Le problème du relèvement

Le critère de relèvement

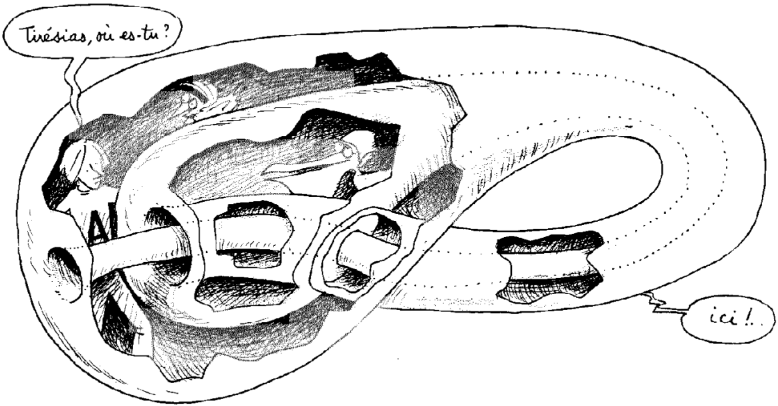
Morphismes de revêtements

Exos

CM-TA9 : Relèvements

Vincent Borrelli

Université de Lyon



Le tore revêtant la bouteille de Klein

Image extraite du livre Topologicon de Jean-Pierre Petit

Le problème du relèvement
Le critère de relèvement
Morphismes de revêtements
Exos

Le problème du relèvement

• On va généraliser de la propriété de relèvement des chemins $\gamma : [0,1] \to B$ aux applications $f : Y \to B$. Il nous faudra cependant supposer certaines propriétés topologiques sur Y.

Définition. – On dit qu'un espace Y est LOCALEMENT CONNEXE PAR ARCS si pour tout point $y \in Y$ et tout voisinage $\mathcal{V}$ de y, il existe un sous-voisinage $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ de y connexe par arcs.

• $\mathbb{R}^n$ ainsi que tous ses ouverts sont localement connexes par arcs.

• Le sous-espace $[-2,-1] \cup [1,2]$ de $\mathbb{R}$ est localement connexe par arcs mais pas connexe par arcs.

Relèvements

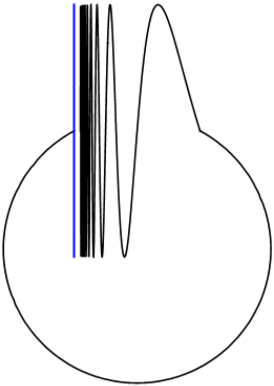


Image extraite du site Wild Topology

- Le cercle polonais est connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs.

Relèvements

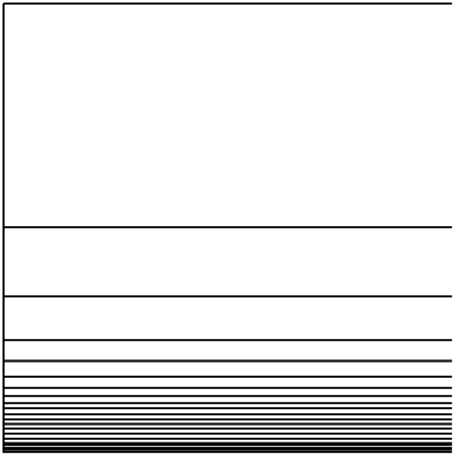


Image : Wikipédia

• Le peigne : un autre exemple d'espace connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs.

Relèvements

Critère de relèvement.– *Soient* $p : (E, x_0) \to (B, b_0)$ *un revêtement et* Y *un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit* $f : (Y, y_0) \to (B, b_0)$ *alors il existe un relevé* $\widetilde{f}$ *de* f *tel que* $\widetilde{f}(y_0) = x_0$ *si et seulement si*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, x_0)).$$

Corollaire.– *Si* Y *est simplement connexe, on peut toujours relever* f*.*

Commentaire.– Le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x_0))$ fait office d'un "trou de souris" dans le groupe fondamental $\pi_1(B, b_0)$, au travers duquel doit "passer" $f_*(\pi_1(Y, y_0))$ pour qu'il y ait existence d'un relèvement de f.

Relèvements

• Si un relevé existe, il est essentiellement unique :

Proposition.– *Soient Y un espace connexe, $p : E \to B$ un revêtement et $f : Y \to B$ une application continue. Si $\widetilde{f_1}$ et $\widetilde{f_2}$ sont deux relèvements de f qui coïncident en un point $y_0 \in Y$ quelconque, alors $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$.*

Démonstration.– L'ensemble de coïncidence

$$\mathcal{S} = \{y \in Y \,|\, \widetilde{f_1}(y) = \widetilde{f_2}(y)\}$$

est non vide puisque $y_0 \in \mathcal{S}$. D'après le lemme de coïncidence (cf. leçon TA8 sur l'injectivité de p_*) et le fait que Y est connexe, $S = Y$. $\square$

Relèvements

Démonstration du critère de relèvement.– Traitons d'abord le sens $\Longrightarrow$. Supposons qu'un relevé $\widetilde{f}$ existe, alors puisque $f = p \circ \widetilde{f}$ on a $f_* = p_* \circ \widetilde{f}_*$ avec

$$\widetilde{f}_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(E, x_0) \quad \text{et} \quad p_* : \pi_1(E, x_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0)$$

• Ainsi

$$\begin{aligned} f_* \left(\pi_1(Y, y_0)\right) &= p_*(\widetilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \\ &\subset p_*(\pi_1(E, x_0)). \end{aligned}$$

• Reste à traiter le sens $\Longleftarrow$. Pour cela, on va construire explicitement un relevé $\widetilde{f} : Y \to E$ de f.

• Si est un point $y \in Y$, on choisit un chemin γ quelconque joignant y_0 à y. Le chemin $\delta := f \circ \gamma$ admet un unique relèvement $\widetilde{\delta}$ commençant en x_0. On pose alors

$$\widetilde{f}(y) := \widetilde{\delta}(1).$$

Relèvements

• Il nous faut montrer que cette application est bien définie c'est-à-dire que si γ' est un autre chemin joignant y_0 à y et si $\delta' = f \circ \gamma'$ alors $\widetilde{\delta}'(1) = \widetilde{\delta}(1)$.

• La composition $h_0 := \delta * \bar{\delta}'$ est un lacet de B basé en b_0. Puisque

$$\delta * \bar{\delta}' = (f \circ \gamma) * \overline{f \circ \gamma'} = f \circ (\gamma * \bar{\gamma}')$$

on en déduit $[h_0] \in f_*(\pi_1(Y, y_0))$.

• Par hypothèse

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, x_0)).$$

Ceci implique qu'il existe une homotopie de lacets h_t joignant h_0 en un lacet h_1 admettant un relèvement $\widetilde{h}_1$ en un lacet de E basé en x_0.

Relèvements

• On applique la propriété de relèvement des homotopies de chemins vue en TA8 : il existe un relèvement (unique) $\widetilde{h}_t$ de l'homotopie h_t.

• La fibre étant discrète, l'application

$$t \longmapsto \widetilde{h}_t(1)$$

est constante égale à $\widetilde{h}_1(1) = x_0$. Ainsi $\widetilde{h}_0$ est un lacet de E basé en x_0.

• Par unicité du relèvement des chemins, $(\widetilde{h}_0)_{|[0,1/2]}$ est le relevé $\widetilde{\delta}$ et $(\widetilde{h}_0)_{|[1/2,1]}$ est le relevé de $\bar{\delta}'$ valant x_0 en $s = 1$. Par unicité du relèvement des chemins, $(\widetilde{h}_0)_{|[1/2,1]} = \overline{\widetilde{\delta}'}$

Relèvements

• Il s'en suit que

$$\widetilde{\delta}'(1) = \widetilde{h}_0(1/2) = \widetilde{\delta}(1)$$

ce qui montre que $\widetilde{f}$ est bien définie.

• Il reste à montrer que f est continue. Pour cela nous allons montrer que f est continue sur un voisinage de chacun des points $y \in Y$.

• Soit $U \subset B$ un ouvert trivialisant contenant $f(y)$ et $V \subset E$ la composante de $p^{-1}(U)$ contenant $\widetilde{f}(y)$. Par définition d'un revêtement, l'application

$$p_{U,V}^{-1} : U \longrightarrow V$$

est bien définie et c'est un homéomorphisme.

Relèvements

• Puisque f est continue, $\mathcal{V} = f^{-1}(U)$ un ouvert de y. Puisque Y est localement connexe par arcs, il existe un sous-voisinage $\mathcal{V}_0$ de y qui est connexe par arcs.

• On va montrer que $\widetilde{f}(\mathcal{V}_0) \subset V$. Ceci impliquera que

$$\widetilde{f}_{|\mathcal{V}_0} = p_{U,V}^{-1} \circ f$$

et donc que $\widetilde{f}$ est continue sur $\mathcal{V}_0$ car composée d'applications continues.

• Soit $y' \in \mathcal{V}_0$ et η un chemin de $\mathcal{V}_0$ joignant y à y'. Alors $f \circ \eta$ est un chemin de U joignant $f(y)$ à $f(y')$. Puisque $p_{U,V}^{-1}$ est un homéomorphisme, $p_{U,V}^{-1} \circ f \circ \eta$ est un relevé dans V de $f \circ \eta$ qui commence au point $\widetilde{f}(y)$. Par définition, son autre extrémité est la valeur de $\widetilde{f}(y')$, qui est donc dans V.
$\square$

Morphismes de revêtements

Définition.– Soit $p_1 : E_1 \to B$ et $p_2 : E_2 \to B$ deux revêtements d'une même base B. On dit qu'une application continue $f : E_1 \to E_2$ est un MORPHISME DE REVÊTEMENTS si $p_1 = p_2 \circ f$, autrement dit, si le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Si de plus f est un homéomorphisme, on parle alors d'ISOMORPHISME DE REVÊTEMENTS. Si $E_1 = E_2$, on parle d'AUTOMORPHISME DE REVÊTEMENTS ou encore, en bon franglais, de DECK TRANSFORMATION.

• L'ensemble $Aut(p)$ des automorphismes d'un revêtement donnée p est évidemment un groupe.

Morphismes de revêtements

Exemple 1.– Soient $E_1 = E_2 = B = \mathbb{S}^1$ et $p_1(z) = z^n$, $p_2(z) = z^m$ avec $m|n$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "z^n"'] & & \mathbb{S}^1 \arrow[dl, "z^m"] \\ & \mathbb{S}^1 & \end{tikzcd}$$

Alors $f(z) = z^q$, $q = \frac{n}{m}$, est un morphisme de revêtements.

Le problème du relèvement
Le critère de relèvement
Morphismes de revêtements
Exos

Morphismes de revêtements

Exemple 2.– Soient $E_1 = \mathbb{S}^3$, $E_2 = \mathbb{R}P^3$, $B = \mathbb{S}^3/Q_8$ où $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ est le groupe des quaternions, p_1 et p_2 les applications quotients par les groupes Q_8 et $Q_8/\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^3 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \mathbb{R}P^3 = \mathbb{S}^3/\{\pm 1\} \arrow[dl, "p_2"] \\
& \mathbb{S}^3/Q_8 &
\end{tikzcd}$$

En particulier, p_1 est un revêtement à 8 feuillets et p_2 à quatre feuillets. L'application quotient $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}P^3$ est un morphisme de revêtements.

Morphismes de revêtements

Exemple 3.– Soit G groupe topologique localement compact et $N \subset K \subset G$ deux sous groupes discrets opérant par multiplication à gauche sur G. On suppose que $K \triangleleft G$ et $N \triangleleft G$. On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E_1 = G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 = G/N \arrow[dl, "p_2"] \\ & B = G/K & \end{tikzcd}$$

Les applications p_1 et f sont les applications quotients par K et N. L'application p_2 est décrite plus bas.

Morphismes de revêtements

Exemple 3 (suite).– Rappelons un résultat important de théorie des groupes : si $N \subset K \subset G$ sont des groupes et si $K \triangleleft G$ et $N \triangleleft G$ alors

1) $N \triangleleft K$
2) $K/N \triangleleft G/N$
3) $(G/N)/(K/N)$ est isomorphe à G/K

Ce résultat permet de définir l'application $p_2 : G/N \to G/K$. C'est la composée de l'application quotient

$$p_{K/N} : G/N \longrightarrow (G/N)/(K/N)$$

avec l'isomorphisme du point 3.

$$\phi : (G/N)/(K/N) \longrightarrow G/K$$

Morphismes de revêtements

$$\begin{tikzcd}
E_1 = G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 = G/N \arrow[dl, "p_2"] \\
& B = G/K &
\end{tikzcd}$$

Exemple 3 (suite).– Si p_1 et p_2 sont des revêtements alors l'application quotient $f : G \to G/N$ est un morphisme de revêtements.

• Des hypothèses supplémentaires permettent d'assurer que p_1 et p_2 sont des revêtements, par exemple si K est de cardinal fini.

• Dans l'exemple 2, $G = \mathbb{S}^3$, $K = Q_8$ et $N = \{\pm 1\}$.

• Dans l'exemple 1, $G = \mathbb{S}^1$, $K = \mathbb{U}_n$ et $N = \mathbb{U}_q$.

Morphismes de revêtements

Définition.– Soit (B, b) un espace pointé. On dit qu'un revêtement $p : E \to B$ est POINTÉ lorsque l'on a distingué un point $x \in E$ tel que $p(x) = b$. On écrit

$$p : (E, x) \longrightarrow (B, b)$$

• De même, un morphisme entre revêtements pointés

$$\begin{tikzcd} (E_1, x_1) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_2, x_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (B, b) & \end{tikzcd}$$

est dit POINTÉ si $f(x_1) = x_2$.

Morphismes de revêtements

• On définit une relation d'équivalence $\sim$ entre les revêtements pointés en disant que deux revêtements pointés sont en relation $p_1 \sim p_2$ s'il existe un isomorphisme pointé entre les deux.

Définition.– On dit qu'un revêtement $p : E \to B$ est CONNEXE PAR ARCS si son espace total E est connexe par arcs.

• La base B est alors automatiquement connexe par arcs. Dans l'autre sens, si B est localement connexe par arcs alors il en est de même de E.

Morphismes de revêtements

• On note $Rev(B, b)$ l'ensemble des classes d'équivalence des revêtements pointés connexes par arcs et $Sub(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G.

Proposition (injectivite de $\mathcal{G}$).– *Si B est connexe par arcs, et localement connexe par arcs alors l'application*

$$\begin{array}{lccc} \mathcal{G} : & Rev(B, b) & \longrightarrow & Sub(\pi_1(B, b)) \\ & [p : (E, x) \to (B, b)] & \longmapsto & p_*(\pi_1(E, x)) \end{array}$$

est bien définie et injective.

• Nous verrons dans une prochaine leçon que, sous une hypothèse supplémentaire locale sur B, l'application $\mathcal{G}$ est bijective.

Morphismes de revêtements

• On verra également en exercice que l'ensemble $Rev(B, b)$ peut-être muni d'une relation d'ordre partielle ; l'ensemble $Sub(\pi_1(B, b))$ est lui aussi partiellement ordonné par l'inclusion. L'application $\mathcal{G}$ réalise une CORRESPONDANCE DE GALOIS (ANTITONE) entre ces deux ensembles.

Démonstration.– Montrons d'abord que $\mathcal{G}$ est bien définie. Soient $p_i : (E_i, x_i) \to (B, b)$, $i \in \{1, 2\}$, deux revêtements pointés et $f : E_1 \to E_2$ un isomorphisme pointé de revêtements. On a

$$f_*(\pi_1(E_1, x_1)) = \pi_1(E_2, x_2)$$

car f est un homéomorphisme. En composant par $(p_2)_*$ il vient

$$(p_2)_* \circ f_*(\pi_1(E_1, x_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, x_2))$$

Morphismes de revêtements

• Puisque $p_2 \circ f = p_1$ on en déduit

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, x_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, x_2))$$

ce qui montre que $\mathcal{G}$ est bien définie

• Montrons que $\mathcal{F}$ est injective. Supposons que $p_i : (E_i, x_i) \to (B, b)$, $i \in \{1, 2\}$, sont deux revêtements pointés tels que

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, x_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, x_2))$$

Nous allons montrer qu'ils sont isomorphes et donc dans la même classe.

Morphismes de revêtements

• Notons que E_1 est connexe par arcs par définition de $Rev(B, b)$ et localement connexe par arcs par hypothèse sur B. De plus

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1, x_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2, x_2)).$$

Le critère de relèvement s'applique et il existe un relevé $\widetilde{p_1}$ de p_1 :

$$\begin{tikzcd} & (E_2, x_2) \arrow[d, "p_2"] \\ (E_1, x_1) \arrow[ur, "\widetilde{p_1}"] \arrow[r, "p_1"'] & (B, b) \end{tikzcd}$$

Morphismes de revêtements

- De manière similaire il existe un relevé $\widetilde{p_2}$ de p_2 :

$$\begin{tikzcd} & (E_1, x_1) \arrow[d, "p_1"] \\ (E_2, x_2) \arrow[ur, "\widetilde{p}_2"] \arrow[r, "p_2"'] & (B, b) \end{tikzcd}$$

- Constatons que $\widetilde{p}_2 \circ \widetilde{p}_1$ est un relevé de p_1 :

$$\begin{tikzcd} & (E_1, x_1) \arrow[d, "p_1"] \\ (E_1, x_1) \arrow[ur, "\widetilde{p}_2 \circ \widetilde{p}_1"] \arrow[r, "p_1"'] & (B, b) \end{tikzcd}$$

En effet, puisque $p_2 \circ \widetilde{p_1} = p_1$ et $p_1 \circ \widetilde{p_2} = p_2$ on a

$$p_1 \circ (\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1}) = (p_1 \circ \widetilde{p_2}) \circ \widetilde{p_1} = p_2 \circ \widetilde{p_1} = p_1 .$$

Morphismes de revêtements

• Le relevé $\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1}$ fixe le point x_1. L'identité id_{E_1} est un autre relevé qui fixe également le point x_1. Par unicité du relèvement, on doit avoir

$$\widetilde{p_2} \circ \widetilde{p_1} = id_{E_1}.$$

• Similairement $\widetilde{p_1} \circ \widetilde{p_2} = id_{E_2}$ ce qui montre que $\widetilde{p_1}$ et $\widetilde{p_2}$ sont des isomorphismes de revêtements pointés. □

Exos

1) Soit $n > 1$. Montrer que toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^1$ est homotope à l'application constante.

2) Montrer que toute application continue $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{S}^1$ est homotope à l'application constante. On rappelle que le groupe fondamental de $\mathbb{R}P^2$ est $\mathbb{Z}_2$ (cf. exos de la leçon TA6 *La grande exhibition des* π_1).

3) Exhiber tous les revêtements connexes par arcs pointés de $(\mathbb{S}^1, 1)$ à isomorphisme pointé près.

4) Même question pour les revêtements connexes par arcs pointés de $(\mathbb{R}P^2, b)$ où b est un point quelconque de B.

Le problème du relèvement
Le critère de relèvement
Morphismes de revêtements
Exos

Exos

5) On définit une relation binaire $\geq$ sur $Rev(B, b)$ par :

$$[p_1] \geq [p_2]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\exists$ un morphisme de revêtements pointés f entre p_1 et p_2

$$\begin{tikzcd}
(E_1, x_1) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_2, x_2) \arrow[dl, "p_2"] \\
& (B, b) &
\end{tikzcd}$$

On dit alors que p_1 EST AU DESSUS DE p_2.

a) Montrer que cette relation binaire est bien définie.

b) Montrer que c'est une relation d'ordre (partielle) sur $Rev(B, b)$.

Exos

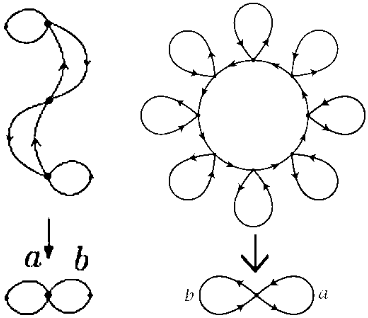


Image composée à partir de figures du site Analysis situs (gauche) et du livre d'Allen Hatcher (droite)

6) Soit $p : E \to B$ un revêtement. On rappelle qu'un automorphisme de p est un homéomorphisme d tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Le problème du relèvement
Le critère de relèvement
Morphismes de revêtements
Exos

Exos

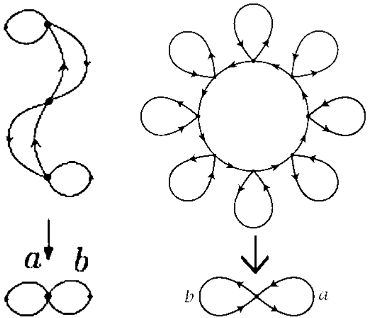


Image composée à partir de figures du site Analysis situs (gauche) et du livre d'Allen Hatcher (droite)

6) a) Dans le revêtement de gauche, la symétrie centrale est-elle un automorphisme de revêtement ?
b) Dans le revêtement de droite, la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ est-elle un automorphisme de revêtement ?

Le problème du relèvement
Le critère de relèvement
Morphismes de revêtements
Exos

Exos

7) Soit $p_i : (E_i, x_i) \to (B, b)$, $i \in \{1, 2\}$, deux revêtements pointés. On définit

$$E_1 \times_B E_2 := \{(z_1, z_2) \in E_1 \times E_2 \,|\, p_1(z_1) = p_2(z_2)\}$$

et

$$q(z_1, z_2) := p_1(z_1) = p_2(z_2)$$

dont on a vu dans un des exercices de la leçon TA7 sur les révêtements que

$$q : (E_1 \times_B E_2, (x_1, x_2)) \to (B, b)$$

est un revêtement. Montrer que $\pi_i : E_1 \times_B E_2 \to E_i$, défini par $(z_1, z_2) \mapsto z_i$, est un morphisme de revêtements entre q et p_i. En déduire que $[q] \geq [p_i]$ pour $i \in \{1, 2\}$.