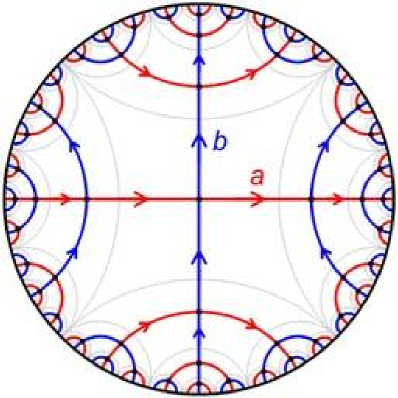
CM-TA7 : Revêtements

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Le graphe de Cayley de F_2 plongé dans le plan hyperbolique

Image : Samuel Corson

50 nuances de revêtements

Définition.– Un REVÊTEMENT d'un espace topologique B par un espace topologique E est une application continue

$$p : E \longrightarrow B$$

vérifiant la propriété suivante : pour tout point $b \in B$, il existe un ouvert U de b et un ensemble A tels que

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

où $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille d'ouverts de E sur chacun desquels

$$p_{|V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U$$

réalise un homéomorphisme.

50 nuances de revêtements

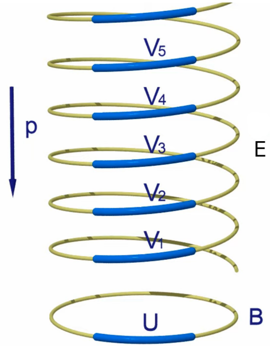


Image extraite du site Analysis situs

• L'espace E est appelé l'ESPACE TOTAL, l'espace B la BASE, l'espace $p^{-1}(b)$ la FIBRE AU DESSUS DE b, l'ouvert U un OUVERT TRIVIALISANT et les V_α les FEUILLETS au dessus de U.

50 nuances de revêtements

Exemple 1.– L'application

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ s & \longmapsto & e^{2i\pi s} \end{array}$$

est un revêtement du cercle $\mathbb{S}^1$ par la droite numérique $\mathbb{R}$.

• Traitons d'abord le point $b = 1$. Soit U l'ouvert $\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ on a

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} V_k$$

avec $V_k =]-\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} + k[$.

• D'après ce qui a été vu en TA4, l'application $p_{|V_0} : V_0 \to U$ est un homéomorphisme ayant pour inverse

$$z \mapsto \kappa(z) \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{1}{2\pi} Arg.$$

50 nuances de revêtements

- Puisque $p_{|V_k} = p_{|V_0} \circ t_{-k}$, il s'en suit que

$$z \mapsto t_k \circ \kappa(z) = \kappa(z) + k$$

est l'inverse de $p_{|V_k}$ et que donc $p_{|V_k}$ est un homéomorphisme.

- Soit b un point quelconque et U l'ouvert $\mathbb{S}^1 \setminus \{-b\}$ alors

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} V_k$$

avec $V_k =](s_b + k) - \frac{1}{2}, (s_b + k) + \frac{1}{2}[$ où s_b est un point quelconque de $p^{-1}(b)$.

50 nuances de revêtements

- Notons rot_b la multiplication par b dans $\mathbb{S}^1$. Puisque

$$p_{|V_k} = rot_b \circ p_{|V_0} \circ t_{-(s_b+k)}$$

l'application $p_{|V_k} : V_k \to U$ a pour inverse $t_{s_b+k} \circ \kappa \circ rot_b^{-1}$ c'est-à-dire

$$z \mapsto \kappa(b^{-1}z) + k + s_b$$

qui est continue. Ainsi $p_{|V_k}$ est un homéomorphisme.

50 nuances de revêtements

Exemple 2.– Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$p_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}$$

est un revêtement à n feuillets du cercle.

• Soient $b \in \mathbb{S}^1$ et $U := \mathbb{S}^1 \setminus \{-b\}$. On choisit $s_b \in \mathbb{R}$ un élément quelconque de $p^{-1}(b)$ où $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ est le revêtement de l'exemple 1. Ainsi $b = e^{2i\pi s_b}$.

• La préimage $p_n^{-1}(-b)$ est l'ensemble des n-racines de $-b$:

$$p_n^{-1}(-b) = \{e^{2ik\pi \frac{s_b + \frac{1}{2}}{n}}, k \in \{0, ..., n-1\}\}.$$

50 nuances de revêtements

• Notons V_k les n arcs ouverts formant le complémentaire de $p_n^{-1}(-b)$ dans $\mathbb{S}^1$:

$$\mathbb{S}^1 \setminus p_n^{-1}(-b) = \bigcup_{k=0}^{n-1} V_k$$

avec

$$V_k := \{e^{2it\pi \frac{s_b+\frac{1}{2}}{n}} \mid t \in]k, k+1[\}.$$

• Puisque

$$p_n^{-1}(U) = p_n^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{-b\}) = \mathbb{S}^1 \setminus p_n^{-1}(-b)$$

et on vient de montrer que

$$p_n^{-1}(U) = \bigcup_{k=0}^{n-1} V_k.$$

50 nuances de revêtements

- L'application

$$(p_n)_{|V_k} : \begin{array}{ccc} V_k & \longrightarrow & U \\ e^{2it\pi\frac{s_b+\frac{1}{2}}{n}} & \longmapsto & e^{2it\pi(s_b+\frac{1}{2})} \end{array}$$

est évidemment continue. Puisque $t \in]k, k+1[$, l'application $(p_n)_{|V_k}$ est bijective et son inverse

$$e^{2it\pi(s_b+\frac{1}{2})} \longmapsto e^{2it\pi\frac{s_b+\frac{1}{2}}{n}}$$

est continue.

- Ainsi $(p_n)_{|V_k} : V_k \longrightarrow U$ est un homéomorphisme.

50 nuances de revêtements

Exemple 3.– Il est clair que si $p_i : E_i \to B_i$, $i \in \{1,2\}$ sont deux revêtements alors $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ est un revêtement. Les deux exemples précédents permettent donc de déduire que les applications suivantes sont des revêtements

- $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ donnée par $(x, y) \to (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$
- $p : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^2$ donnée par $(x, w) \to (e^{2i\pi x}, w^n)$
- $p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ donnée par $(z, w) \to (z^m, w^n)$.

Exemple 4.– L'application $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ donnée par $z \to e^z$ est un revêtement dont la fibre au dessus de z est dénombrable $p^{-1}(p(z)) = z + 2i\pi\mathbb{Z}$. L'application $p_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ donnée par $z \to z^n$ est un revêtement à n feuillets.

50 nuances de revêtements

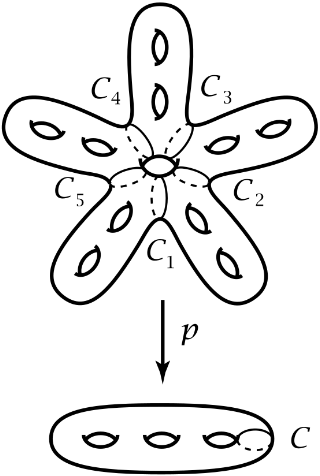


Image : Allen Hatcher

Exemple 5.– L'application $p : T_{11} \to T_3$ figurée ci-dessus est un revêtement à cinq feuillets de T_3.

50 nuances de revêtements

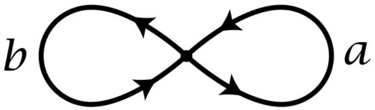


Image : Allen Hatcher

Exemple 6.– On considère le bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ paramétrée par le lacet $a * b$ où a paramétrise la première boucle et b la seconde comme suggéré dans l'illustration ci-dessus.

• Les figures qui suivent présentent toutes sortes de revêtements du bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

50 nuances de revêtements

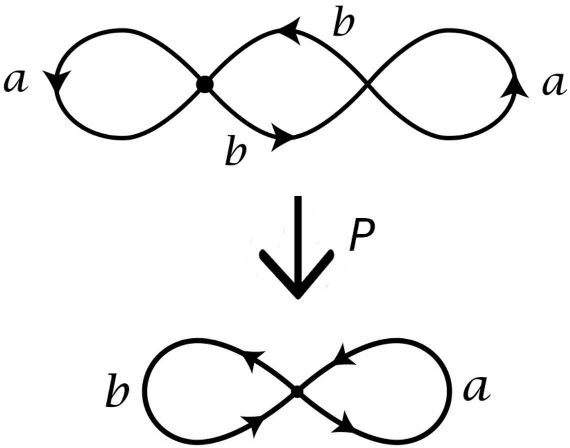


Image : Allen Hatcher

$$\pi_1(E) = F_3$$

50 nuances de revêtements

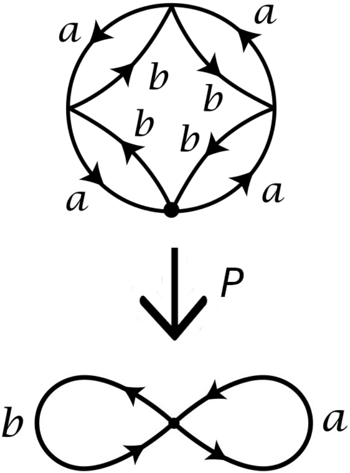


Image : Allen Hatcher

$$\pi_1(E) = F_5$$

50 nuances de revêtements

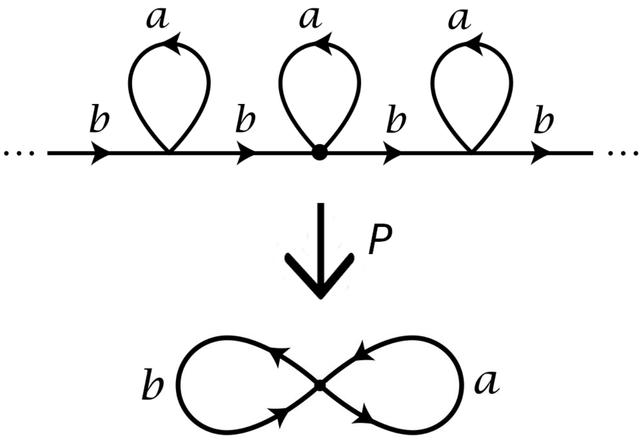


Image : Allen Hatcher

$$\pi_1(E) = F_\infty$$

50 nuances de revêtements

Exemple 7.– Soient $\mathrm{Conf_n}(\mathbb{C})$ le n-ème espace de configuration de $\mathbb{C}$ c'est-à-dire

$$\mathrm{Conf_n}(\mathbb{C}) := \{(\mathrm{z}_1, \cdots, \mathrm{z_n}) \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}} \,|\, \mathrm{z_i} \neq \mathrm{z_j} \text{ si } \mathrm{i} \neq \mathrm{j}\}$$

et $\mathrm{Poly_n}(\mathbb{C})$ le sous-espace affine $X^n + \mathbb{C}_{n-1}[X]$ c'est-à-dire

$$\mathrm{Poly_n}(\mathbb{C}) := \{\mathrm{X^n} + \mathrm{a_1 X^{n-1}} + \cdots + \mathrm{a_n} \,|\, (\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a_n}) \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}}\}.$$

On note $D \subset \mathrm{Poly_n}(\mathbb{C})$ l'ensemble des polynômes de $\mathrm{Poly_n}(\mathbb{C})$ ayant au moins une racine multiple et on pose

$$\mathcal{P}_n := \mathrm{Poly_n}(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{D}.$$

50 nuances de revêtements

- L'application

$$p : \begin{array}{ccc} \mathrm{Conf_n}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_n \\ (z_1, \cdots, z_n) & \longmapsto & \prod_{i=1}^n (X - z_i) \end{array}$$

vérifie

$$p(z_{\sigma(1)}, \cdots, z_{\sigma(n)}) = p(z_1, \cdots, z_n)$$

pour toute permutation $\sigma \in S_n$.

- C'est un revêtement à n! feuillets.

50 nuances de revêtements

• Les deux prochains exemples nécessitent de connaître le GRAPHE DE CAYLEY de F_2. :

Graphe de Cayley.– On associe à tout groupe $G = < S|R >$ un graphe $Cay(G, S)$ (complexe simplicial de dimension 1) de la façon suivante

- les sommets sont les éléments du groupe
- les arêtes joignent g à gs, $g \in G$, $s \in S$

Définition.– L'arbre $Cay(G, S)$ s'appelle le GRAPHE DE CAYLEY DE (G, S).

• Le graphe de Cayley d'un groupe G n'est pas unique, il dépend de l'ensemble générateur, d'où la notation.

50 nuances de revêtements

• Les arêtes de ce graphe sont naturellement orientées : elles vont de g à gs.

• Si l'ensemble générateur a n éléments, chaque sommet a n arêtes entrantes et n arêtes sortantes.

• Les cycles du graphe correspondent aux relations R vérifiées par les générateurs.

• Si $G = \mathbb{Z}$ et $S = \{1\}$ alors $Cay(G, S)$ est isomorphe à la droite réelle, les sommets les entiers relatifs, les arêtes, les segments $[n, n+1]$ orientés de n vers $n+1$.

• Si $G = \mathbb{Z}_n$ et $S = \{1\}$ alors $Cay(G, S)$ est isomorphe au cercle unité, les sommets sont les nombres $x_k := e^{\frac{2i\pi k}{n}}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$, et les arêtes les arcs joignant x_k à x_{k+1}.

50 nuances de revêtements

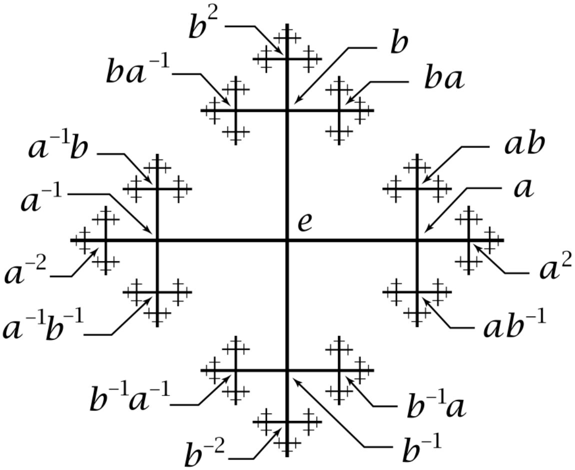


Image : Allen Hatcher

Le graphe de Cayley de F_2 avec $S = \{a, b\}$.

50 nuances de revêtements

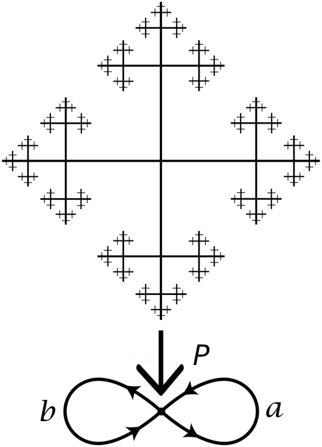


Image : Allen Hatcher

Exemple 8.– Soit $E = Cay(F_2, \{a, b\})$. L'application $p : E \to S^1 \vee \mathbb{S}^1$ représentée ci-dessus est un revêtement. Notez que E est simplement connexe.

50 nuances de revêtements

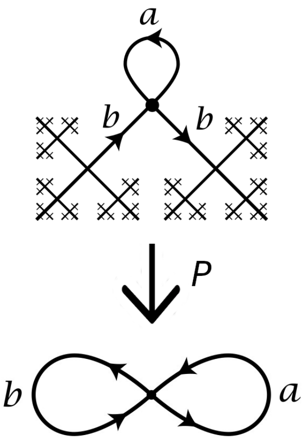


Image : Allen Hatcher

Exemple 9.– L'application $p : E \to S^1 \vee \mathbb{S}^1$ représentée ci-dessus est un revêtement. Notez que $\pi_1(E) = \mathbb{Z}$.

Espaces quotients par un groupe discret

Définition.– Soit E un ensemble et G un groupe, une ACTION (À GAUCHE) DE G SUR E est une application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G \times E & \longrightarrow & E \\ & (g, x) & \longmapsto & \phi(g, x) \end{array}$$

telle que

- $\forall x \in E$, on a $\phi(e, x) = x$
- $\forall g_1, g_2 \in G$, $x \in E$, on a $\phi(g_2, \phi(g_1, x)) = \phi(g_2 g_1, x)$.

On dit aussi que G OPÈRE (À GAUCHE) SUR E. Si aucune confusion n'est possible, on note gx pour $\phi(g, x)$.

Espaces quotients par un groupe discret

• On dit que G OPÈRE À DROITE SUR E si la seconde condition est remplacée par

$$\forall g_1, g_2 \in G, x \in E, \text{ on a } \phi(g_2, \phi(g_1, x)) = \phi(g_1 g_2, x).$$

• La convention est la suivante : on ne spécifie le sens d'une action que si celle-ci est à droite. Autrement dit, par défaut, ou si G est commutatif, les actions sont supposées à gauche.

Exemple 1 – Un groupe opère sur lui-même par multiplication à gauche $(g, h) \mapsto gh$ ou par conjugaison $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$.

Espaces quotients par un groupe discret

Exemple 2 – Soit E l'espace affine $\mathbb{R}^n$. Le groupe des translations $G = \mathcal{T}(E)$ de E agit sur E par... translation : $(t, x) \mapsto t(x)$.

Exemple 3 – En particulier, tout réseau $G = \Lambda \triangleleft \mathcal{T}(E)$ agit sur E. Pour rappel, un réseau est un sous-groupe abélien libre de dimension n. Pensez par exemple à toutes les translations par des vecteurs de coordonnées dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 4 – Soit $E = \mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Le groupe orthogonal $G = O(n)$ agit sur E par $(f, x) \mapsto f(x)$.

Exemple 5 – En particulier $\mathbb{Z}_2 = \{\pm Id\} \triangleleft O(n)$ agit sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Cette action s'appelle l'ANTIPODIE.

Espaces quotients par un groupe discret

• Étant donné un point $x \in E$, on appelle ORBITE DE x, et on note Gx l'ensemble des éléments de E associés à x sous l'action de G :

$$Gx := \{\phi(g, x), | \, g \in G\}$$

La relation « y est dans l'orbite de x » est une relation d'équivalence sur E ; les classes d'équivalence sont les orbites.

• On note E/G l'ensemble des classes d'équivalence pour une action à gauche et

$$G \backslash E \quad \text{ou} \quad {}_{G}\backslash^{E}$$

pour une action à droite.

Espaces quotients par un groupe discret

Exemple 3 (suite).– L'espace quotient $\mathbb{R}^n/\Lambda$ est appelé TORE de dimension n et noté $\mathbb{T}^n_\Lambda$.

Exemple 5 (suite).– L'espace quotient $\mathbb{S}^{n-1}/\{\pm Id\}$ est appelé l'ESPACE PROJECTIF DE DIMENSION $n-1$ et noté $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Définition.– Une action est dite TRANSITIVE si elle possède une et une seule orbite.

Exemple. – L'action de G sur lui-même par multiplication à gauche est transitive.

Définition.– Une action est dite LIBRE si pour tout $x \in E$:

$$\phi(g,x) = x \Longrightarrow g = e.$$

Espaces quotients par un groupe discret

Exemple. – Les actions des exemples 3 et 5 sont libres. L'action de l'exemple 4 n'est pas libre.

Définition.– Soit X un ensemble. La topologie pour laquelle n'importe quelle partie de X est un ouvert (et donc un fermé) est appelée la TOPOLOGIE DISCRÈTE. L'ensemble X muni de cette topologie est appelé un ESPACE DISCRET.

• Si X est un espace topologique dans lequels les singletons sont des ouverts alors cette topologie est la topologie discrète.

• En effet, toute partie $A \subset X$ est une union de points, donc une union d'ouverts, elle est donc ouverte.

Espaces quotients par un groupe discret

• On suppose désormais que G est un GROUPE DISCRET, c'est-à-dire un groupe muni de la topologie discrète. On pourra penser $G = \Lambda$ ou $G = \{\pm Id\}$.

• On suppose également que E est un espace topologique séparé et que G opère continûment sur E, c'est-à-dire que l'application $\phi : G \times E \to E$ est continue.

Lemme.– *Si pour tout $g \in G$ l'application*

$$\begin{array}{rccc} \phi_g : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \phi(g,x) \end{array}$$

est continue alors ϕ est continue.

Espaces quotients par un groupe discret

Démonstration.– En effet si $\mathcal{U} \subset E$ un ouvert de E alors

$$\phi^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{g \in G} \left(\{g\} \times \phi_g^{-1}(\mathcal{U}) \right).$$

• Il s'en suit que si ϕ_g est continue alors $\phi_g^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert et

$$\{g\} \times \phi_g^{-1}(\mathcal{U})$$

est un ouvert de $G \times E$ comme produit d'ouverts.

• Enfin, $\phi^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert comme union d'ouverts. $\square$

Espaces quotients par un groupe discret

• L'espace des orbites E/G est alors muni de la TOPOLOGIE QUOTIENT vue en TA1 : c'est topologie la moins fine pour laquelle $p : E \to E/G$ est continue. Autrement dit, U est un ouvert de E/G si $p^{-1}(U)$ est un ouvert de E.

Espaces quotients par un groupe discret

Définition.– On dit que l'action de G est PROPREMENT DISCONTINUE sur E si pour tout compact $K \subset E$, le nombre d'éléments $g \in G$ tels que

$$gK \cap K \neq \emptyset$$

où

$$gK := \{\phi(g, x) \,|\, x \in K\}$$

est fini.

Proposition.– *Soit G un groupe discret opérant continûment et proprement discontinûment sur un espace E localement compact, alors E/G est séparé.*

• Rappelons que E est dit *localement compact* si tout point $x \in E$ admet un voisinage compact $W(x)$.

Espaces quotients par un groupe discret

Démonstration (partielle).– D'après ce qui a été vu en TA1, il suffit de démontrer que la relation d'équivalence "être sur la même orbite" est fermée. Pour cela il faut montrer que si $F \subset E$ est un fermé alors

$$G.F := \{gx \,|\, g \in G, x \in F\}$$

est un fermé de E.

• On va vérifier cette propriété dans le cas où $F = \{x\}$ est réduit à un point. Autrement dit, on va montrer que l'orbite Gx de tout point $x \in E$ est un fermé de E.

Espaces quotients par un groupe discret

• Soit $y \in E$ un point quelconque et $W(y)$ un voisinage compact. On va montrer que $Gx \cap W(y)$ est fini. Ceci implique que y n'est pas adhérent à Gx et, comme le résultat est valide pour tout $y \in E$, que Gx n'a aucun point adhérent dans E. Il s'en suit que

$$\overline{Gx} = Gx$$

et par conséquent Gx est un fermé de E.

Espaces quotients par un groupe discret

• Supposons que l'intersection $Gx \cap W(y)$ soit infinie. Il existe alors une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad g_n x \in W(y).$$

c'est-à-dire tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x \in g_n^{-1} g_0 K$$

où $K = g_0^{-1} W(y)$.

• Notons que : $g_0 x \in W(y) \Longrightarrow x \in K$.

Espaces quotients par un groupe discret

- Comme G agit continûment et que $W(y)$ est compact, $K = g_0^{-1}W(y)$ est compact.

- On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x \in g_n^{-1}g_0K \cap K$$

et ceci est en contradiction avec le caractère proprement discontinue de l'action de G sur E. $\square$

Espaces quotients par un groupe discret

Théorème.– *Soit G un groupe discret opérant continûment, proprement discontinûment et librement sur un espace localement compact E alors*

$$p : E \longrightarrow E/G$$

est un revêtement.

Corollaire 1.– *L'action d'un réseau Λ sur $\mathbb{R}^n$ étant continue, libre et proprement discontinue l'application $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Lambda$ est un revêtement. En particulier $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un revêtement (cf. exo 5a).*

Corollaire 2.– *L'antipodie sur $\mathbb{S}^{n-1}$ étant continue, libre et proprement discontinue l'application $p : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ est un revêtement (cf. exo 5b)*

Espaces quotients par un groupe discret

Démonstration.– Soit $x \in E$ et $W(x)$ un voisinage compact. D'après la démonstration de la proposition précédente, $Gx \cap W(x)$ est fini. Comme E est séparé, on peut donc choisir $W(x)$ suffisamment petit pour que $Gx \cap W(x) = \{x\}$. Notons alors $K = W(x)$.

- Par construction de K, on a nécessairement

$$g \neq e \quad \Longrightarrow \quad x \notin K \cap gK$$

En effet si $x \in gK$ alors il existerait $y \in K$ tel que $x = gy$ et donc $Gx \cap K \supset \{x, g^{-1}x\}$. Et comme l'action est libre, $g^{-1}x$ et x sont deux points distincts. On obtiendrait une contradiction.

Espaces quotients par un groupe discret

• Soit

$$T = \bigcup_{g \in G} gK \cap K$$

Puisque l'action est proprement discontinue, il s'agit d'une union finie. Il s'en suit que l'espace T est compact.

• D'après ce que l'on vient de faire, l'espace T est un compact qui ne contient pas x. Par conséquent, $K \setminus T$ contient x et donc un ouvert $V(x)$ contenant x.

• Par construction les ouverts $gV(x)$, $g \in G$, sont deux à deux disjoints.

Espaces quotients par un groupe discret

• Soit $b \in E/G$. Puisque p est surjective, il existe x tel que $b = Gx = p(x)$. Notons $U = p(V(x))$. La propriété de disjonction des $gV(x)$, permet d'écrire

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{g \in G} gV(x).$$

Ce qui montre à la fois que U est un ouvert de E/G contenant b (sa pré-image est un ouvert de E) et qu'il est trivialisant.

• Il reste à montrer que $p_{|gV(x)} : gV(x) \to U$ est un homéomorphisme. L'application $p_{|gV(x)}$ est continue et surjective. Montrons qu'elle est injective.

Espaces quotients par un groupe discret

• Soit $gy_1, gy_2 \in gV(x)$ tels que $p(gy_1) = p(gy_2)$. Cela signifie que gy_1 et gy_2 appartiennent à la même orbite Gy d'un point $y \in V(x)$. Donc, il existe $g_1, g_2 \in G$ tels que $y_1 = g_1 y$ et $y_2 = g_2 y$.

• En particulier, $y_2 = g_3 y_1$ avec $g_3 = g_2 g_1^{-1}$. Il en découle que

$$y_2 \in V(x) \cap g_3 V(x)$$

Puisque les ensembles $gV(x)$, $g \in G$, sont deux à deux disjoints, c'est que $g_3 = e$, donc que $y_1 = y_2$. Par conséquent, l'application $p_{|gV(x)}$ est injective.

Espaces quotients par un groupe discret

• Notons $f := p^{-1}_{|gV(x)} : U \to gV(x)$. Il reste à montrer que f est continue.

• Soit $\mathcal{V} \subset gV(x)$ un ouvert. Il faut montrer que $f^{-1}(\mathcal{V})$ est un ouvert de $U \subset E/G$.

• Par définition de la topologie quotient, $f^{-1}(\mathcal{V})$ est un ouvert de E/G si et seulement si $p^{-1}(f^{-1}(\mathcal{V}))$ est un ouvert de E.

• C'est bien le cas puisque cette préimage est une union d'ouverts :

$$p^{-1}(f^{-1}(\mathcal{V})) = \bigcup_{g \in G} g\mathcal{V}.$$

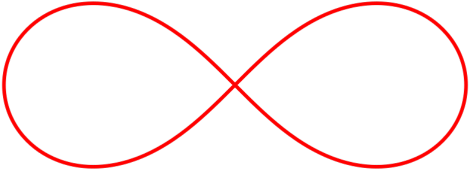
• Au final, on vient de montrer que $p : E \to E/G$ est un revêtement. $\square$

Espaces quotients par un groupe discret

Remarque.– Soient $f : E/G \to Y$ une application quelconque et soit $U \subset Y$ un ouvert de Y. L'ensemble $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E/G si et seulement si $p^{-1}(f^{-1}(U))$ est un ouvert de E. Or $p^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ p)^{-1}$. On obtient ainsi le fait général suivant :

f est continue ssi $f \circ p$ est continue.

Exos



1) La paramétrisation $f : \mathbb{R} \to L \subset \mathbb{R}^2$

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1+\cos^2 t} \right)$$

de la lemniscate de Bernoulli $L \simeq \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ est-elle un revêtement de L ? Si oui, le démontrer, sinon dire pourquoi.

Exos

Image extraite d'un article de Santiago Villa de la revue Ibero 90.9

2) Transformer le logo du groupe de heavy metal *Lamb of God* de façon à ce qu'il représente un revêtement de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

Exos

Définition.– On rappelle qu'une application $f : B \to Y$ est dite LOCALEMENT CONSTANTE si pour tout point $b \in B$, il existe un ouvert U de b tel que $f_{|U}$ est constante.

3) Soit $p : E \to B$ un revêtement.

a) Soit B un espace topologique connexe. Montrer que si $f : B \to \mathbb{Z}$ est localement constante alors elle est continue sur B. En déduire qu'elle est constante sur B.

b) Montrer que si B est connexe alors toutes les fibres de p ont le même cardinal.

c) Montrer que si B et E sont compacts alors le cardinal des fibres est fini.

Exos

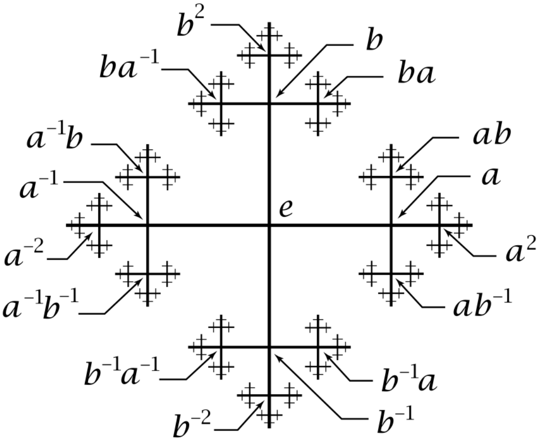


Image : Allen Hatcher

4) Montrer que le graphe de Cayley $Cay(F_2, \{a, b\})$ est simplement connexe.

Exos

5) a) Montrer que l'action d'un réseau Λ sur $\mathbb{R}^n$ est continue, libre et proprement discontinue.

b) Montrer que l'antipodie sur $\mathbb{S}^{n-1}$ est continue, libre et proprement discontinue.

Exos

6) Soient n et m deux nombres entiers non nuls tels que $n \wedge m = 1$. On considère sur

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{U}_n := \{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \cdots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}\}$ donnée par

$$(z_1, z_2) \longmapsto (e^{\frac{2i\pi}{n}} z_1, e^{\frac{2im\pi}{n}} z_2)$$

L'espace quotient de $\mathbb{S}^3$ par cette action est appelé ESPACE LENTICULAIRE $L(n, m)$. Montrer que $p : \mathbb{S}^3 \to L(n, m)$ est un revêtement.

Exos

7) Soit $p : X \to B$ un revêtement et $f : C \to B$ une application continue. On pose

$$X \times_B C := \{(x, c) \in X \times C \mid p(x) = f(c)\}$$

et on definit

i) $q : X \times_B C \to C$ par $q(x, c) = c$.
ii) $\widetilde{f} : X \times_B C \to X$ par $f(x, c) = x$.

a) Montrer que $p \circ \tilde{f} = f \circ q$.
b) Soient $V \subset X$, $U = p(V)$ et $\mathcal{U} = f^{-1}$. Montrer que

$$\widetilde{f}^{-1}(V) = V \times_U \mathcal{U}.$$

c) Montrer que q est un revêtement. L'application q est appelée le TIRÉ EN ARRIÈRE DU REVÊTEMENT p PAR f et elle est notée $q = f^* p$.