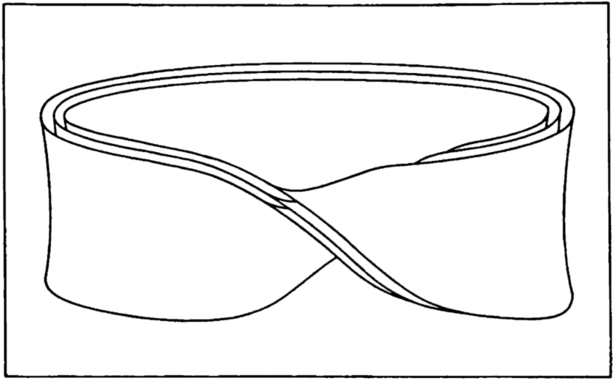
CM-TA8 : Injectivité !

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Revêtement à deux feuillets du ruban de Möbius

Image : Klaus Janich, Topology

Relèvements des chemins

Définition.– Soient p un revêtement et $f : Y \to B$ une application continue. Un RELÈVEMENT de f est toute application continue $\tilde{f} : Y \to E$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

• On a déjà rencontré la notion de relèvement dans le cas particulier du revêtement $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dans la leçon TA4. Grâce à la *propriété de relèvement*, nous avions déterminé le groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$.

• Nous allons généraliser cette propriété de relèvement à tous les revêtements.

Relèvements des chemins

Propriété de relèvement des chemins.– *Soit $p : (E, x_0) \to (B, b_0)$ un revêtement et soit $\gamma : [0,1] \to B$ un chemin partant de $\gamma(0) = b_0$, alors il existe un unique relevé $\widetilde{\gamma}$ de γ tel que $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$:*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & B \end{tikzcd}$$

De même, si $H : [0,1]^2 \to B$ est une homotopie relative joignant deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 \in L(B, b_0, b_1)$ alors il existe une unique homotopie $\widetilde{H} : [0,1]^2 \to E$ joignant $\widetilde{\gamma}_1$ à $\widetilde{\gamma}_2$, telle que $\widetilde{H}(0,t) = x_0$ et $p \circ \widetilde{H} = H$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]^2} \arrow[ur, "\widetilde{H}"] \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

Relèvements des chemins

• La démonstration de la propriété de relèvement est facilité si l'on dispose du lemme suivant :

Lemme de coïncidence.– *Soient $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$ deux relèvements de $f : Y \to B$ alors l'ensemble de coïncidence*

$$\mathcal{S} := \{y \in Y \,|\, \widetilde{f_1}(y) = \widetilde{f_2}(y)\}$$

est à la fois ouvert et fermé dans Y. Si Y est connexe alors $\mathcal{S} = \emptyset$ ou $\mathcal{S} = Y$.

Démonstration du lemme.– Soit

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & Y & \longrightarrow & E \times E \\ & y & \longmapsto & \left(\widetilde{f_1}(y), \widetilde{f_2}(y)\right). \end{array}$$

Notons que $\mathcal{S} = \Phi^{-1}(\Delta E)$ où $\Delta E \subset E \times E$ est la diagonale de E^2.

Relèvements des chemins

• Rappelons que

$$\Delta E \text{ est fermé} \iff E \text{ est séparé}$$

et que l'espace total E est toujours implicitement supposé séparé. On en déduit que $\mathcal{S}$ est fermé puisque Φ est continue.

• Montrons que $\mathcal{S}$ est ouvert. Soit $y \in \mathcal{S}$ et $b = f(y)$. Il existe un ouvert U contenant b qui est trivialisant, c'est-à-dire tel que

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

Il existe donc un indice $\alpha(y)$ tel que $\widetilde{f}_1(y) = \widetilde{f}_2(y) \in V_{\alpha(y)}$.

Relèvements des chemins

• Par continuité, il existe un voisinage $U' \subset U$ tel que

$$\forall y' \in U', \quad \widetilde{f}_1(y'), \widetilde{f}_2(y') \in V_{\alpha(y)}$$

• Puisque $\widetilde{f}_1$ et $\widetilde{f}_2$ sont des relèvements de f, on a

$$\forall y' \in U', \quad p \circ \widetilde{f}_1(y') = p \circ \widetilde{f}_2(y')$$

• Comme l'application p restreinte à $V_{\alpha(y)}$ est bijective sur son image U, on a pour tout $y' \in U'$

$$p \circ \widetilde{f}_1(y') = p \circ \widetilde{f}_2(y')$$

$$\Longrightarrow \left(p_{|V_{\alpha(y)}}\right)^{-1} \circ p \circ \widetilde{f}_1(y') = \left(p_{|V_{\alpha(y)}}\right)^{-1} \circ p \circ \widetilde{f}_2(y')$$

$$\Longrightarrow \widetilde{f}_1(y') = \widetilde{f}_2(y')$$

• Ainsi $U' \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est ouvert. $\square$

Relèvements des chemins

Démonstration de la propriété de relèvement. – a) Pour tout point $b \in B$, on note U_b un ouvert trivialisant c'est-à-dire tel que $p^{-1}(U_b) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ au sens de la définition d'un revêtement. On a trivialement

$$B = \bigcup_{b \in B} U_b.$$

• Ainsi, en prenant la preimage de ce recouvrement par γ, on obtient un recouvrement de $[0, 1]$ par des ouverts

$$[0, 1] = \bigcup_{b \in B} \gamma^{-1}(U_b)$$

Relèvements des chemins

• Puisque $[0,1]$ est compact (et évidemment métrique), par le lemme de Lebesgue (cf. la leçon TA5 consacrée au théorème de Van Kampen) il existe une subdivision

$$[0,1] = \bigcup_{n=0}^{N-1} I_n \quad \text{avec} \quad I_n = [\frac{n}{N}, \frac{n+1}{N}]$$

pour laquelle, pour tout n, il existe $p(n) \in B$ telle que

$$\gamma(I_n) \subset U_n \quad \text{où} \quad U_n := U_{p(n)}$$

• On va définir $\tilde{\gamma}$ successivement sur chaque I_n, $n \in \{0, ..., N-1\}$. Commençons par $I_0 = [0, \frac{1}{N}]$.

• Notons V_α^0 les ouverts au dessus de U_0 :

$$p^{-1}(U_0) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha^0$$

Relèvements des chemins

• Puisque $\gamma(I_0) \subset U_0$, on a nécessairement $b_0 = \gamma(0) \in U_0$ et donc il existe un indice α_0 tels que $x_0 \in V^0_{\alpha_0}$.

• La définition d'un revêtement implique que l'application

$$p_{|V^0_{\alpha_0}} : V^1_{\alpha_0} \to U_0$$

est un homéomorphisme. Définissons $\widetilde{\gamma}$ sur I_0 en posant

$$\forall s \in I_0, \qquad \widetilde{\gamma}(s) := \left(p_{|V^0_{\alpha_0}}\right)^{-1} \circ \gamma.$$

• Par construction, $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et donc $\widetilde{\gamma}$ est un relèvement de γ au dessus de I_0

• On poursuit sur I_1 en considérant $b_1 := \gamma(\frac{1}{N}) \subset U_1$ et $x_1 := \widetilde{\gamma}(\frac{1}{N})$ pour prolonger $\widetilde{\gamma}$ sur I_1. Et ainsi de suite.

Relèvements des chemins

• Supposons que $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$ soient deux relèvements tels que $\widetilde{\gamma}_1(0) = \widetilde{\gamma}_2(0)$ alors

$$\mathcal{S} := \{s \in [0,1] \,|\, \widetilde{\gamma}_1(s) = \widetilde{\gamma}_2(s)\}$$

est non vide puisqu'il contient 0. D'après le lemme, l'ensemble $\mathcal{S}$ est donc $[0,1]$ ce qui entraîne que $\widetilde{\gamma}_1 = \widetilde{\gamma}_2$.

• La démonstration du point b) est tout à fait similaire. Elle est laissée en exercice.

$\square$

L'injectivité impossible

Théorème de l'injectivité de p_* – *Soit $p : (E, x_0) \to (B, b_0)$ un revêtement. L'application induite*

$$p_* : \pi_1(E, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$$

est injective. Le sous-groupe image $p_*(\pi_1(E, x_0))$ est constitué des classes de lacets de B, basés en b_0, et dont les relèvements sont des lacets de E.

Observation.– Ce théorème est très surprenant car on a construit des revêtements dont le groupe fondamental de l'espace total E semble bien plus gros que celui de la base B. Par exemple, si E est la triple boucle et B est le bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ alors $\pi_1(E) = F_3$ alors que $\pi_1(B) = F_2$. Autre exemple, si $E = T_{11}$ et $B = T_3$ alors $\pi_1(T_{11}) \hookrightarrow \pi_1(T_3)$...

• Le théorème de Nielsen-Schreier permet d'éclairer la situation.

L'injectivité impossible

Image : Otto Schreier et Jakob Nielsen

Théorème de Nielsen-Schreier (1920-1926).– *Tout sous-groupe H d'un groupe libre G est un groupe libre. Si de plus $G = F_r$ et l'indice de H est n alors $H \cong F_{1+n(r-1)}$.*

• Supposons $r = 2$ alors tous les sous-groupes stricts de G d'indice fini sont des groupes libres F_{1+n} dont le rang est plus grand que 2 !

L'injectivité impossible

Un exemple.– Dans F_2 on considère le sous groupe H d'indice 2 constitué de tous les mots réduits de longueur paire.

• Ce sous-groupe est engendré par les six éléments :

$$x = aa, y = ab, z = ab^{-1}, s = a^{-1}b, t = ba \text{ et } u = bb$$

• Ces générateurs sont liés par les relations suivantes

$$s = x^{-1}y, \quad t = z^{-1}x \quad \text{et} \quad u = z^{-1}y$$

Ainsi, x, y et z suffisent à engendrer H.

• On démontre que x, y, z ne vérifient aucune relation. Par conséquent $H \cong F_3 =< x, y, z >$ qui est bien de rang $1 + 2(2 - 1) = 3$.

L'injectivité impossible

Démonstration du théorème de l'injectivité de p_* – Soit $\widetilde{\gamma} \in \Omega(E, x_0)$ telle que $p_*([\widetilde{\gamma}]) = [c_{b_0}]$.

• Cela signifie que $\gamma := p \circ \widetilde{\gamma}$ est homotope à c_{b_0} dans B. Soit $H : [0,1]^2 \to B$ une homotopie de lacets basés en b_0 telle que $H(0, \cdot) = \gamma$ et $H(1, \cdot) = b_0$.

• D'après la propriété de relèvement, il existe une homotopie $\widetilde{H} : [0,1]^2 \to E$ telle que

$$p \circ \widetilde{H} = H, \quad H(0, \cdot) = \widetilde{\gamma} \quad \text{et} \quad H(1; \cdot) = \widetilde{c}_{b_0}$$

où $\widetilde{c}_{b_0}$ est un relevé du chemin constant.

L'injectivité impossible

• Montrons que les chemins

$$s \mapsto \widetilde{\gamma}_t(s) := \widetilde{H}(t, s)$$

sont des lacets basés en x_0. En effet, l'application

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & F_{b_0} \\ t & \longmapsto & \widetilde{H}(t,1) \end{array}$$

est continue à valeur dans l'espace discret $F_{b_0} := p^{-1}(b_0)$. Elle est donc constante. Puisque $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{H}(0,1) = x_0$, c'est donc que tous les $\widetilde{\gamma}_t$ sont des lacets basés en x_0.

• Or le chemin constant c_{x_0} est un relevé de c_{b_0}. Par unicité du relèvement $\widetilde{c}_{b_0} = \widetilde{H}(1, \cdot) = c_{x_0}$.

• Donc $\widetilde{\gamma}$ est homotope à c_{x_0} et donc $[\widetilde{\gamma}]$ est l'élément neutre du $\pi_1(E, x_0)$, i. e. p_* est injective.

L'injectivité impossible

• Supposons maintenant que $p_*([\delta]) = [\gamma]$ avec $\delta \in \Omega(E, x_0)$ et $\gamma \in \Omega(B, b_0)$. Par conséquent $p \circ \delta$ et γ sont homotopes dans B.

• Le relèvement de cette homotopie fournit une homotopie $\widetilde{H}$ entre $\widetilde{H}(0, s) = \delta(s)$ et $\widetilde{\gamma} := \widetilde{H}(1, s)$.

• Notons $\delta_t := \widetilde{H}(t, \cdot)$, ainsi $\delta_0 = \delta$ et $\delta_1 = \widetilde{\gamma}$. Pour une raison similaire à celle développée plus haut, les chemins δ_t sont en fait des lacets basés en x_0. En particulier $\widetilde{\gamma}$ est en un lacet.

• Réciproquement, si $\widetilde{\gamma}$ est un lacet de E basé en x_0, son image $\gamma := p \circ \widetilde{\gamma}$ est nécessairement un lacet basé en b_0.

$\square$

Exos

1) Soit $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(B, b_0)$ deux lacets homotopes et $\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1 : [0,1] \to E$ leurs uniques relevés issus de $x_0 = \widetilde{\gamma}_0(0) = \widetilde{\gamma}_1(0)$. Montrer que $\widetilde{\gamma}_0(1) = \widetilde{\gamma}_1(1)$.

2) Soit $p : E \to B$ un revêtement. On suppose que E est connexe par arcs. Montrer que

$$p_* \text{ est un isomorphisme} \iff p \text{ est un homéomorphisme}$$

Exos

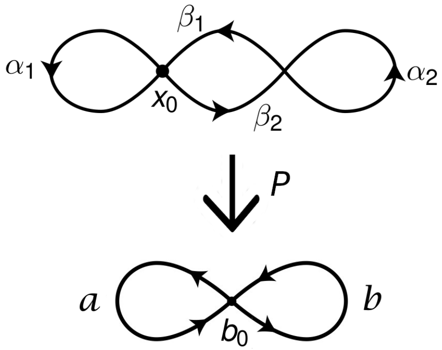


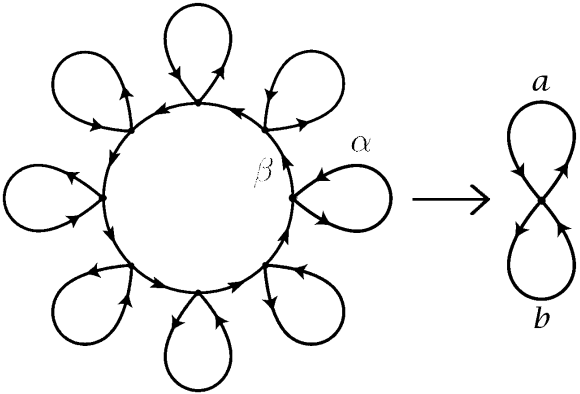
Image : Allen Hatcher

3) On considère le revêtement $p : E \to \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ figuré à l'exemple 6 et où E est la triple boucle.

a) Déterminer $\pi_1(E, x_0)$.

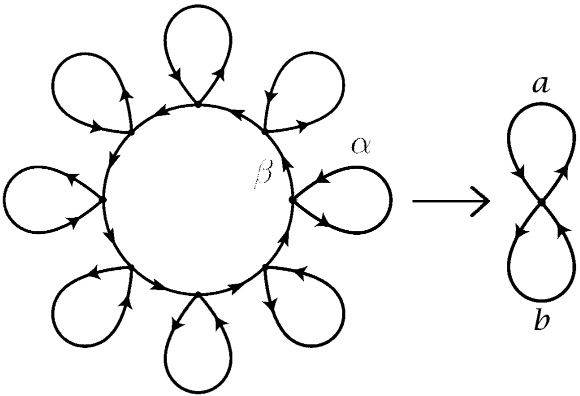
b) Décrire l'image de p_* dans $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, b_0) = < [a], [b] >$

Exos



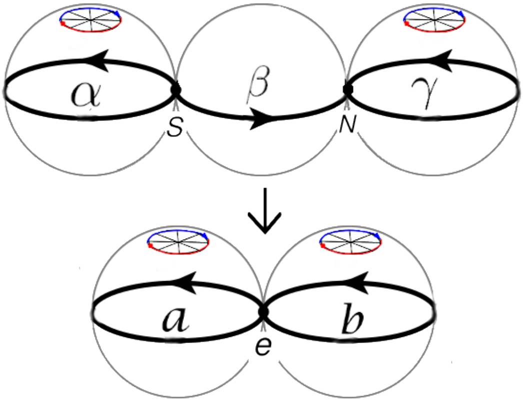
4) Soit E le CW-complexe de dimension 1 constitué de n sommets répartis sur un cercle, des n arêtes ainsi formées sur ce cercle et de n boucles supplémentaires, chacune attachée à un sommet. On considère le revêtement $p : E \to \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ figuré ci-dessus.

Exos



a) Soit x le sommet qui est la base des lacets α et β figurés sur le dessin. Montrer que $\pi_1(E, x)$ est isomorphe au groupe libre F_{n+1}.
b) Décrire l'application $p_* : \pi_1(E, x) \to \pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, 1)$.

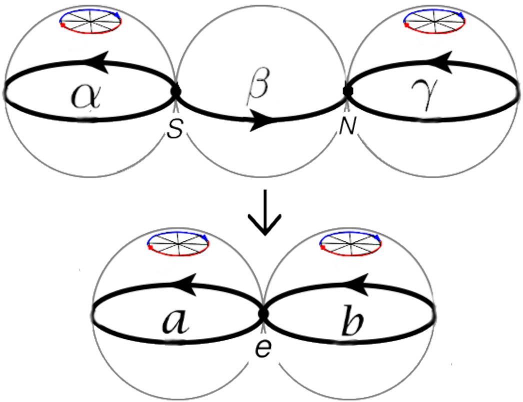
Exos



5) Soient S et N deux points antipodaux de $\mathbb{S}^2$ et $e := [S] = [N] \in \mathbb{R}P^2$ leur image par l'application quotient

$$q : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2.$$

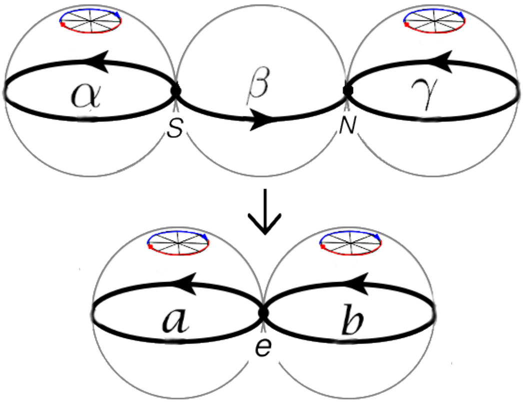
Exos



On note E le CW-complexe de dimension 2 obtenu en identifiant le point $e \in \mathbb{R}P^2$ au point $S \in \mathbb{S}^2$ et en identifiant le point e d'une autre copie de $\mathbb{R}P^2$ au point N :

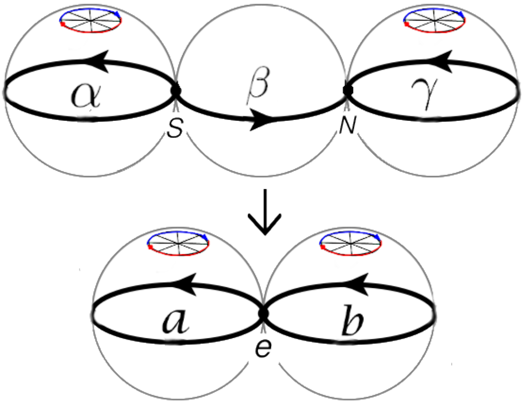
$$E = \mathbb{R}P^2 \vee_S \mathbb{S}^2 \vee_N \mathbb{R}P^2$$

Exos



On considère le revêtement à deux feuillets $p : E \to \mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ où p sur les deux copies de $\mathbb{R}P^2$ est le revêtement trivial à valeur dans $\mathbb{R}P^2 \vee \{e\}$ et, sur $\mathbb{S}^2$, p est l'application quotient $\mathbb{S}^2 \to \{e\} \vee \mathbb{R}P^2$.

Exos



a) Déterminer le groupe fondamental de E au point S.
b) Montrer que les groupes fondamentaux de E et de $B = \mathbb{R}P^2 \vee_e \mathbb{R}P^2$ sont isomorphes.
c) L'application $p_* : \pi_1(E, S) \to \pi_1(B, S)$ est elle un isomorphisme ?