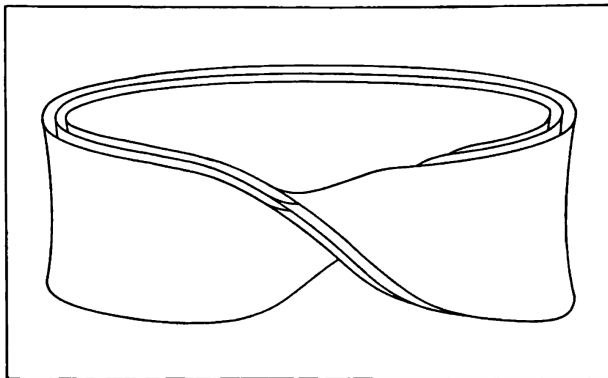


CM-TA8 : Injectivité !

Vincent Borrelli

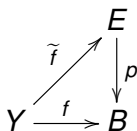
Université de Lyon



Revêtement à deux feuillets du ruban de Möbius

Relèvements des chemins

Définition.— Soient p un revêtement et $f : Y \rightarrow B$ une application continue. Un RELÈVEMENT de f est toute application continue $\tilde{f} : Y \rightarrow E$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$.

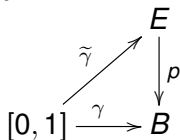


- On a déjà rencontré la notion de relèvement dans le cas particulier du revêtement $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dans la leçon TA4. Grâce à la *propriété de relèvement*, nous avons déterminé le groupe fondamental de \mathbb{S}^1 .
- Nous allons généraliser cette propriété de relèvement à tous les revêtements.

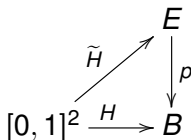
Relèvements des chemins

Propriété de relèvement des chemins.– Soit

$p : (E, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ un revêtement et soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ un chemin partant de $\gamma(0) = b_0$, alors il existe un unique relevé $\tilde{\gamma}$ de γ tel que $\tilde{\gamma}(0) = x_0$:



De même, si $H : [0, 1]^2 \rightarrow B$ est une homotopie relative joignant deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 \in L(B, b_0, b_1)$ alors il existe une unique homotopie $\tilde{H} : [0, 1]^2 \rightarrow E$ joignant $\tilde{\gamma}_1$ à $\tilde{\gamma}_2$, telle que $\tilde{H}(0, t) = x_0$ et $p \circ \tilde{H} = H$



Relèvements des chemins

- La démonstration de la propriété de relèvement est facilitée si l'on dispose du lemme suivant :

Lemme de coïncidence.— Soient \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 deux relèvements de $f : Y \rightarrow B$ alors l'ensemble de coïncidence

$$S := \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$$

est à la fois ouvert et fermé dans Y . Si Y est connexe alors $S = \emptyset$ ou $S = Y$.

Démonstration du lemme.— Soit

$$\begin{aligned} \Phi : Y &\longrightarrow E \times E \\ y &\longmapsto (\tilde{f}_1(y), \tilde{f}_2(y)). \end{aligned}$$

Notons que $S = \Phi^{-1}(\Delta E)$ où $\Delta E \subset E \times E$ est la diagonale de E^2 .

Relèvements des chemins

- Rappelons que

$$\Delta E \text{ est fermé} \iff E \text{ est séparé}$$

et que l'espace total E est toujours implicitement supposé séparé. On en déduit que S est fermé puisque Φ est continue.

- Montrons que S est ouvert. Soit $y \in S$ et $b = f(y)$. Il existe un ouvert U contenant b qui est trivialisant, c'est-à-dire tel que

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_{\alpha}$$

Il existe donc un indice $\alpha(y)$ tel que $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y) \in V_{\alpha(y)}$.

Relèvements des chemins

- Par continuité, il existe un voisinage $W \subset Y$ de y tel que

$$\forall y' \in W, \quad \tilde{f}_1(y'), \tilde{f}_2(y') \in V_{\alpha(y)}$$

- Puisque \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 sont des relèvements de f , on a

$$\forall y' \in W, \quad p \circ \tilde{f}_1(y') = p \circ \tilde{f}_2(y')$$

- Comme l'application p restreinte à $V_{\alpha(y)}$ est bijective sur son image U , on a pour tout $y' \in W$

$$p \circ \tilde{f}_1(y') = p \circ \tilde{f}_2(y')$$

$$\implies \left(p|_{V_{\alpha(y)}} \right)^{-1} \circ p \circ \tilde{f}_1(y') = \left(p|_{V_{\alpha(y)}} \right)^{-1} \circ p \circ \tilde{f}_2(y')$$

$$\implies \tilde{f}_1(y') = \tilde{f}_2(y')$$

- Ainsi $W \in \mathcal{S}$ et \mathcal{S} est ouvert. □

Relèvements des chemins

Relèvements
des cheminsL'injectivité
impossible

Exos

Démonstration de la propriété de relèvement. – a) Pour tout point $b \in B$, on note U_b un ouvert trivialisant c'est-à-dire tel que $p^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ au sens de la définition d'un revêtement. On a trivialement

$$B = \bigcup_{b \in B} U_b.$$

- Ainsi, en prenant la preimage de ce recouvrement par γ , on obtient un recouvrement de $[0, 1]$ par des ouverts

$$[0, 1] = \bigcup_{b \in B} \gamma^{-1}(U_b)$$

Relèvements des chemins

- Puisque $[0, 1]$ est compact (et évidemment métrique), par le lemme de Lebesgue (cf. la leçon TA5 consacrée au théorème de Van Kampen) il existe une subdivision

$$[0, 1] = \bigcup_{n=0}^{N-1} I_n \quad \text{avec} \quad I_n = \left[\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N} \right]$$

pour laquelle, pour tout n , il existe $p(n) \in B$ telle que

$$\gamma(I_n) \subset U_n \quad \text{où} \quad U_n := U_{p(n)}$$

- On va définir $\tilde{\gamma}$ successivement sur chaque I_n , $n \in \{0, \dots, N-1\}$. Commençons par $I_0 = [0, \frac{1}{N}]$.
- Notons V_α^0 les ouverts au dessus de U_0 :

$$p^{-1}(U_0) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha^0$$

Relèvements des chemins

- Puisque $\gamma(I_0) \subset U_0$, on a nécessairement $b_0 = \gamma(0) \in U_0$ et donc il existe un indice α_0 tels que $x_0 \in V_{\alpha_0}^0$.

- La définition d'un revêtement implique que l'application

$$p|_{V_{\alpha_0}^1} : V_{\alpha_0}^1 \rightarrow U_0$$

est un homéomorphisme. Définissons $\tilde{\gamma}$ sur I_0 en posant

$$\forall s \in I_0, \quad \tilde{\gamma}(s) := \left(p|_{V_{\alpha_0}^1}\right)^{-1} \circ \gamma.$$

- Par construction, $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et donc $\tilde{\gamma}$ est un relèvement de γ au dessus de I_0
- On poursuit sur I_1 en considérant $b_1 := \gamma(\frac{1}{N}) \in U_1$ et $x_1 := \tilde{\gamma}(\frac{1}{N})$ pour prolonger $\tilde{\gamma}$ sur I_1 . Et ainsi de suite.

Relèvements des chemins

- Supposons que $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ soient deux relèvements tels que $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$ alors

$$\mathcal{S} := \{s \in [0, 1] \mid \tilde{\gamma}_1(s) = \tilde{\gamma}_2(s)\}$$

est non vide puisqu'il contient 0. D'après le lemme, l'ensemble \mathcal{S} est donc $[0, 1]$ ce qui entraîne que $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$.

- La démonstration du point b) est tout à fait similaire. Elle est laissée en exercice.



L'injectivité impossible

Théorème de l'injectivité de p_* – Soit $p : (E, x_0) \rightarrow (B, b_0)$ un revêtement. L'application induite

$$p_* : \pi_1(E, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$$

est injective. Le sous-groupe image $p_(\pi_1(E, x_0))$ est constitué des classes de lacets de B , basés en b_0 , et dont les relèvements sont des lacets de E .*

Observation.– Ce théorème est très surprenant car on a construit des revêtements dont le groupe fondamental de l'espace total E semble bien plus gros que celui de la base B . Par exemple, si E est la triple boucle et B est le bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ alors $\pi_1(E) = F_3$ alors que $\pi_1(B) = F_2$. Autre exemple, si $E = T_{11}$ et $B = T_3$ alors $\pi_1(T_{11}) \hookrightarrow \pi_1(T_3)$...

- Le théorème de Nielsen-Schreier permet d'éclairer la situation.

L'injectivité impossible



Image : Otto Schreier et Jakob Nielsen

Théorème de Nielsen-Schreier (1920-1926).— *Tout sous-groupe H d'un groupe libre G est un groupe libre. Si de plus $G = F_r$ et l'indice de H est n alors $H \cong F_{1+n(r-1)}$.*

- Supposons $r = 2$ alors tous les sous-groupes stricts de G d'indice fini sont des groupes libres F_{1+n} dont le rang est plus grand que 2 !

L'injectivité impossible

Un exemple.— Dans F_2 on considère le sous groupe H d'indice 2 constitué de tous les mots réduits de longueur paire.

- Ce sous-groupe est engendré par les six éléments :

$$x = aa, y = ab, z = ab^{-1}, s = a^{-1}b, t = ba \text{ et } u = bb$$

- Ces générateurs sont liés par les relations suivantes

$$s = x^{-1}y, \quad t = z^{-1}x \quad \text{et} \quad u = z^{-1}y$$

Ainsi, x, y et z suffisent à engendrer H .

- On démontre que x, y, z ne vérifient aucune relation. Par conséquent $H \cong F_3 = \langle x, y, z \rangle$ qui est bien de rang $1 + 2(2 - 1) = 3$.

L'injectivité impossible

Démonstration du théorème de l'injectivité de p_* – Soit $\tilde{\gamma} \in \Omega(E, x_0)$ telle que $p_*([\tilde{\gamma}]) = [c_{b_0}]$.

- Cela signifie que $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ est homotope à c_{b_0} dans B . Soit $H : [0, 1]^2 \rightarrow B$ une homotopie de lacets basés en b_0 telle que $H(0, \cdot) = \gamma$ et $H(1, \cdot) = c_{b_0}$.

- D'après la propriété de relèvement, il existe une homotopie $\tilde{H} : [0, 1]^2 \rightarrow E$ telle que

$$p \circ \tilde{H} = H, \quad H(0, \cdot) = \gamma \quad \text{et} \quad H(1, \cdot) = c_{b_0}$$

où \tilde{c}_{b_0} est un relevé du chemin constant.

L'injectivité impossible

- Montrons que les chemins

$$s \mapsto \tilde{\gamma}_t(s) := \tilde{H}(t, s)$$

sont des lacets basés en x_0 . En effet, l'application

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow F_{b_0} \\ t &\longmapsto \tilde{H}(t, 1) \end{aligned}$$

est continue à valeur dans l'espace discret $F_{b_0} := p^{-1}(b_0)$. Elle est donc constante. Puisque $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{H}(0, 1) = x_0$, c'est donc que tous les $\tilde{\gamma}_t$ sont des lacets basés en x_0 .

- Or le chemin constant c_{x_0} est un relevé de c_{b_0} . Par unicité du relèvement $\tilde{c}_{b_0} = \tilde{H}(1, \cdot) = c_{x_0}$.
- Donc $\tilde{\gamma}$ est homotope à c_{x_0} et donc $[\tilde{\gamma}]$ est l'élément neutre du $\pi_1(E, x_0)$, i. e. p_* est injective.

L'injectivité impossible

- Supposons maintenant que $p_*([\delta]) = [\gamma]$ avec $\delta \in \Omega(E, x_0)$ et $\gamma \in \Omega(B, b_0)$. On veut montrer que le relèvement de γ est un lacet.
- La supposition signifie que $p \circ \delta$ et γ sont homotopes dans B . Le relèvement de cette homotopie fournit une homotopie \tilde{H} entre $\tilde{H}(0, s) = \delta(s)$ et $\tilde{\gamma} := \tilde{H}(1, s)$.
- Notons $\delta_t := \tilde{H}(t, \cdot)$, ainsi $\delta_0 = \delta$ et $\delta_1 = \tilde{\gamma}$. Pour une raison similaire à celle développée plus haut, les chemins δ_t sont en fait des lacets basés en x_0 . En particulier $\tilde{\gamma}$ est en un lacet.
- Réciproquement, si $\tilde{\gamma}$ est un lacet de E basé en x_0 , son image $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ est nécessairement un lacet basé en b_0 .



1) Soit $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(B, b_0)$ deux lacets homotopes et $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow E$ leurs uniques relevés issus de $x_0 = \tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0)$. Montrer que $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$.

2) Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement. On suppose que E est connexe par arcs. Montrer que

p_* est un isomorphisme $\iff p$ est un homéomorphisme

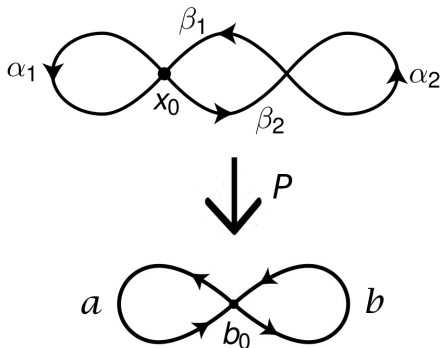


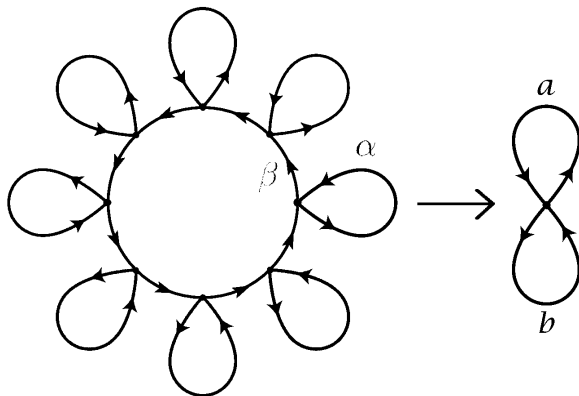
Image : Allen Hatcher

3) On considère le revêtement $p : E \rightarrow S^1 \vee S^1$ figuré à l'exemple 6 et où E est la triple boucle.

a) Déterminer $\pi_1(E, x_0)$.

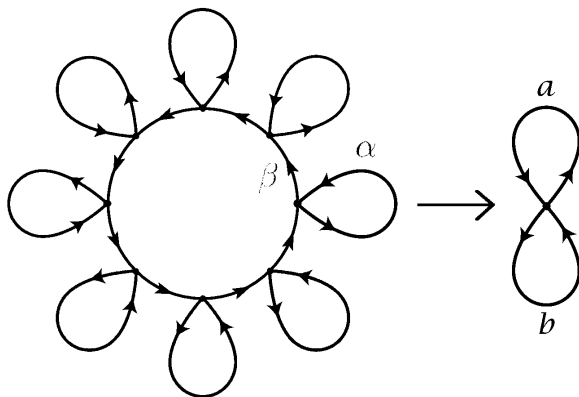
b) Décrire l'image de p_* dans $\pi_1(S^1 \vee S^1, b_0) = \langle [a], [b] \rangle$

Exos

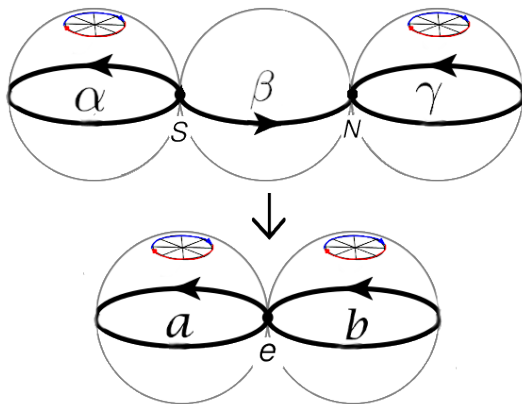


4) Soit E le CW-complexe de dimension 1 constitué de n sommets répartis sur un cercle, des n arêtes ainsi formées sur ce cercle et de n boucles supplémentaires, chacune attachée à un sommet. On considère le revêtement $p : E \rightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ figuré ci-dessus.

Exos

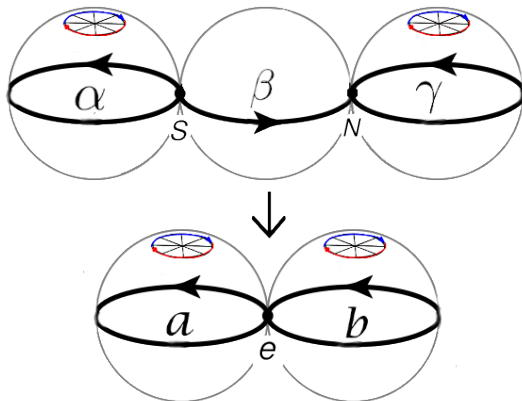


- a) Soit x le sommet qui est la base des lacets α et β figurés sur le dessin. Montrer que $\pi_1(E, x)$ est isomorphe au groupe libre F_{n+1} .
- b) Décrire l'application $p_* : \pi_1(E, x) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, 1)$.



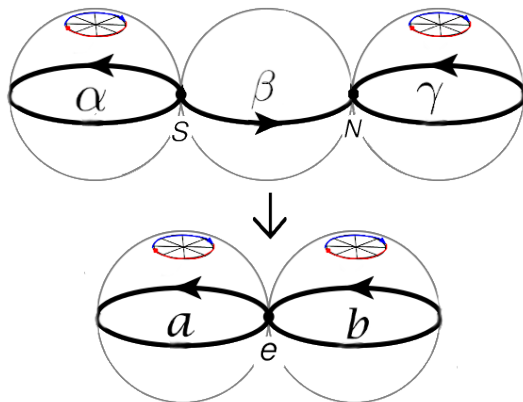
5) Soient S et N deux points antipodaux de S^2 et $e := [S] = [N] \in \mathbb{R}P^2$ leur image par l'application quotient

$$q: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2.$$

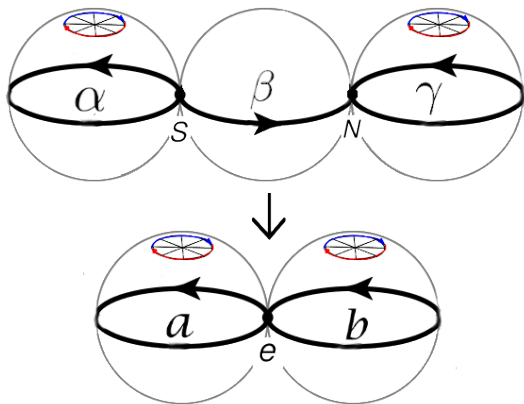


On note E le CW-complexe de dimension 2 obtenu en identifiant le point $e \in \mathbb{R}P^2$ au point $S \in S^2$ et en identifiant le point e d'une autre copie de $\mathbb{R}P^2$ au point N :

$$E = \mathbb{R}P^2 \vee_S S^2 \vee_N \mathbb{R}P^2$$



On considère le revêtement à deux feuillets
 $p : E \rightarrow \mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ où p sur les deux copies de $\mathbb{R}P^2$ est le
 revêtement trivial à valeur dans $\mathbb{R}P^2 \vee \{e\}$ et, sur S^2 , p est
 l'application quotient $S^2 \rightarrow \{e\} \vee \mathbb{R}P^2$.



- Déterminer le groupe fondamental de E au point S .
- Montrer que les groupes fondamentaux de E et de $B = \mathbb{R}P^2 \vee_e \mathbb{R}P^2$ sont isomorphes.
- L'application $p_* : \pi_1(E, S) \rightarrow \pi_1(B, S)$ est-elle un isomorphisme ?