Le problème du relèvement

Le critère de relèvement

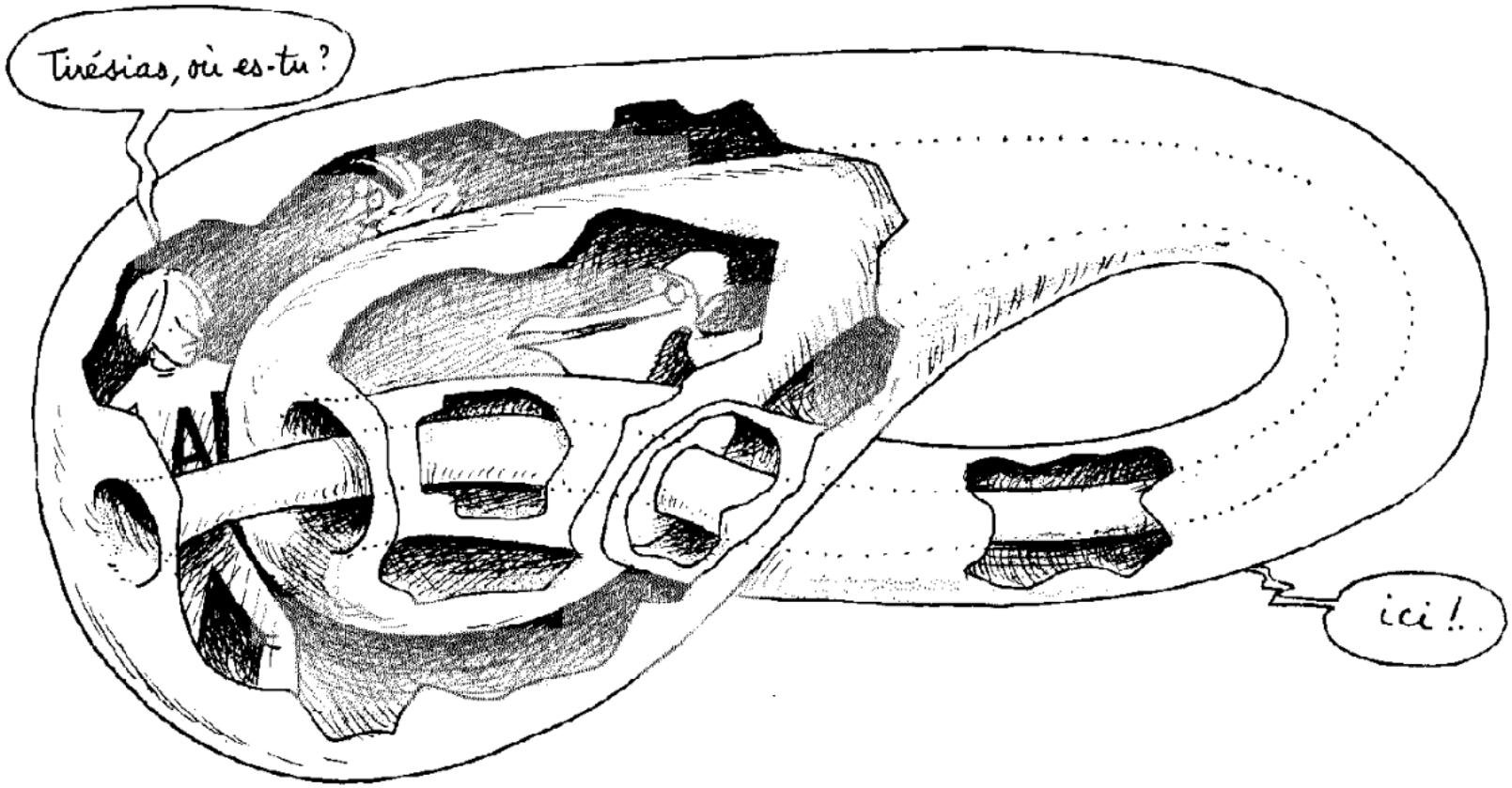
Morphismes de revêtements

Exos

# CM-TA9 : Relèvements

Vincent Borrelli

Université de Lyon




*Le tore revêtant la bouteille de Klein*

Image extraite du livre Topologicon de Jean-Pierre Petit

# Le problème du relèvement

• On va généraliser de la propriété de relèvement des chemins $\gamma : [0,1] \to B$ aux applications $f : Y \to B$. Il nous faudra cependant supposer certaines propriétés topologiques sur $Y$.

**Définition. –** On dit qu'un espace $Y$ est LOCALEMENT CONNEXE PAR ARCS si pour tout point $y \in Y$ et tout voisinage $\mathcal{V}$ de $y$, il existe un sous-voisinage $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ de $y$ connexe par arcs.

• $\mathbb{R}^n$ ainsi que tous ses ouverts sont localement connexes par arcs.

• Le sous-espace $[-2,-1] \cup [1,2]$ de $\mathbb{R}$ est localement connexe par arcs mais pas connexe par arcs.

Le problème du relèvement

Le critère de relèvement

Morphismes de revêtements

Exos

# Relèvements

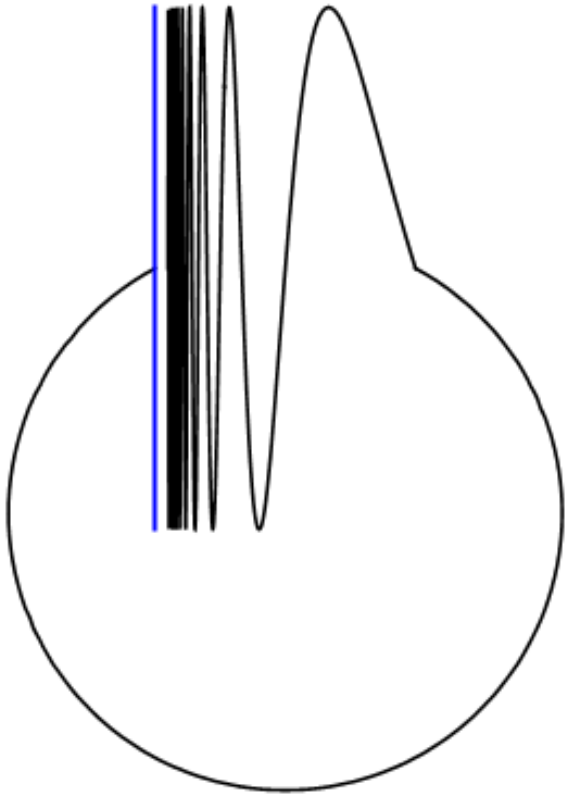


Image extraite du site Wild Topology

• Le cercle polonais est connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs.

Le problème du relèvement

Le critère de relèvement

Morphismes de revêtements

Exos

# Relèvements

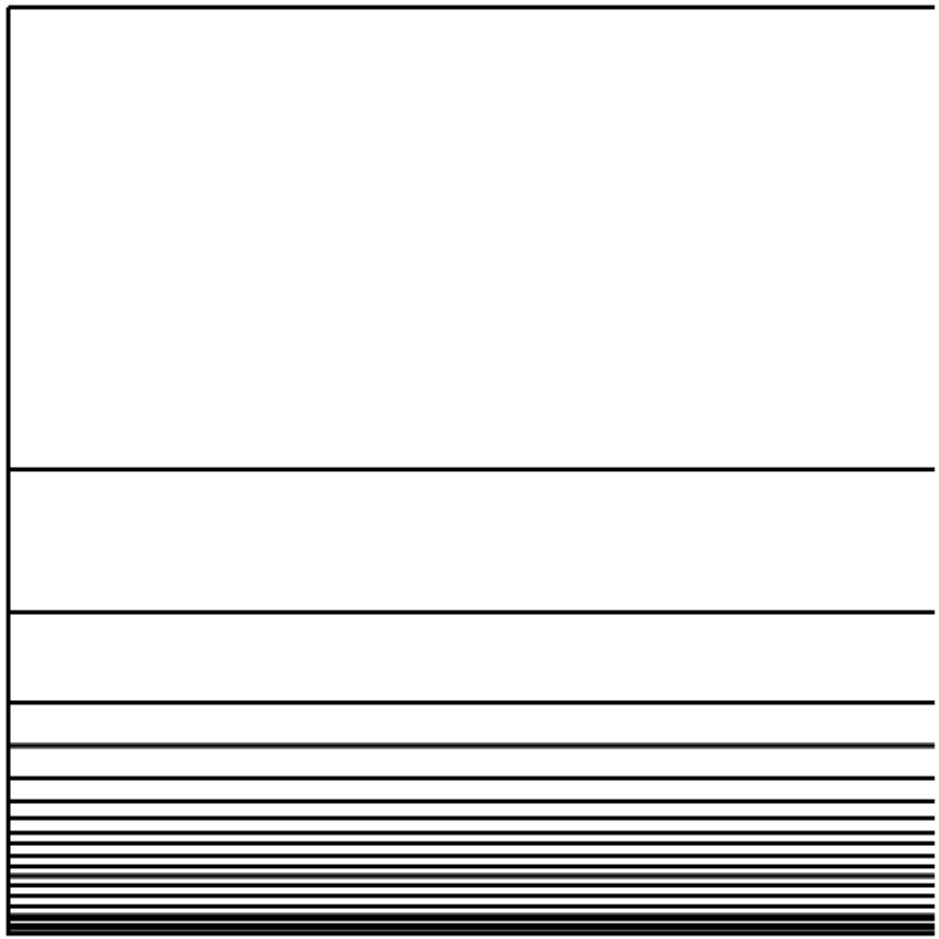


Image : Wikipédia

• Le peigne : un autre exemple d'espace connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs.

Le problème du relèvement

Le critère de relèvement

Morphismes de revêtements

Exos

# Relèvements

**Critère de relèvement.–** *Soient* $p : (E, x_0) \to (B, b_0)$ *un revêtement et* $Y$ *un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit* $f : (Y, y_0) \to (B, b_0)$ *alors il existe un relevé* $\widetilde{f}$ *de* $f$ *tel que* $\widetilde{f}(y_0) = x_0$ *si et seulement si*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, x_0)).$$

**Corollaire.–** *Si* $Y$ *est simplement connexe, on peut toujours relever* $f$.

**Commentaire.–** Le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x_0))$ fait office d'un "trou de souris" dans le groupe fondamental $\pi_1(B, b_0)$, au travers duquel doit "passer" $f_*(\pi_1(Y, y_0))$ pour qu'il y ait existence d'un relèvement de $f$.

# Relèvements

- Si un relevé existe, il est essentiellement unique :

**Proposition.–** *Soient $Y$ un espace connexe, $p : E \to B$ un revêtement et $f : Y \to B$ une application continue. Si $\widetilde{f}_1$ et $\widetilde{f}_2$ sont deux relèvements de $f$ qui coïncident en un point $y_0 \in Y$ quelconque, alors $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$.*

**Démonstration.–** L'ensemble de coïncidence

$$\mathcal{S} = \{y \in Y \,|\, \widetilde{f}_1(y) = \widetilde{f}_2(y)\}$$

est non vide puisque $y_0 \in \mathcal{S}$. D'après le lemme de coïncidence (cf. leçon TA8 sur l'injectivité de $p_*$) et le fait que $Y$ est connexe, $S = Y$. □

# Relèvements

**Démonstration du critère de relèvement.–** Traitons d'abord le sens $\Longrightarrow$. Supposons qu'un relevé $\widetilde{f}$ existe, alors puisque $f = p \circ \widetilde{f}$ on a $f_* = p_* \circ \widetilde{f}_*$ avec

$$\widetilde{f}_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(E, x_0) \quad \text{et} \quad p_* : \pi_1(E, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$$

- Ainsi

$$\begin{aligned} f_*(\pi_1(Y, y_0)) &= p_*(\widetilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \\ &\subset p_*(\pi_1(E, x_0)). \end{aligned}$$

- Reste à traiter le sens $\Longleftarrow$. Pour cela, on va construire explicitement un relevé $\widetilde{f} : Y \to E$ de $f$.

- Si est un point $y \in Y$, on choisit un chemin $\gamma$ quelconque joignant $y_0$ à $y$. Le chemin $\delta := f \circ \gamma$ admet un unique relèvement $\widetilde{\delta}$ commençant en $x_0$. On pose alors

$$\widetilde{f}(y) := \widetilde{\delta}(1).$$

# Relèvements

• Il nous faut montrer que cette application est bien définie c'est-à-dire que si $\gamma'$ est un autre chemin joignant $y_0$ à $y$ et si $\delta' = f \circ \gamma'$ alors $\widetilde{\delta}'(1) = \widetilde{\delta}(1)$.

• La composition $h_0 := \delta * \bar{\delta}'$ est un lacet de $B$ basé en $b_0$. Puisque

$$\delta * \bar{\delta}' = (f \circ \gamma) * \overline{f \circ \gamma'} = f \circ (\gamma * \bar{\gamma}')$$

on en déduit $[h_0] \in f_*(\pi_1(Y, y_0))$.

• Par hypothèse

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, x_0)).$$

Ceci implique qu'il existe une homotopie de lacets $h_t$ joignant $h_0$ en un lacet $h_1$ admettant un relèvement $\widetilde{h}_1$ en un lacet de $E$ basé en $x_0$.

# Relèvements

• On applique la propriété de relèvement des homotopies de chemins vue en TA8 : il existe un relèvement (unique) $\widetilde{h}_t$ de l'homotopie $h_t$.

• La fibre étant discrète, l'application

$$t \longmapsto \widetilde{h}_t(1)$$

est constante égale à $\widetilde{h}_1(1) = x_0$. Ainsi $\widetilde{h}_0$ est un lacet de $E$ basé en $x_0$.

• Par unicité du relèvement des chemins, $(\widetilde{h}_0)_{|[0,1/2]}$ est le relevé $\widetilde{\delta}$ et $(\widetilde{h}_0)_{|[1/2,1]}$ est le relevé de $\bar{\delta}'$ valant $x_0$ en $s = 1$. Par unicité du relèvement des chemins, $(\widetilde{h}_0)_{|[1/2,1]} = \overline{\widetilde{\delta}'}$

# Relèvements

• Il s'en suit que

$$\widetilde{\delta}'(1) = \widetilde{h}_0(1/2) = \widetilde{\delta}(1)$$

ce qui montre que $\widetilde{f}$ est bien définie.

• Il reste à montrer que $\tilde{f}$ est continue. Pour cela nous allons montrer que $\tilde{f}$ est continue sur un voisinage de chacun des points $y \in Y$.

• Soit $U \subset B$ un ouvert trivialisant contenant $f(y)$ et $V \subset E$ la composante de $p^{-1}(U)$ contenant $\widetilde{f}(y)$. Par définition d'un revêtement, l'application

$$p^{-1}_{U,V} : U \longrightarrow V$$

est bien définie et c'est un homéomorphisme.

# Relèvements

• Puisque $f$ est continue, $\mathcal{V} = f^{-1}(U)$ un ouvert de $y$. Puisque $Y$ est localement connexe par arcs, il existe un sous-voisinage $\mathcal{V}_0$ de $y$ qui est connexe par arcs.

• On va montrer que $\widetilde{f}(\mathcal{V}_0) \subset V$. Ceci impliquera que

$$\widetilde{f}_{|\mathcal{V}_0} = p_{U,V}^{-1} \circ f_{|\mathcal{V}_0}$$

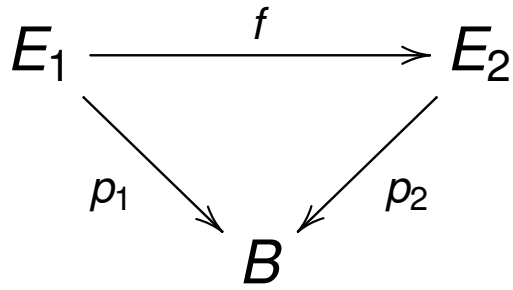
et donc que $\widetilde{f}$ est continue sur $\mathcal{V}_0$ car composée d'applications continues.

• Soit $y' \in \mathcal{V}_0$ et $\eta$ un chemin de $\mathcal{V}_0$ joignant $y$ à $y'$. Alors $f \circ \eta$ est un chemin de $U$ joignant $f(y)$ à $f(y')$. Puisque $p_{U,V}^{-1}$ est un homéomorphisme, $p_{U,V}^{-1} \circ f \circ \eta$ est un relevé dans $V$ de $f \circ \eta$ qui commence au point $\widetilde{f}(y)$. Par définition, son autre extrémité est la valeur de $\widetilde{f}(y')$, qui est donc dans $V$.

□

# Morphismes de revêtements

**Définition.–** Soit $p_1 : E_1 \to B$ et $p_2 : E_2 \to B$ deux revêtements d'une même base $B$. On dit qu'une application continue $f : E_1 \to E_2$ est un MORPHISME DE REVÊTEMENTS si $p_1 = p_2 \circ f$, autrement dit, si le diagramme ci-dessous est commutatif :

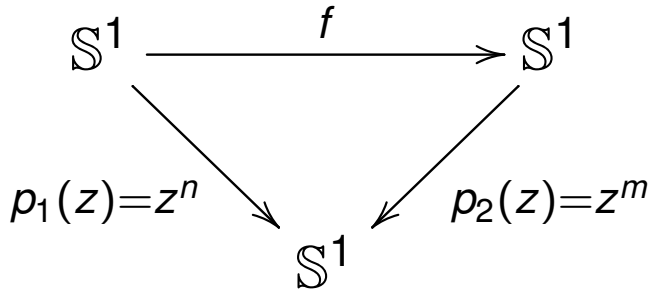



Si de plus $f$ est un homéomorphisme, on parle alors d'ISOMORPHISME DE REVÊTEMENTS. Si $p_1 = p_2$ (et donc $E_1 = E_2$), on parle d'AUTOMORPHISME DE REVÊTEMENTS ou encore, en bon franglais, de DECK TRANSFORMATION.

• L'ensemble $Aut(p)$ des automorphismes d'un revêtement donnée $p$ est évidemment un groupe.

# Morphismes de revêtements

**Exemple 1.–** Soient $E_1 = E_2 = B = \mathbb{S}^1$ et $p_1(z) = z^n$, $p_2(z) = z^m$ avec $m|n$.

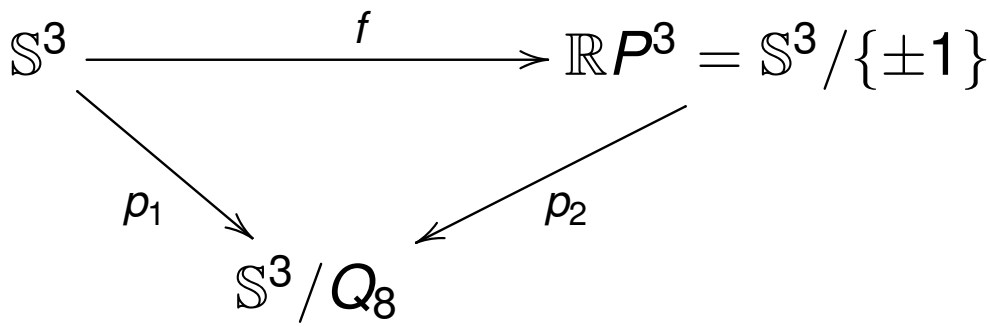



Alors $f(z) = z^q$, $q = \frac{n}{m}$, est un morphisme de revêtements. En effet $f$ est continue et

$$p_2 \circ f(z) = f(z)^m = z^{qm} = z^n = p_1(z).$$

# Morphismes de revêtements

**Exemple 2.–** Soient $E_1 = \mathbb{S}^3$, $E_2 = \mathbb{R}P^3$, $B = \mathbb{S}^3/Q_8$ où $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ est le groupe des quaternions, $p_1$ et $p_2$ les applications quotients par les groupes $Q_8$ et $Q_8/\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$




En particulier, $p_1$ est un revêtement à 8 feuillets et $p_2$ à quatre feuillets. L'application quotient $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}P^3$ est un morphisme de revêtements.

# Morphismes de revêtements

**Exemple 3.–** Soit $G$ groupe topologique localement compact et $N \subset K \subset G$ deux sous groupes discrets opérant par multiplication à gauche sur $G$. On suppose que $K \triangleleft G$ et $N \triangleleft G$. On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E_1 = G & \xrightarrow{\quad f \quad} & E_2 = G/N \\ & {\scriptstyle p_1} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle p_2} & \\ & B = G/K & \end{array}$$

Les applications $p_1$ et $f$ sont les applications quotients par $K$ et $N$. L'application $p_2$ est décrite plus bas.

# Morphismes de revêtements

**Exemple 3 (suite).–** Rappelons un résultat important de théorie des groupes : si $N \subset K \subset G$ sont des groupes et si $K \lhd G$ et $N \lhd G$ alors

1) $N \lhd K$
2) $K/N \lhd G/N$
3) $(G/N)/(K/N)$ est isomorphe à $G/K$

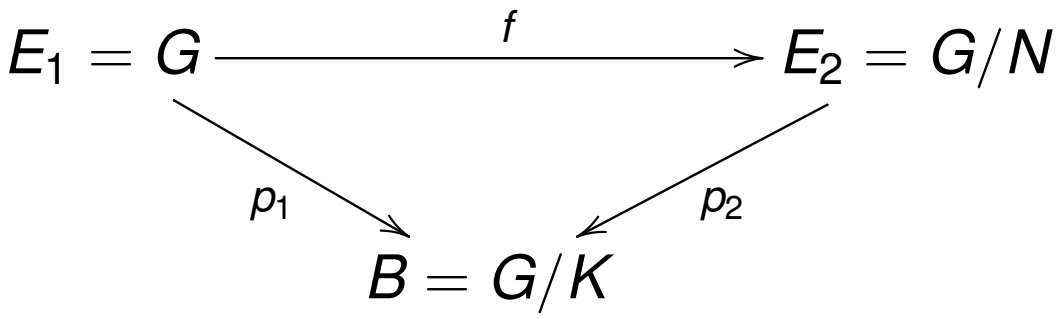
Ce résultat permet de définir l'application $p_2 : G/N \to G/K$. C'est la composée de l'application quotient

$$p_{K/N} : G/N \longrightarrow (G/N)/(K/N)$$

avec l'isomorphisme du point 3 :

$$\phi : (G/N)/(K/N) \longrightarrow G/K$$

# Morphismes de revêtements




**Exemple 3 (suite).–** Si $p_1$ et $p_2$ sont des revêtements alors l'application quotient $f : G \to G/N$ est un morphisme de revêtements.

- Des hypothèses supplémentaires permettent d'assurer que $p_1$ et $p_2$ sont des revêtements, par exemple si $K$ est de cardinal fini.

- Dans l'exemple 2, $G = \mathbb{S}^3$, $K = Q_8$ et $N = \{\pm 1\}$.

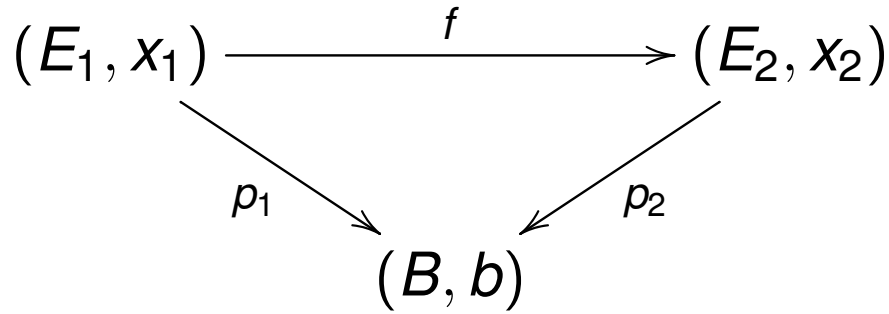
- Dans l'exemple 1, $G = \mathbb{S}^1$, $K = \mathbb{U}_n$ et $N = \mathbb{U}_q$.

# Morphismes de revêtements

**Définition.–** Soit $(B, b)$ un espace pointé. On dit qu'un revêtement $p : E \to B$ est POINTÉ lorsque l'on a distingué un point $x \in E$ tel que $p(x) = b$. On écrit

$$p : (E, x) \longrightarrow (B, b)$$

- De même, un morphisme entre revêtements pointés




est dit POINTÉ si $f(x_1) = x_2$.

# Morphismes de revêtements

• On définit une relation d'équivalence $\sim$ entre les revêtements pointés en disant que deux revêtements pointés sont en relation $p_1 \sim p_2$ s'il existe un isomorphisme pointé entre les deux.

**Définition.–** On dit qu'un revêtement $p : E \to B$ est CONNEXE PAR ARCS si son espace total $E$ est connexe par arcs.

• La base $B$ est alors automatiquement connexe par arcs. Dans l'autre sens, si $B$ est localement connexe par arcs alors il en est de même de $E$.

# Morphismes de revêtements

• On note $Rev(B, b)$ l'ensemble des classes d'équivalence des revêtements pointés connexes par arcs et $Sub(G)$ l'ensemble des sous-groupes de $G$.

**Proposition (injectivite de $\mathcal{G}$).–** *Si $B$ est connexe par arcs, et localement connexe par arcs alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G} : & Rev(B,b) & \longrightarrow & Sub(\pi_1(B,b)) \\ & [p : (E,x) \to (B,b)] & \longmapsto & p_*(\pi_1(E,x)) \end{array}$$

*est bien définie et injective.*

• Nous verrons dans une prochaine leçon que, sous une hypothèse supplémentaire locale sur $B$, l'application $\mathcal{G}$ est bijective.

# Morphismes de revêtements

• On verra également en exercice que l'ensemble $Rev(B, b)$ peut-être muni d'une relation d'ordre partielle ; l'ensemble $Sub(\pi_1(B, b))$ est lui aussi partiellement ordonné par l'inclusion. L'application $\mathcal{G}$ réalise une CORRESPONDANCE DE GALOIS entre ces deux ensembles.

**Démonstration.–** Montrons d'abord que $\mathcal{G}$ est bien définie. Soient $p_i : (E_i, x_i) \to (B, b)$, $i \in \{1, 2\}$, deux revêtements pointés et $f : E_1 \to E_2$ un isomorphisme pointé de revêtements. Par fonctorialité, on a

$$f_*(\pi_1(E_1, x_1)) = \pi_1(E_2, x_2).$$

En composant par $(p_2)_*$ il vient

$$(p_2)_* \circ f_*(\pi_1(E_1, x_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, x_2))$$

# Morphismes de revêtements

- Puisque $p_2 \circ f = p_1$ on en déduit

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, x_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, x_2))$$

ce qui montre que $\mathcal{G}$ est bien définie

- Montrons que $\mathcal{G}$ est injective. Supposons que $p_i : (E_i, x_i) \to (B, b)$, $i \in \{1, 2\}$, sont deux revêtements pointés tels que

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, x_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, x_2))$$

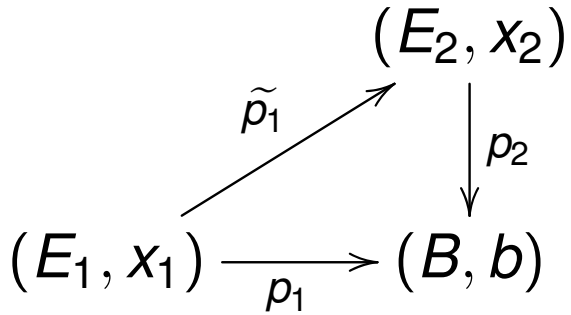
Nous allons montrer qu'ils sont isomorphes et donc dans la même classe.

# Morphismes de revêtements

• Notons que $E_1$ est connexe par arcs par définition de $Rev(B, b)$ et localement connexe par arcs par hypothèse sur $B$. De plus

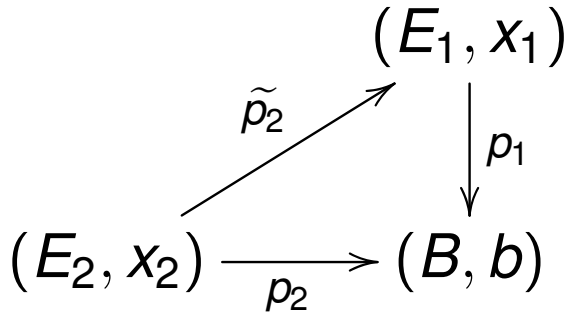
$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, x_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, x_2)).$$

Le critère de relèvement s'applique et il existe un relevé $\widetilde{p_1}$ de $p_1$ :

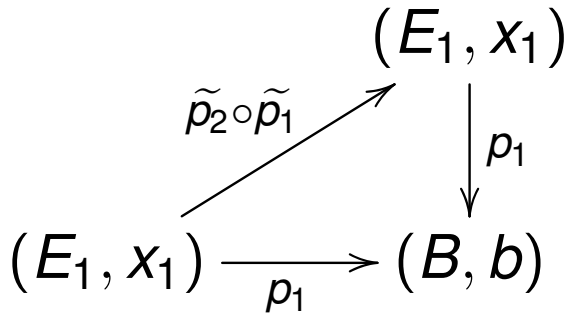


# Morphismes de revêtements

- De manière similaire il existe un relevé $\widetilde{p_2}$ de $p_2$ :




- Constatons que $\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1}$ est un relevé de $p_1$ :




En effet, puisque $p_2 \circ \widetilde{p_1} = p_1$ et $p_1 \circ \widetilde{p_2} = p_2$ on a

$$p_1 \circ (\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1}) = (p_1 \circ \widetilde{p_2}) \circ \widetilde{p_1} = p_2 \circ \widetilde{p_1} = p_1.$$

# Morphismes de revêtements

• Le relevé $\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1}$ fixe le point $x_1$. L'identité $id_{E_1}$ est un autre relevé qui fixe également le point $x_1$. Par unicité du relèvement, on doit avoir

$$\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1} = id_{E_1}.$$

• Similairement $\widetilde{p_1} \circ \widetilde{p_2} = id_{E_2}$ ce qui montre que $\widetilde{p_1}$ et $\widetilde{p_2}$ sont des isomorphismes de revêtements pointés. □

# Exos

1) Soit $n > 1$. Montrer que toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^1$ est homotope à l'application constante.

2) Montrer que toute application continue $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{S}^1$ est homotope à l'application constante. On rappelle que le groupe fondamental de $\mathbb{R}P^2$ est $\mathbb{Z}_2$ (cf. exos de la leçon TA6 *La grande exhibition des* $\pi_1$).

3) Exhiber tous les revêtements connexes par arcs pointés de $(\mathbb{S}^1, 1)$ à isomorphisme pointé près.

4) Même question pour les revêtements connexes par arcs pointés de $(\mathbb{R}P^2, b)$ où $b$ est un point quelconque de $B$.

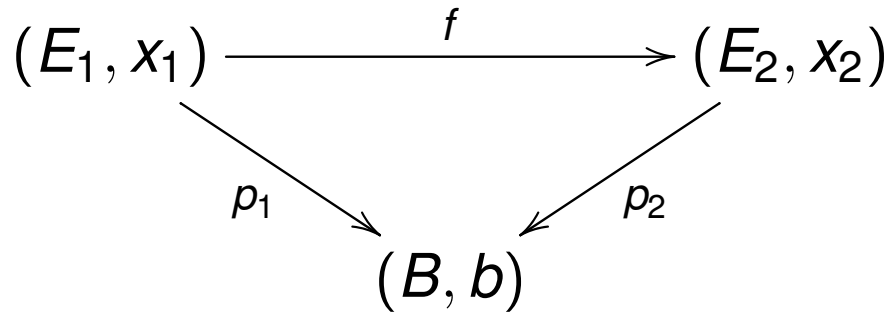
# Exos

5) On définit une relation binaire $\geq$ sur $Rev(B, b)$ par :

$$[p_1] \geq [p_2]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\exists$ un morphisme de revêtements pointés $f$ entre $p_1$ et $p_2$




On dit alors que $p_1$ EST AU DESSUS DE $p_2$.

a) Montrer que cette relation binaire est bien définie.

b) Montrer que c'est une relation d'ordre (partielle) sur $Rev(B, b)$.

# Exos

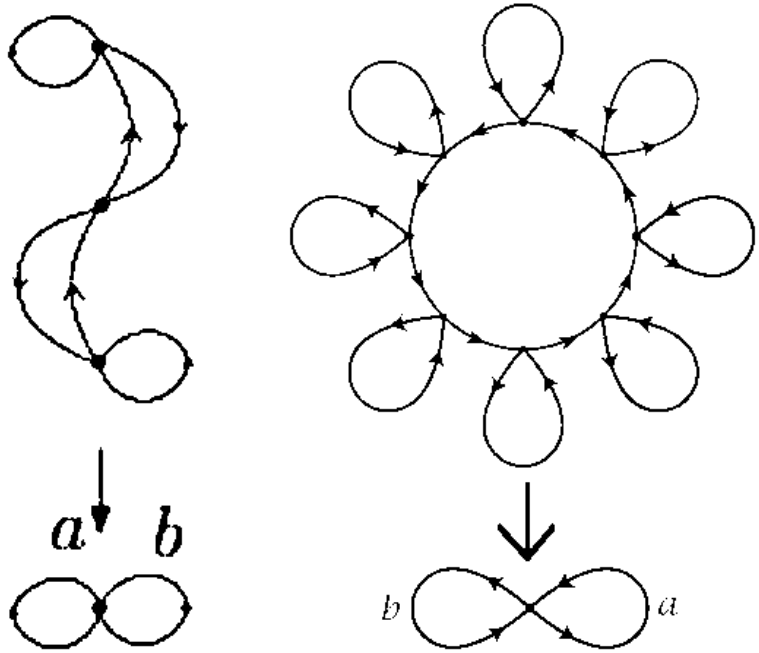
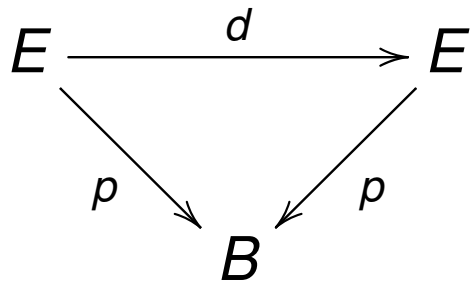



Image composée à partir de figures du site Analysis situs (gauche) et du livre d'Allen Hatcher (droite)

6) Soit $p : E \to B$ un revêtement. On rappelle qu'un automorphisme de $p$ est un homéomorphisme $d$ tel que le diagramme suivant commute



# Exos

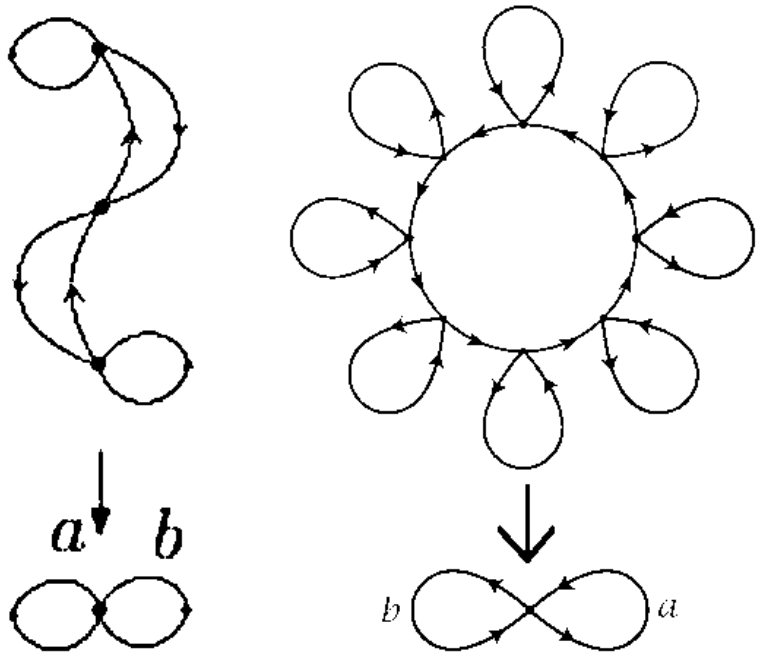



Image composée à partir de figures du site Analysis situs (gauche) et du livre d'Allen Hatcher (droite)

6) a) Dans le revêtement de gauche, la symétrie centrale est-elle un automorphisme de revêtement ?
b) Dans le revêtement de droite, la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ est-elle un automorphisme de revêtement ?

# Exos

7) Soit $p_i : (E_i, x_i) \to (B, b)$, $i \in \{1, 2\}$, deux revêtements pointés. On définit

$$E_1 \times_B E_2 := \{(z_1, z_2) \in E_1 \times E_2 \,|\, p_1(z_1) = p_2(z_2)\}$$

et

$$q(z_1, z_2) := p_1(z_1) = p_2(z_2)$$

dont on a vu dans un des exercices de la leçon TA7 sur les révêtements que

$$q : (E_1 \times_B E_2, (x_1, x_2)) \to (B, b)$$

est un revêtement. Montrer que $\pi_i : E_1 \times_B E_2 \to E_i$, défini par $(z_1, z_2) \mapsto z_i$, est un morphisme de revêtements entre $q$ et $p_i$. En déduire que $[q] \geq [p_i]$ pour $i \in \{1, 2\}$.