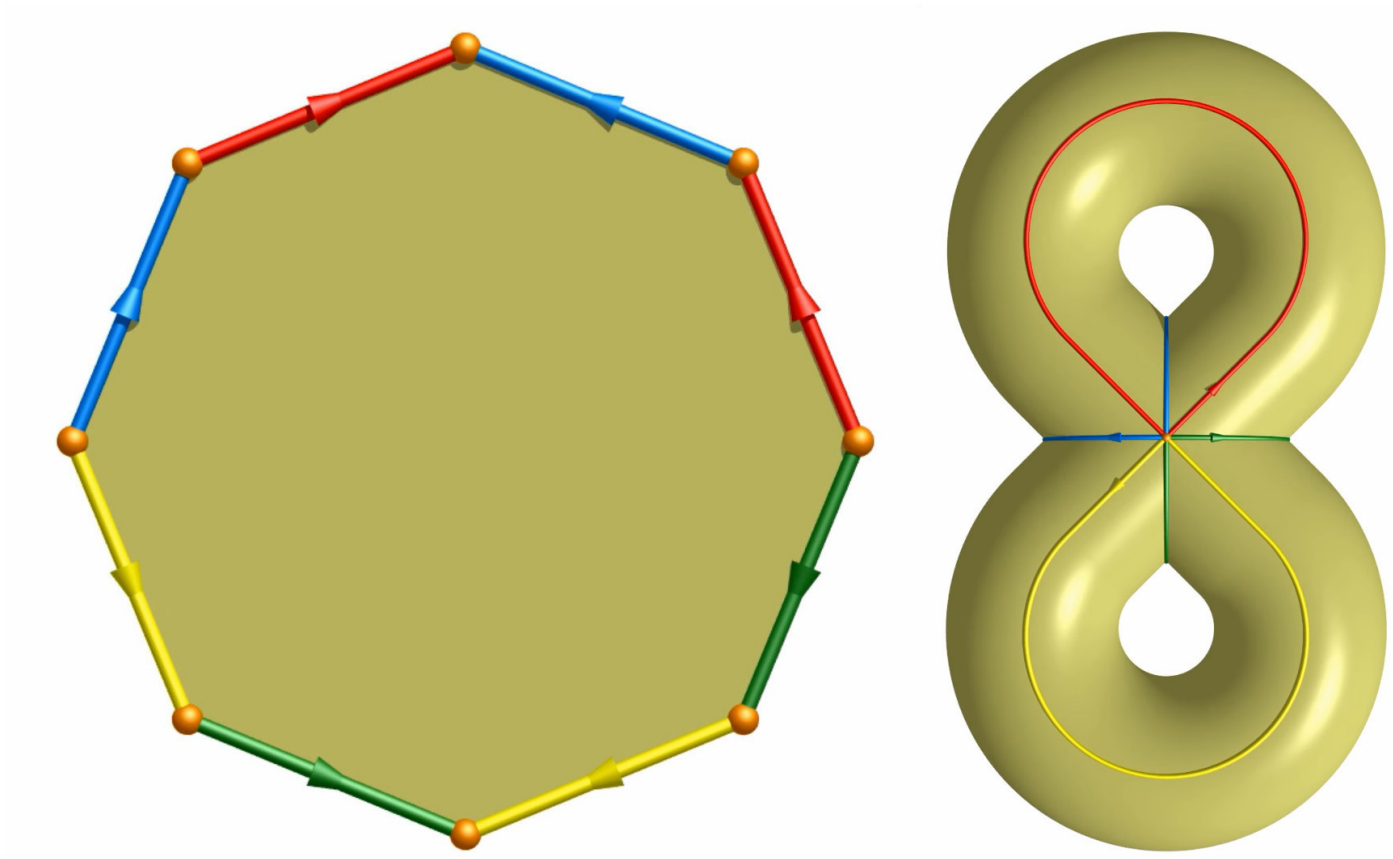
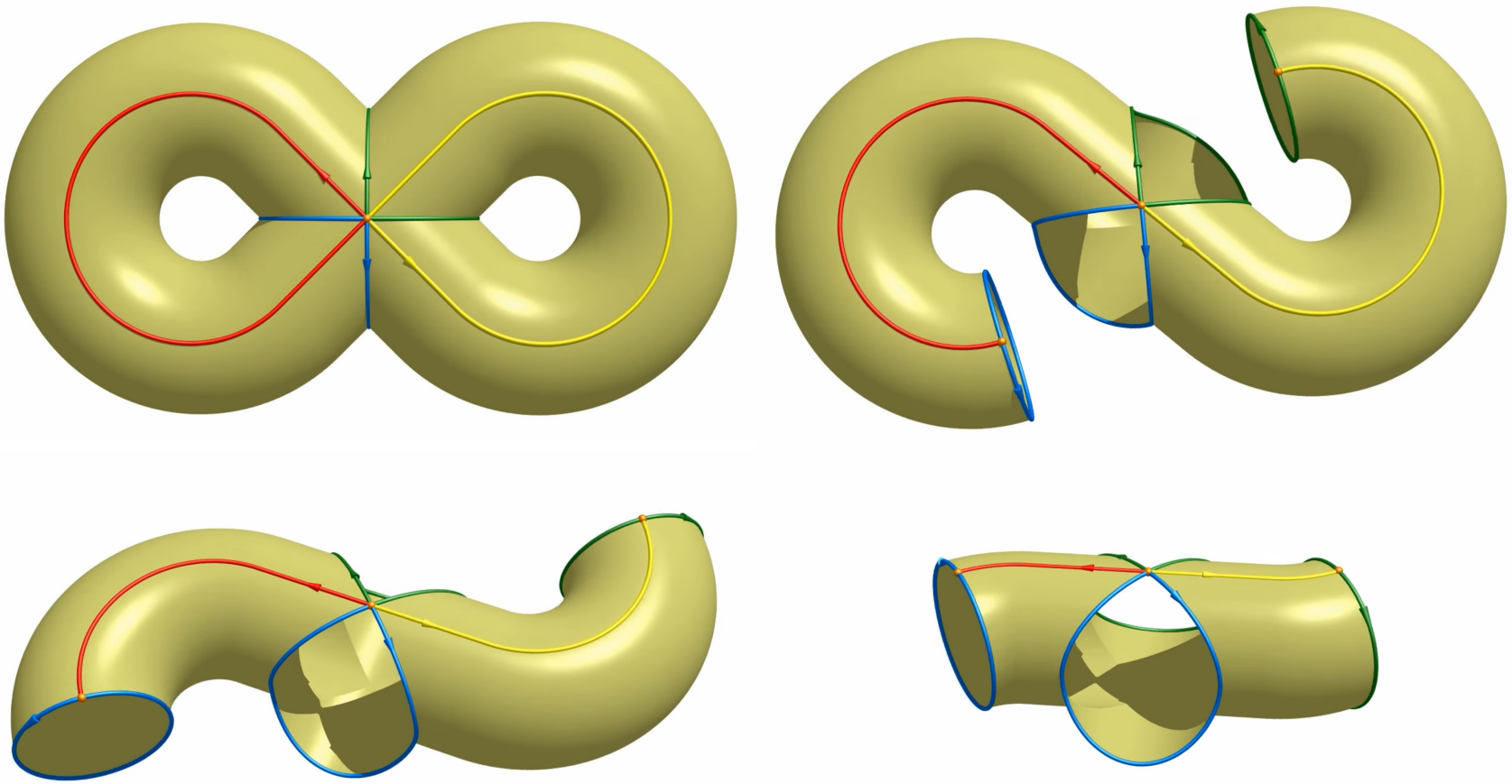


Image : chaîne Youtube d'Henri Paul de Saint Gervais

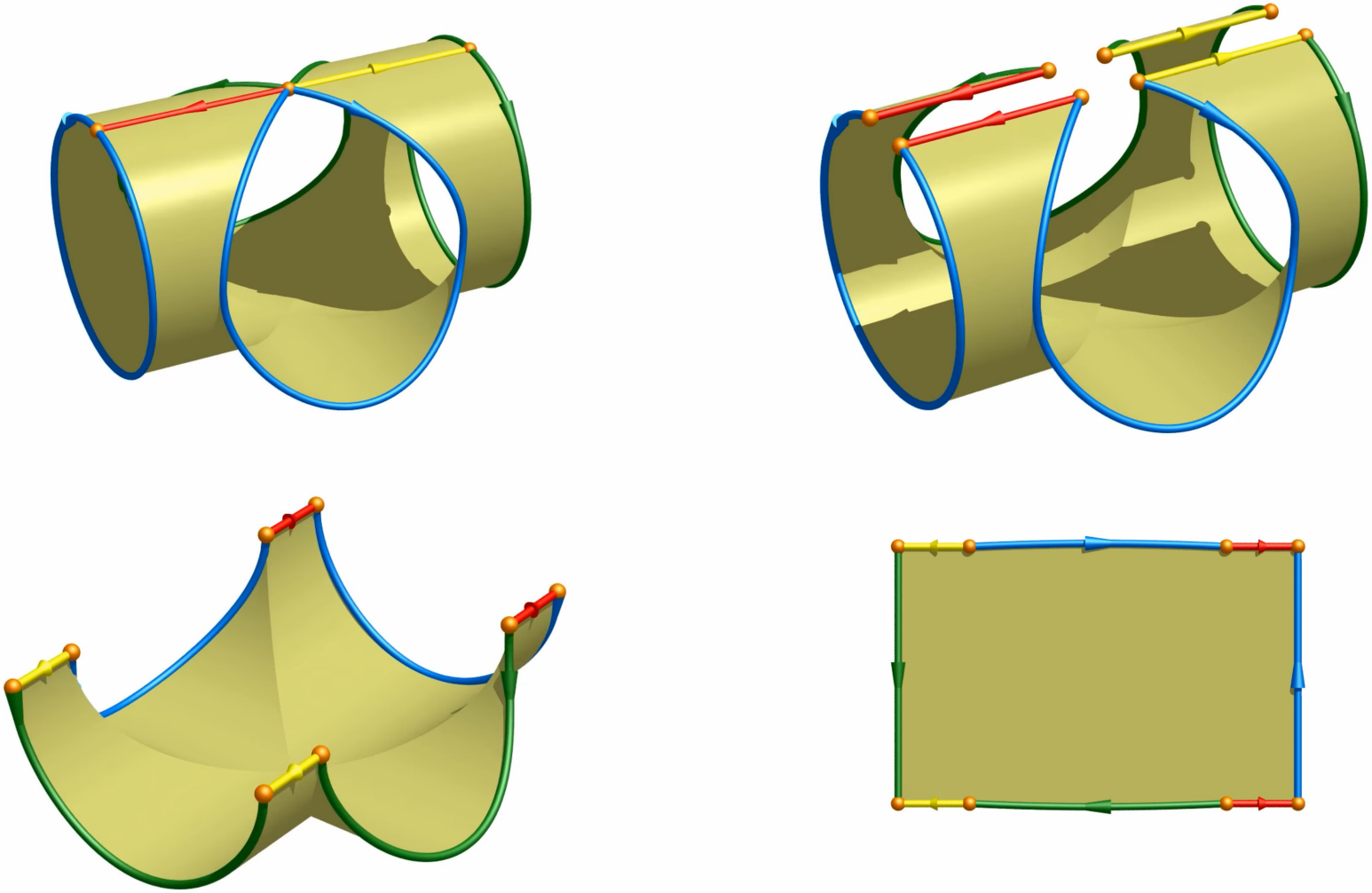
En effet, une fois effectuée les identifications, une surface à deux trous apparaît.

Groupe fondamental des surfaces



Images : chaîne Youtube d'Henri Paul de Saint Gervais

Groupe fondamental des surfaces



Images : chaîne Youtube d'Henri Paul de Saint Gervais

Groupe fondamental des surfaces

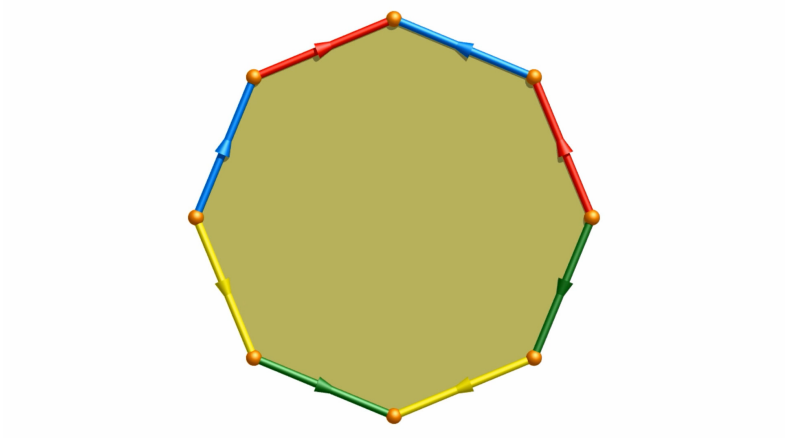


Image : chaîne Youtube Henri Paul de Saint Gervais

Une structure de CW complexe est lisible sur l'octagone. Elle se compose

- d'un 1-squelette qui est un bouquet de quatre cercles
- d'un 2-squelette obtenu en recollant une unique cellule e^2 à X^1
- une application de recollement φ donnée par $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}$ où α_1 et β_1 sont donnés par les arêtes bleues et rouges, α_2 et β_2 par les arêtes jaunes et vertes.

Groupe fondamental des surfaces

• Notons a_1, b_1, a_2 et b_2 les classes de α_1,β_1, α_2 et β_2 dans $\pi_1(X^1, X^0)$. Le 1-squelette étant un bouquet de quatre cercles, son groupe fondamental est le groupe libre à quatre générateurs

$$\pi_1(X^1, X^0) =< a_1, b_1, a_2, b_2 >$$

• D'après la description de φ, le groupe N est donc le groupe normal engendré par $[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2]$ où $[\cdot, \cdot]$ est le commutateur de deux éléments de $\pi_1(X^1, X^0)$.

• Ainsi, d'après le théorème démontré dans cette leçon

$$\pi_1(T_2, X^0) =< a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = 1 >$$

Groupe fondamental des surfaces

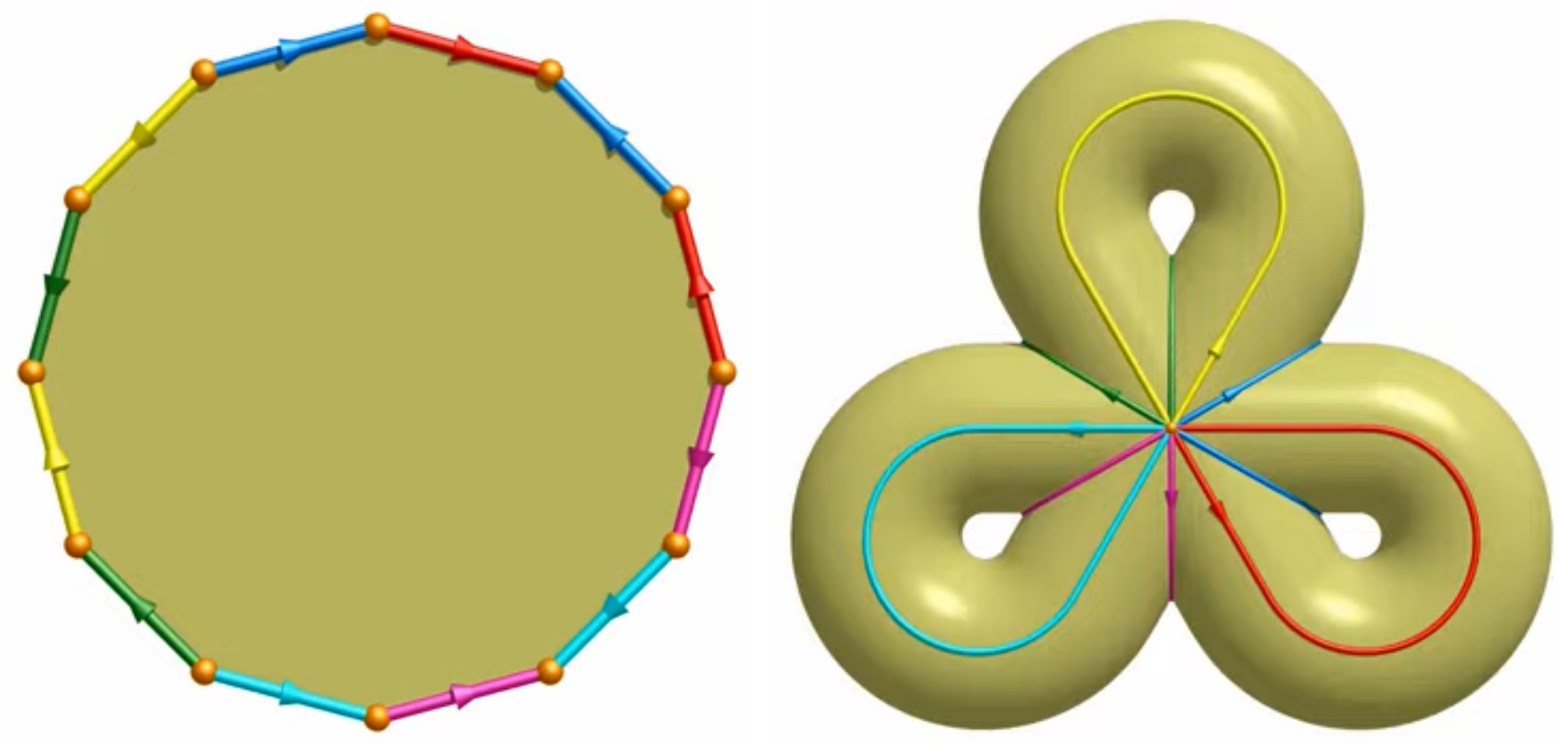


Image : chaîne Youtube Henri Paul de Saint Gervais

Le tore à trois trous T_3.– Le tore à trois trous T_3 est la surface obtenue en identifiant les côtés d'un dodécagone de la façon suggérée par la figure.

Groupe fondamental des surfaces

La structure de CW complexe lisible sur le dodécagone se compose

- d'un 1-squelette qui est un bouquet de six cercles
- d'un 2-squelette obtenu en recollant une unique cellule e^2 à X^1
- une application de recollement φ donnée par $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\alpha_3\beta_3\alpha_3^{-1}\beta_3^{-1}$ où les α_i et β_i sont donnés par les arêtes.

Groupe fondamental des surfaces

• Notons a_i et b_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, les classes des α_i et β_i dans $\pi_1(X^1, X^0)$. Le 1-squelette étant un bouquet de six cercles, son groupe fondamental est le groupe libre à six générateurs

$$\pi_1(X^1, X^0) =< a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 >$$

• D'après la description de φ, le groupe N est le groupe normal engendré par $[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdot [a_3, b_3]$.

• Ainsi,

$$\pi_1(T_3, X^0) =< a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \mid [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdot [a_3, b_3] = 1 >$$

Groupe fondamental des surfaces

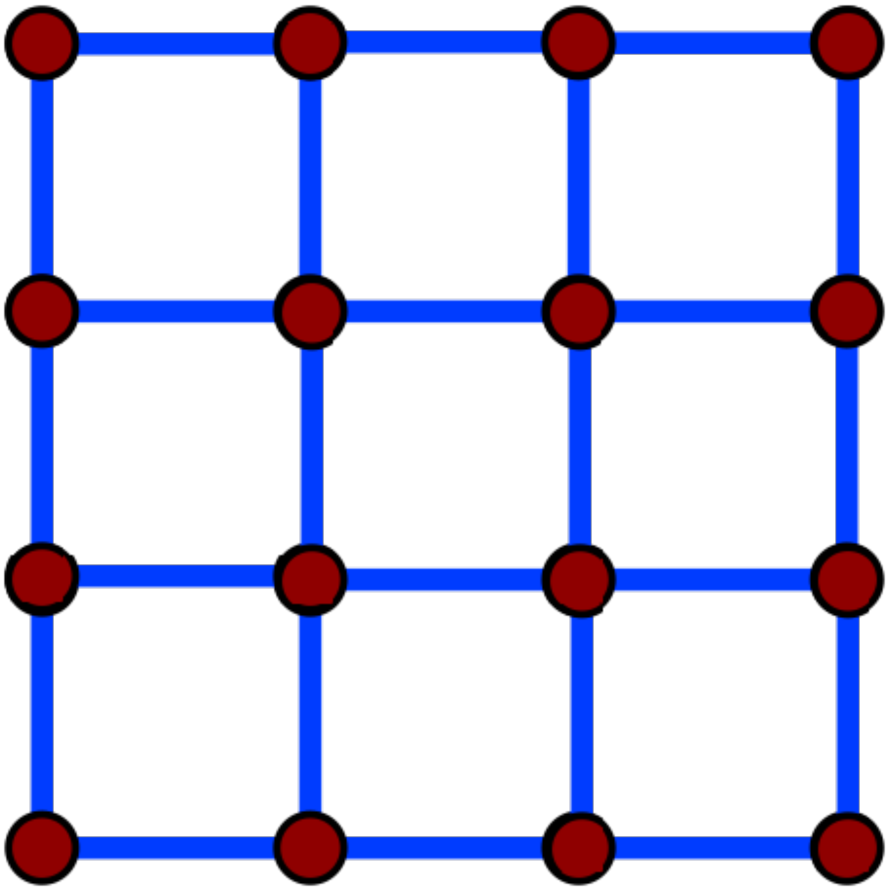
Le tore à g trous T_g.– Le tore à g trous T_g est la surface obtenue en identifiant les côtés d'un $4g$-gone de la façon suggérée par les cas précédents. Le nombre g s'appelle le GENRE de la surface T_g.

• La structure de CW complexe induite possède un 1-squelette qui est un bouquet de $2g$ cercles. Notons a_i, b_i, $i \in \{1, ..., g\}$ les générateurs naturels du groupe libre $\pi_1(X^1, X^0)$.

Proposition.– *On a*

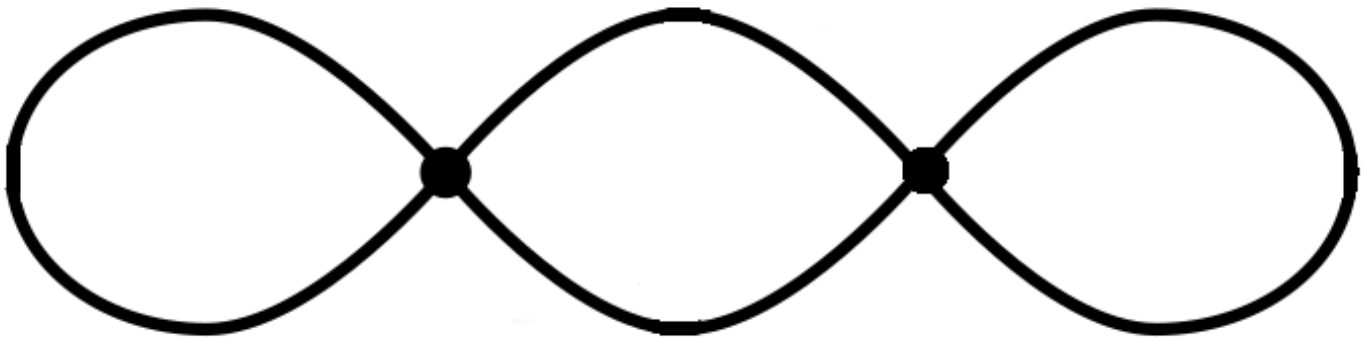
$$\pi_1(T_g, X^0) \cong < a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 > .$$

Exos



1) Déterminer le groupe fondamental du CW complexe de dimension 1 figuré ci-dessus.

Exos



2) On considère la triple boucle X figurée ci-dessus.
a) Donner une structure de CW complexe de X.
b) Soit x_0 l'un des deux sommets de X. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que $\pi_1(X, x_0) \cong F_3$.

Exos

3) a) On considère le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ muni de sa structure de CW complexe standard constituée d'un point, d'une 1-cellule et d'une 2-cellule, le 1-squelette étant homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ et le 2-squelette étant obtenu en attachant la 2-cellule avec $\varphi : \partial e^2 \to X^1$ donnée par $z \to z^2$. Déterminer le groupe fondamental de $\mathbb{R}P^2$ (cf. la leçon TA1, *Plus d'espaces !*)

b) Soit $n \geq 2$ un entier. Construire un CW complexe dont le groupe fondamental soit isomorphe à $\mathbb{Z}_n$.

Exos

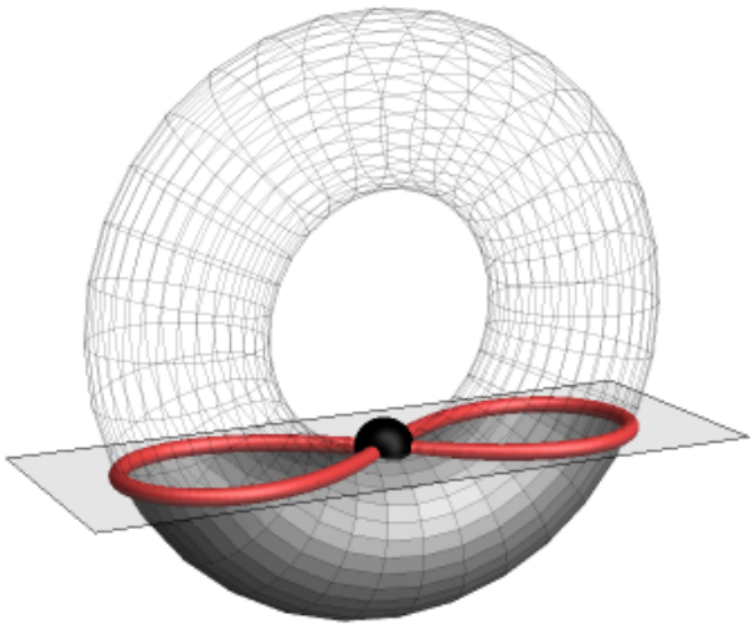
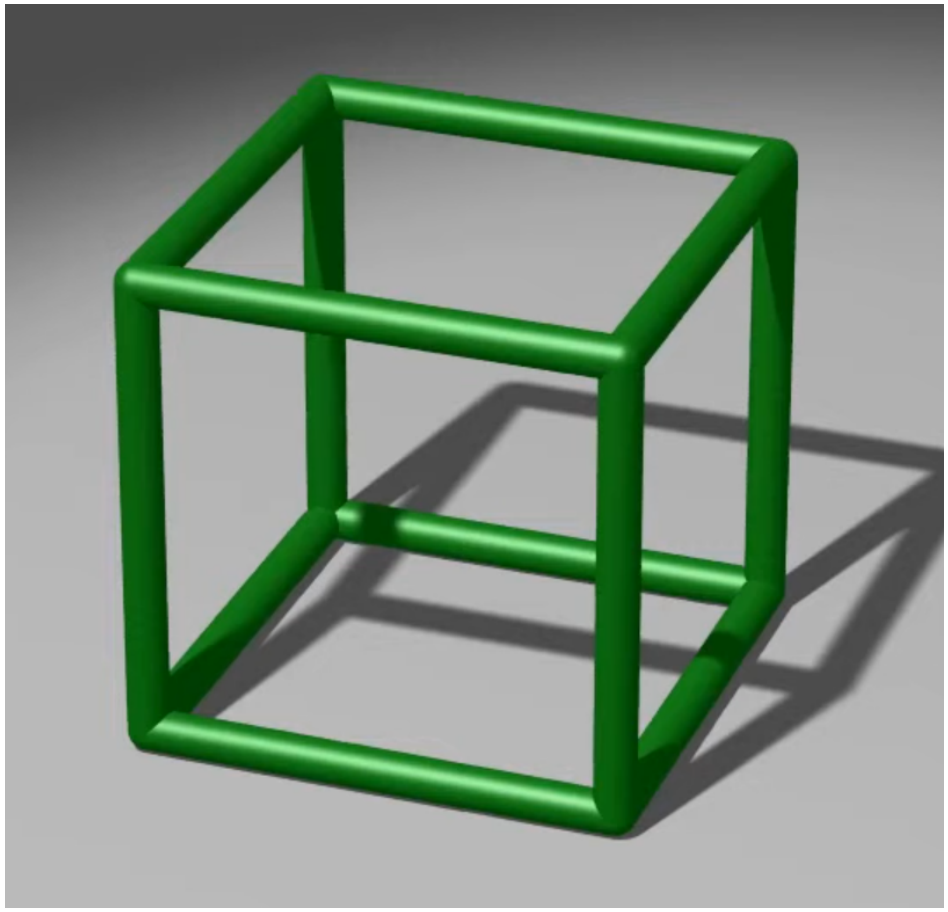


Image : Wolfram Community

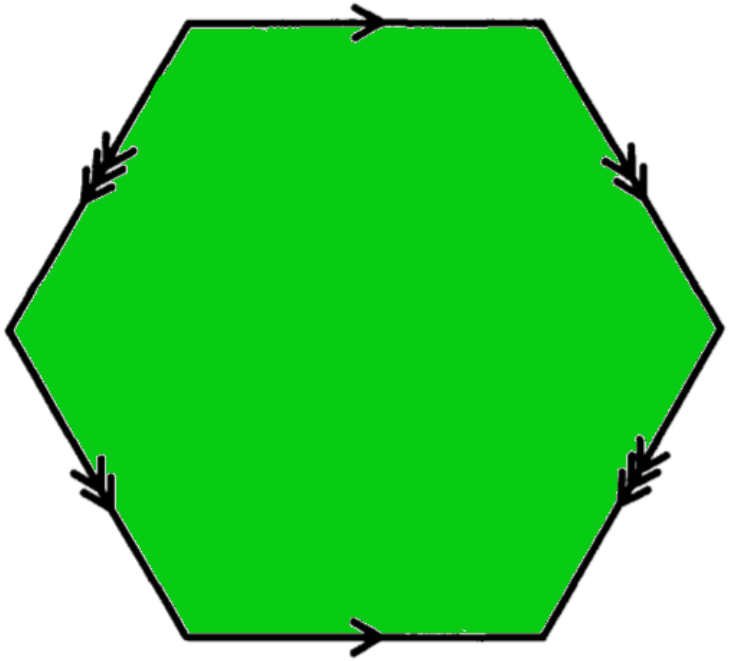
4) On considère le CW complexe de dimension 2 obtenu en attachant une 2-cellule au bouquet $X^1 = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ au moyen d'une paramétrization $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ bijective (excepté au point d'attache). Montrer que $\pi_1(X, X^0) \cong \mathbb{Z}$.

Exos



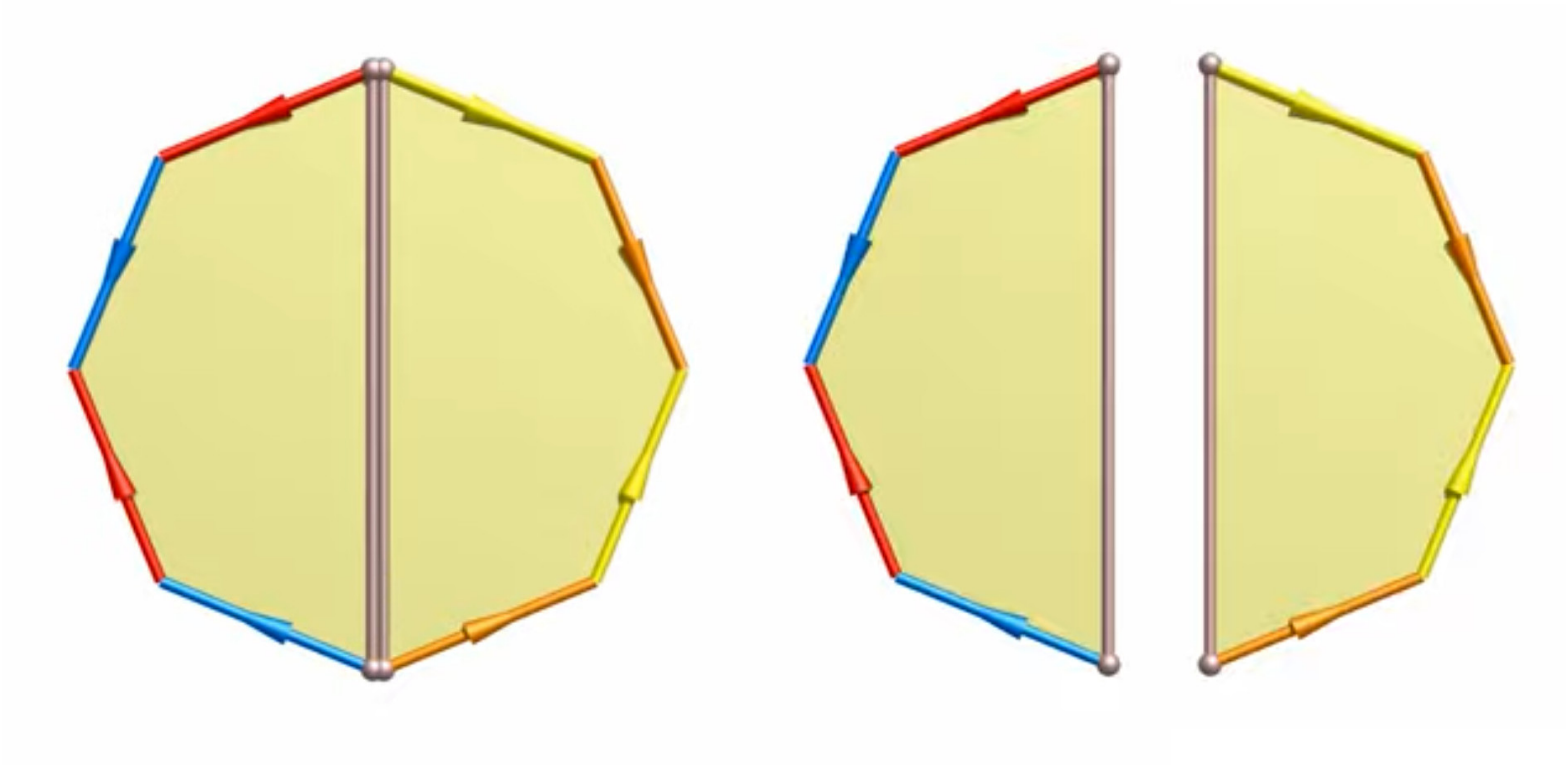
5) Quelle est le genre de la surface obtenue en épaississant les arêtes d'un cube ?

Exos



6) a) Décrire la structure de CW complexe X illustrée sur la figure.
b) À votre avis, à quelle surface X est-il homéomorphe ?

Exos



7) On considère l'octogone utilisé dans la définition de T_2. On le coupe en deux pentagones comme indiqué sur la figure. Une fois les identifications effectuées, à quelle surface les pentagones sont-ils homéomorphes ?