

Université Claude Bernard - Lyon 1

PROJET DE THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité Mathématiques

Présentée par
Saïd JABRANE

***H*-principe, visualisation et applications**

Directeur
M. Vincent BORRELLI Université de Lyon 1

Directeur
M. Francis LAZARUS Gipsa-Lab Grenoble

Table des matières

Introduction	5
0.1 Les motivations	6
0.2 Descriptif des chapitres et résultats principaux	7
0.3 Perspectives	24
1 Le théorème de Nash-Kuiper et l'intégration convexe 1-dimensionnelle	25
1.1 Introduction	25
1.2 Lemmes fondamentaux de l'intégration convexe	25
1.3 C^0 -densité	27
1.4 Nash-Kuiper en dimension 1	31
1.4.1 Le procédé de Nash-Kuiper	31
1.4.2 Choisir ψ_k	34
1.5 Le lemme d'amplitude	36
1.6 Régularité C^1 de f_{iso}	37
2 Effets métriques de l'intégration convexe	43
2.1 Notations, domaine fondamental	43
2.2 Le cas du cylindre	44
2.3 Le cas du tore	54
2.4 Complément : de l'importance d'intégrer le long d'un champ de vecteur.	58
3 Immersions isométriques du tore carré plat	61
3.1 Le théorème d'étape	61
3.2 Démonstration du théorème d'étape	62
3.2.1 Domaines fondamentaux	62
3.2.2 Lemme préliminaire	63
3.2.3 Première corrugation	64
3.2.4 Seconde corrugation	66
3.2.5 Troisième corrugation	68
3.2.6 Réalisation des conditions (C1), (C2) et (C3)	69
3.2.7 Fin de la démonstration et choix des N_i	71
3.3 Suite convergeant vers une immersion isométrique	72
3.4 Mise en forme en vue de l'implémentation	74
3.4.1 Nouveau choix du nombre de corrugations	74
4 Algorithme général	77
4.1 Données initiales et calculs préliminaires	77
4.1.1 Immersion initiale et les nombres R et r	77

4.1.2	Le défaut d'isométrie et le nombre γ	78
4.1.3	Les nombres K et ϵ	80
4.2	Construction de la suite	80
4.3	La procédure principale	81
5	Implémentation	87
5.1	Codage des immersions	87
5.1.1	Discrétisation	87
5.1.2	Interpolation	88
5.2	Champs de vecteurs et calcul du flot	90
5.3	Corrugation le long des courbes intégrales	91
5.3.1	Corrugation sans recollement	91
5.3.2	Le recollement	93
5.4	Retour aux coordonnées euclidiennes	94
5.5	Choix de l'immersion initiale f_{init}	95
5.6	Choix des $N_{k,j}$ et taille de la grille	96
5.7	Calcul local	99
6	Les images	101
6.1	Le problème du rendu	101
6.1.1	Images numériques et lancer de rayons	101
6.1.2	Image du tore plat	103
6.2	Zoom	104

Introduction

L'objectif de cette thèse est le développement d'un programme permettant la visualisation de certaines surfaces célèbres dont il n'existe aucune image : les plongements isométriques des tores carrés plats dans l'espace euclidien de dimension trois $\mathbb{E}^3$. Ces plongements isométriques ont été découverts par Nash et Kuiper en 1954-1955 et ont surpris la communauté mathématique par leur existence et par leur régularité inhabituelle : celle-ci est seulement de classe C^1 en général.

La méthode de Nash et Kuiper, en dépit de son caractère constructif, ne fournit pas de procédé suffisamment explicite pour permettre de représenter ces plongements. Elle ne se prête donc pas à une visualisation. Mais la donne change avec Gromov. Ce dernier revisite les travaux de Nash-Kuiper et en extrait une méthode, l'*intégration convexe* qui généralise et éclaire leur démarche. Avec cette méthode, les idées sous-jacentes aux démonstrations de Nash et Kuiper deviennent plus accessibles et plus compréhensibles. En particulier, une visualisation de plongements isométriques de surfaces dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ devient possible à condition de transformer cette méthode en algorithme, d'adapter et de simplifier la théorie au cas particulier des tores. C'est ce que nous avons réalisé dans ce présent travail de thèse pour le tore carré plat.

Trois parties forment cette thèse :

1. La partie mathématique. (Chapitre I, II et III)

Il s'agit de développer une version explicite de la théorie de l'intégration convexe (qui est un outil pour démontrer des h -principes) afin de permettre son implémentation. La première phase de cette partie consiste en l'adaptation des diverses étapes de la construction de Gromov-Nash-Kuiper en vue de leur implémentation. Les difficultés se sont concentrées autour de deux lemmes cruciaux. Le premier de ces lemmes est **le lemme fondamental du h -principe 1-dimensionnel**. Il s'agit de construire explicitement une famille de lacets permettant la mise en œuvre de l'intégration convexe. Le second lemme porte le nom de **théorème d'étape** : le programme doit appliquer un grand nombre de fois le lemme fondamental du h -principe 1-dimensionnel dans trois directions différentes. Ceci constitue une simplification importante de la démonstration de Nash-Kuiper, où le nombre de directions n'est pas fixé et peut être très grand. Fixer ce nombre de directions à son minimum possible—c'est-à-dire trois—permet non seulement de simplifier la démonstration mais également de faciliter considérablement l'implémentation.

La phase suivante de cette partie mathématique est **le contrôle des erreurs**. En effet, afin de pouvoir appliquer récursivement l'intégration convexe, il est impératif de produire des solutions dont on contrôle à chaque étape le degré d'approximation. Il faut donc produire une version quantitative explicite des approximations réalisées par l'intégration convexe.

2. La partie algorithmique. (Chapitre IV)

Elle présente les étapes principales de l'algorithme général permettant de construire grâce à l'intégration convexe une suite d'immersions convergeant vers une immersion isométrique

du tore carré plat et C^0 -proche d'une immersion initiale donnée du tore $\mathbb{T}^2$.

3. La partie informatique. (Chapitre V et VI)

La partie informatique consiste en l'implémentation de l'algorithme mis en place dans la partie précédente puis en la production d'images. Nous décrivons la manière dont les applications continues sont codées au moyen de grilles discrètes ainsi que le choix de la méthode d'interpolation surfacique mise en oeuvre. Nous expliquons comment est calculé numériquement le flot du champ de vecteurs des directions d'intégration $W_{k,j}$ nécessaire pour chaque corrugation. L'intégration convexe discrétisée est décrite dans les paragraphes 5.3 et 5.4. Le choix de l'immersion initiale est discuté au paragraphe 5.5. Nous expliquons dans le paragraphe 5.6 comment choisir le paramètre principal du processus, c'est-à-dire le nombre d'oscillations. Nous terminons ce chapitre V par une étude numérique locale de la croissance des nombres d'oscillations. Au vue des contraintes informatiques (espace mémoire, taille des grilles $10\,000 \times 10\,000$ et $20\,000 \times 100\,000$) des calculs locaux ont été effectués sur un petit domaine du tore. Les images obtenues sont présentées au chapitre VI.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet **Hévée** réunissant les trois laboratoires suivants : ICJ (Institut Camille Jordan), LJK (Laboratoire Jean Kuntzmann) et Gipsa-Lab spécialisés en mathématiques, mathématiques appliquées et informatique. En effet, la représentation d'un tore carré plat dans l'espace tridimensionnel est une problématique de mathématiques pures, mais le caractère algorithmique de la construction est de nature plus informatique et les problèmes numériques liés aux calculs sont du ressort des mathématiques appliquées. Ce travail a été soutenu par le **CNRS** et par une **allocation doctorale de recherche de la Région Rhône-Alpes**. Il a fait l'objet d'une publication aux PNAS [5].

0.1 Les motivations

1. Le théorème de Nash, en affirmant l'existence de plongements isométriques en petite co-dimension semble conduire à un paradoxe car des arguments géométriques simples faisant intervenir la courbure permettent de construire des obstructions à de tels plongements.
2. Ce paradoxe est résolu par la régularité inhabituelle de ces plongements : ils sont C^1 mais pas C^2 en général, en particulier la courbure n'est pas définie.
3. Mais cette régularité inhabituelle pose d'autres problèmes : il est difficile d'imaginer la structure des plongements de Nash. Quelle peut être l'image de ces surfaces qui ne sont pas C^2 et qui pourtant admettent un plan tangent en chacun de leurs points ?
4. Dans ce travail nous répondons à cette question en construisant la première image d'un plongement isométrique du tore carré plat dans l'espace euclidien de dimension trois (noté $\mathbb{E}^3$). Pour cette construction nous utilisons le h -principe via l'intégration convexe.

Nous finissons ces motivations par un extrait d'une interview de Gromov concernant son livre sur les relations aux dérivées partielles [3] :

Ce livre est la première pierre pour l'édifice d'une théorie géométrique des EDP (espace des solutions, etc.) ; il n'est pratiquement pas connu parce que trop conceptuel, or il est tellement universel ! Il n'y a pratiquement aucune contrainte pour les équations considérées (qui sont, insistons, la majorité, car en fait la plupart des équations sous-déterminées sont soft, tandis que les équations rigides sont exceptionnelles), ici on peut tout avoir, même des fractals. Il y a donc une

robustesse, et l'on sait que la robustesse est essentielle en physique, car on ne voit que ce qui est robuste.

Le h-principe : il est effectivement difficile à croire ; les experts de l'analyse n'y croient pas, et du coup démontrent de temps en temps des morceaux de ce qui est déjà dans le livre. Hard to believe, parce qu'il contredit à la fois l'intuition mathématique et l'intuition physique. Par exemple pour une équation C^1 , les solutions sont C^0 denses. Mais il reste beaucoup à faire...

0.2 Descriptif des chapitres et résultats principaux

La thèse est composée de six chapitres. Nous résumons le contenu de chacun d'eux ci-dessous.

CHAPITRE 1 : Intégration convexe 1-dimensionnel

Dans ce premier chapitre, on s'intéresse au cas des plongements isométriques des courbes dans le plan. L'objectif est de comprendre dans ce cadre simple la façon dont s'articule la démonstration de Nash-Kuiper et particulièrement d'étudier en détail l'effet des intégrations convexes nécessaires à la construction du plongement isométrique. Plus encore, elle nous permettra de choisir avec pertinence l'ingrédient fondamental de la méthode d'intégration convexe, à savoir la famille de lacets utilisée pour l'intégration convexe servant de base à la construction de la solution. Les résultats principaux de ce chapitre sont les suivants.

Choix de la famille de lacets

L'intégration convexe construit des solutions à certains problèmes différentiels à partir de la donnée d'une famille de lacets satisfaisant à certaines contraintes. Nous décrivons ci-dessous la famille de lacets que nous avons choisie.

Étant donné un point z du plan complexe $\mathbb{C}$ et un nombre réel strictement positif r avec $|z| < r$, il s'agit de définir spécifiquement un lacet h_z de $\mathbb{C}$ à image dans le cercle de centre l'origine et de rayon r tel que

$$z = \int_0^1 h_z(s) ds.$$

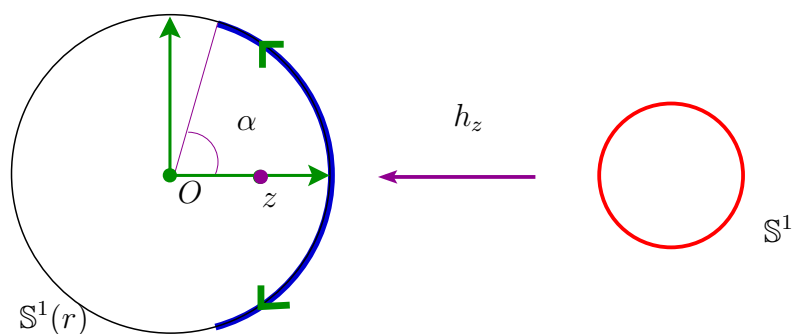


FIGURE 1 –

Nous avons choisi la famille de lacets définie par :

$$\begin{aligned} h_z : \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{S}^1(r) \\ s &\longmapsto r e^{i\alpha \cos(2\pi s)} \end{aligned}$$

$$\text{avec } J_0(\alpha) = |z|/r \quad \text{où} \quad J_0(x) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p}$$

et où l'écriture $e^{i\theta}$ signifie $\cos \theta \, z/|z| + i \sin \theta \, z/|z|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto J_0(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre zéro. On montre alors que :

$$\forall z \in B(0; r), \quad z = \int_0^1 h_z(u) du.$$

La C^0 -densité :

Soit $f_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ une immersion et $r : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que :

$$\forall s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad |f_0'(s)| < r(s).$$

On définit une nouvelle application $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ par la formule :

$$f(t) = f_0(0) + \int_0^t h(u, Nu) du - t \int_0^1 h(u, Nu) du$$

avec

$$\begin{aligned} h(z, s) &= h_z(s) \\ &= r(z) e^{i\alpha(z) \cos(2\pi s)} \\ &= r(z) \cos(\alpha(z) \cos(2\pi s)) \mathbf{t} + r(z) \sin(\cos(2\pi s)) \mathbf{n}, \end{aligned}$$

où

$$\alpha(z) = J_0^{-1}(|f_0(z)|/r(z)) \quad , \quad \mathbf{t} = f_0'(s)/|f_0'(s)| \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = i f_0'(s)/|f_0'(s)|$$

Le nombre $N \in \mathbb{N}^*$ est un paramètre libre de la construction, appelé le *nombre d'oscillations*.

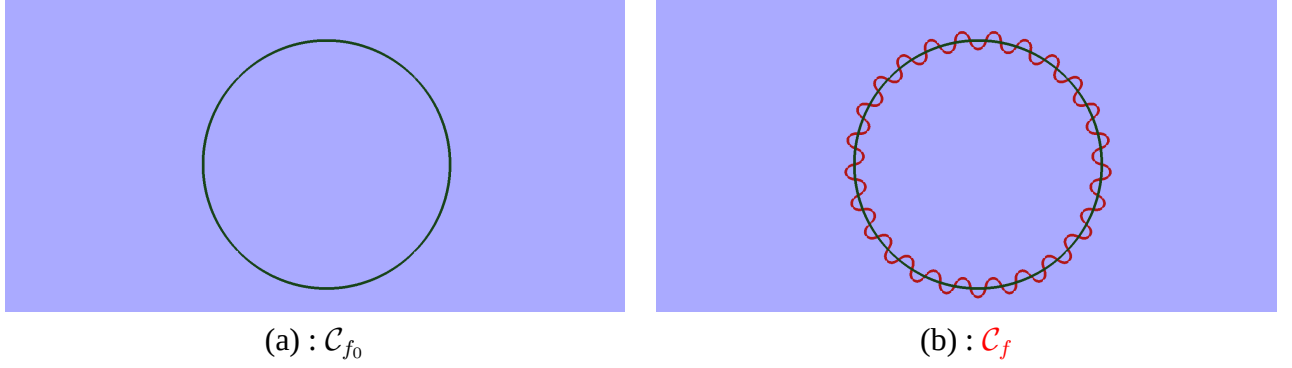
Remarque Dans la définition de f , les deux premiers termes sont dûs à l'intégration convexe. Le dernier terme sert au recollement (il permet d'avoir $f(0) = f(1)$).

Définition. On dit que l'immersion f ci-dessus est obtenue à partir de f_0 par un **procédé d'intégration convexe**.

L'effet de cette intégration convexe est de produire une nouvelle courbe f présentant N oscillations et dont la dérivée vérifie l'inégalité

$$\forall t \in [0, 1] \quad , \quad r(t) - \left| \int_0^1 h(u, Nu) du \right| \leq |f'(t)| \leq r(t) + \left| \int_0^1 h(u, Nu) du \right|$$

Le terme de recollement est en fait négligeable. Plus précisément :

FIGURE 2 – (a) : L'image de f_0 . (b) L'image de f .

Proposition (1.3.1 et 1.3.2) On a

$$\left| \int_0^1 h(u, Nu) du \right| = O(1/N).$$

De plus, l'immersion f vérifie $\|f - f_0\|_{C^0} = O(1/N)$

Le procédé de Nash-Kuiper :

Dans la seconde partie de ce chapitre, on s'intéresse à l'effet d'une infinité d'intégrations convexes sur une application initiale f_0 . Cette étude est motivée par la méthode constructive des plongements isométriques de Nash-Kuiper. On montre que la régularité de l'application limite dépend de la croissance des nombres d'oscillations N_k ainsi que de la décroissance des amplitudes α_k de ces oscillations.

Soit $f_0 : (\mathbb{E}/\mathbb{Z}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}}) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{E}^2 \simeq \mathbb{C}$ un plongement strictement court. On suppose en outre que f_0 satisfait les deux hypothèses ci-dessous :

- (H_1) : f_0 est paramétrée à vitesse constante : $\forall t \in \mathbb{E}/\mathbb{Z}, \|f'_0(t)\| = r_0$
- (H_2) : f_0 est radialement symétrique : $\forall t \in \mathbb{E}/\mathbb{Z}, f'_0(t + 1/2) = -f'_0(t)$.

Ces deux hypothèses ne sont pas fondamentales mais elles simplifient grandement les calculs et les énoncés des résultats.

Soit $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite de métriques définie par

$$g_k := f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2} + \delta_k \Delta$$

où $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante de nombres réels strictement positifs de limite 1 et telle que la série $\sum \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}}$ converge et on note

$$\Delta := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}} - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2}$$

le défaut d'isométrie. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$r_k := \sqrt{g_k(\partial_t, \partial_t)} = \sqrt{\delta_k + (1 - \delta_k)r_0^2}.$$

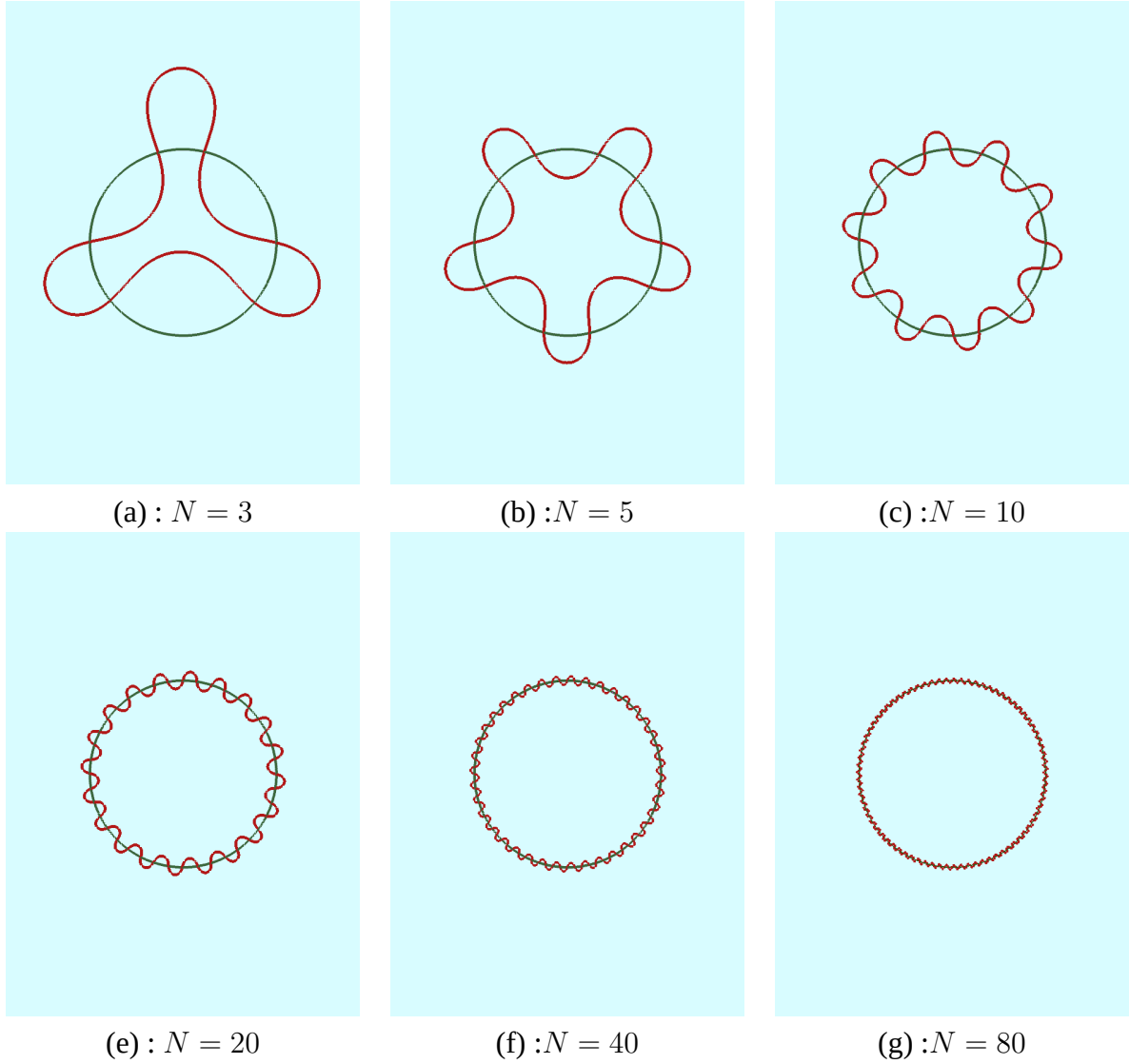


FIGURE 3 – (a) : Influence du nombre d’oscillations sur la C^0 -proximité.

Désignons par $\mathcal{C}_k$ le cercle de $\mathbb{E}^2$ de centre l’origine et de rayon $r_k/2\pi$

Proposition 1.6.2 La suite d’applications $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie récursivement par

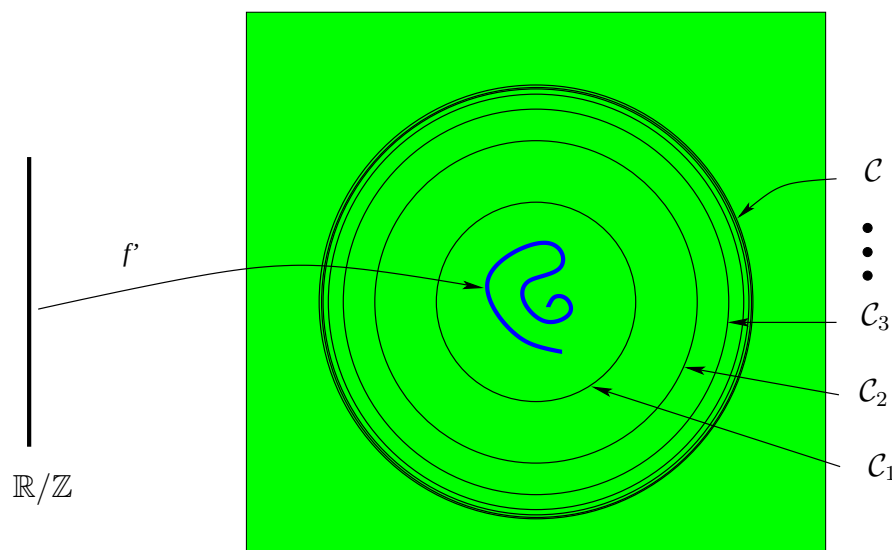
$$\forall t \in [0, 1], \quad f_k(t) = f_{k-1}(0) + \int_0^t r_k e^{i\alpha_k \cos(2\pi N_k s)} ds \quad \text{avec} \quad \alpha_k = J_0^{-1} \left(\frac{r_{k-1}}{r_k} \right)$$

passé au quotient sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et est telle que f'_k est à valeurs dans $\mathcal{C}_k$. Si

$$\sum \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} < \infty$$

alors cette suite converge au sens C^1 vers une isométrie f_{iso} . En particulier la C^1 convergence ne dépend pas des choix des N_k .

Remarque Le fait que la C^1 convergence ne dépende pas du choix des N_k est très spécifique au cas 1-dimensionnel et est lié au fait qu’il n’y ait pas de recollement à faire !

FIGURE 4 – Ensemble formé de cercles de périmètre r_k .

En revanche, les choix de la suite des N_k est déterminant pour le caractère C^2 de la limite :

Proposition (1.6.3 et 1.6.4) *Sous les mêmes hypothèses que la proposition ci-dessus :*

- Si $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \alpha_k N_k < +\infty$ alors f_{iso} est partout C^2 et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k'' = f_{iso}''$.
- Si $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \alpha_k N_k = +\infty$ et s'il existe $\eta > 0$ tel que $\sum_k (\delta_k - \delta_{k-1})^{\frac{1-\eta}{2}} S_k^\eta < +\infty$ où $S_k := \sum_{l=1}^k \alpha_l N_l$ alors f_{iso} est $C^{1,\eta}$.

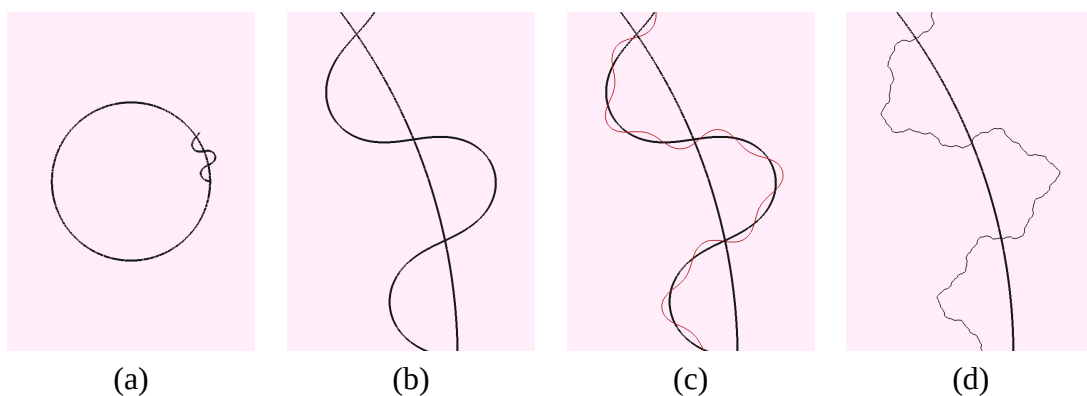


FIGURE 5 – Zoom sur quelques courbes successives et sur la courbe limite.

CHAPITRE 2 : Effets métriques de l'intégration convexe (sur le tore)

Dans ce chapitre, nous passons du cas 1-dimensionnel au cas 2-dimensionnel, c'est-à-dire au cas du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Nous montrons qu'un grand nombre des effets induits par intégration convexe sont contrôlés par le nombre d'oscillations (le *théorème I2C*). La perturbation de la différentielle le long de la direction d'intégration échappe cependant à ce contrôle. Son ampleur dépend de l'erreur initiale à la métrique que l'on souhaite atteindre. Nous expliquons aussi pourquoi il est crucial, au

moins dans le cas du tore, d'effectuer des corrugations le long des courbes intégrales d'un certain champ de vecteurs. Nous traitons aussi le problème du recollement.

Avant d'énoncer le résultat principal de ce chapitre, commençons par introduire le cadre et les notations. L'espace euclidien $\mathbb{E}^2$ est muni d'une base orthonormée directe (∂_x, ∂_y) . Nous désignons par Λ le réseau $\mathbb{Z}\partial_x + \mathbb{Z}\partial_y$ et par ℓ une forme linéaire sur $\mathbb{E}^2$. On suppose que $\ker \ell$ contient un élément primitif *i.e* un élément dont les coordonnées sont des entiers premiers entre eux. Nous notons ∂_2 un vecteur unitaire du noyau de ℓ . Il existe donc $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $T^{-1} \partial_2$ soit primitif. Nous supposons aussi que :

$$\ell = \langle \partial_2^\perp, \cdot \rangle$$

où $\partial_2^\perp$ est le vecteur $\partial_2^\perp = \text{Rot}_{-\frac{\pi}{2}} \partial_2$. Notons que $(\partial_2^\perp, \partial_2)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{E}^2$. Le rectangle déterminé par l'origine O de $\mathbb{E}^2$ et les points

$$A := O + T^{-1} \partial_2, \quad B := O + T \partial_2^\perp \quad \text{et} \quad C := O + T^{-1} \partial_2 + T \partial_2^\perp$$

est un domaine fondamental pour l'action de Λ sur $\mathbb{E}^2$, il est noté Dom .

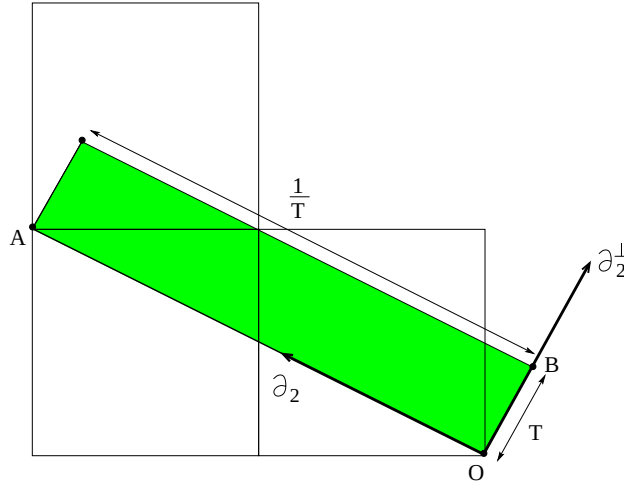


FIGURE 6 – Exemple de domaine fondamental .

Soit $f_0 : Dom \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion de classe C^∞ et $\mu_0 := f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$. On définit une nouvelle métrique μ sur Dom en posant :

$$\mu := \mu_0 + \rho \ell \otimes \ell$$

où $\rho : Dom \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une application C^∞ . Par définition de μ , l'application

$$f_0 : (Dom, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$$

est une immersion courte *i.e* $\mu_0 = f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \leq \mu$. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 (Théorème I2C) *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une immersion du tore carré plat muni de la métrique μ dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ muni de sa métrique standard*

$$f : (\mathbb{T}^2, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$$

telle que

$$1) \|f - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$$

- 2) $\|\partial_2 f - \partial_2 f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$
- 3) $\|\mu - f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \leq \epsilon$
- 4) $\|df - df_0\|_{C^0} \leq \epsilon + \sqrt{7} \|\rho\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}$.

Le théorème affirme qu'à partir d'une application courbe pour la métrique μ , on peut obtenir par un procédé d'intégration convexe une nouvelle application qui est quasi-isométrique pour μ i.e $\|\mu - f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \leq \epsilon$ (point 3). D'autre part, cette intégration convexe modifie peu la différentielle de f_0 le long de ∂_2 i.e $\|\partial_2 f - \partial_2 f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$ (point 2), et la modification induite dans la direction du champ de vecteurs ∂_1 est sous contrôle i.e $\|df - df_0\|_{C^0} \leq \epsilon + \sqrt{7} \|\rho\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}$ (point 4). De plus, l'immersion f est C^0 -proche de f_0 (point 1).

Il ne s'agit pas uniquement d'un théorème d'existence. L'intégration convexe permet de construire explicitement une telle solution. Expliquons brièvement la construction de l'application f . Le champ de vecteurs en question ∂_1 est défini par :

$$\partial_1 := \partial_2^\perp + \sigma \partial_2 \quad \text{avec} \quad \sigma(x, y) := -\frac{\mu_{(x,y)}(\partial_2, \partial_2^\perp)}{\mu_{(x,y)}(\partial_2, \partial_2)}$$

Il est μ -orthogonal à ∂_2 i.e $\mu(\partial_1, \partial_2) = 0$. Désignons par φ le flot de ∂_1 . L'ensemble $Dom_\varphi := \{\varphi(p_0, t) \mid p_0 \in [OA], t \in [0, T]\}$ est encore un domaine fondamental pour Λ .

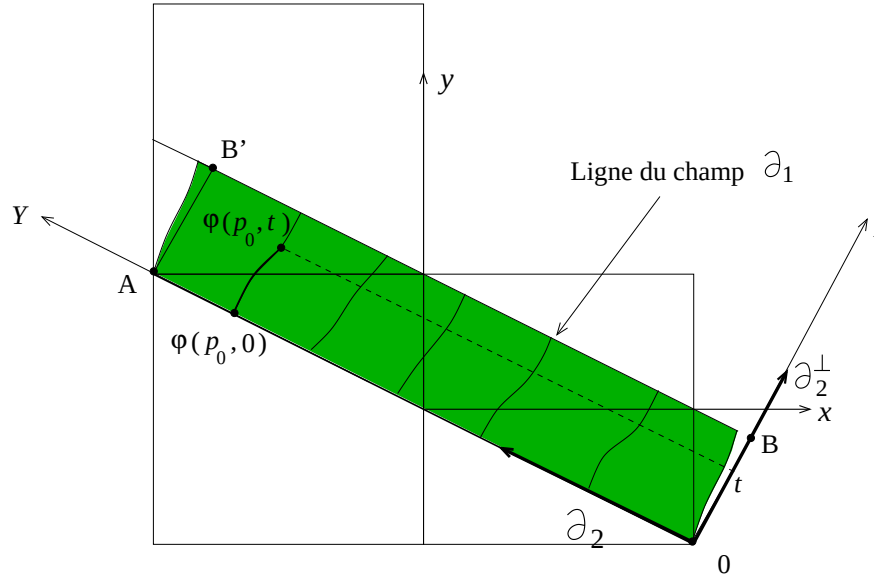


FIGURE 7 – Domaine fondamental Dom_φ (partie verte) et lignes de champ.

Nous définissons alors f en tout point de Dom_φ par

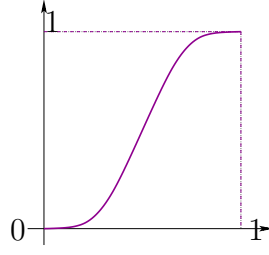
$$f(\varphi(p_0, t)) := H(\varphi(p_0, t)) - w\left(\frac{t}{T}\right) (H(\varphi(p_0, T)) - f_0(\varphi(p_0, T)))$$

avec

$$H(\varphi(p_0, t)) := f_0(p_0) + \int_0^t h(\varphi(p_0, s), Ns) ds$$

où $p_0 \in [O, A]$, $t \in [0, T]$, N est un entier naturel non nul quelconque et h est donnée par

$$h(p, u) := r(p) \{ \cos(\alpha(p) \cos 2\pi u) \mathbf{t}_0(p) + \sin(\alpha(p) \cos 2\pi u) \mathbf{n}_0(p) \}.$$

FIGURE 8 – Représentation graphique de w .

Dans cette dernière expression, on a pris

$$\begin{cases} r(p) &:= \sqrt{\mu_p(\partial_1, \partial_1)} \\ \alpha(p) &:= J_0^{-1} \left(\frac{\|\partial_1 f_0(p)\|}{r(p)} \right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{t}_0 &:= \frac{\partial_1 f_0}{\|\partial_1 f_0\|} \\ \mathbf{n}_0 &:= \frac{\partial_1 f_0 \wedge \partial_2 f_0}{\|\partial_1 f_0 \wedge \partial_2 f_0\|}. \end{cases}$$

La fonction $w \in C^\infty([0, 1]; \mathbb{R})$ est choisie de manière à vérifier

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 1 \quad \text{et pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad w^{(k)}(0) = w^{(k)}(1) = 0.$$

Nous remarquons que la fonction h vérifie :

$$\partial_1 f_0(p) = \int_0^1 h(p, u) du$$

Nous pouvons noter que l'expression de f est la différence de deux termes. Le premier terme est propre à l'intégration convexe. Le second terme permet de recoller afin d'obtenir une solution qui passe au quotient et donc qui soit définie sur $\mathbb{T}^2$. Nous montrons alors que

$$\max \left\{ \|f - f_0\|_{C^0}; \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\|_{C^0}; \|\mu - f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0}; \|df - df_0\|_{C^0} - \sqrt{7} \|\rho\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} \right\} = O(1/N).$$

Comme illustration et en partant d'un plongement court

$$f_0 : (\mathbb{T}^2, \mu) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$$

avec $\mu = f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho \ell \otimes \ell$, nous présentons sur la figure 9 quelques images des immersions obtenues après une corrugation dans différentes directions.

CHAPITRE 3 : Immersions isométriques du tore carré plat

Dans ce chapitre, nous montrons comment à partir d'un plongement lisse strictement court du tore carré plat dans l'espace euclidien, on peut construire de façon suffisamment explicite pour être implémentée, une suite d'applications $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une C^1 -isométrie du tore carré plat dans $\mathbb{E}^3$. Ce résultat est en fait une conséquence du *théorème d'étape* énoncé ci-dessous qui lui même utilise le *théorème I2C* démontré au chapitre II.

Soient (∂_x, ∂_y) la base orthonormale standard de $\mathbb{E}^2$ et $(\partial_x^*, \partial_y^*)$ sa base duale. Nous définissons trois formes linéaires ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sur $\mathbb{E}^2$ par :

$$\ell_1 := \partial_x^*, \quad \ell_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}(\partial_x^* + 2\partial_y^*), \quad \ell_3 := \frac{1}{\sqrt{5}}(\partial_x^* - 2\partial_y^*)$$

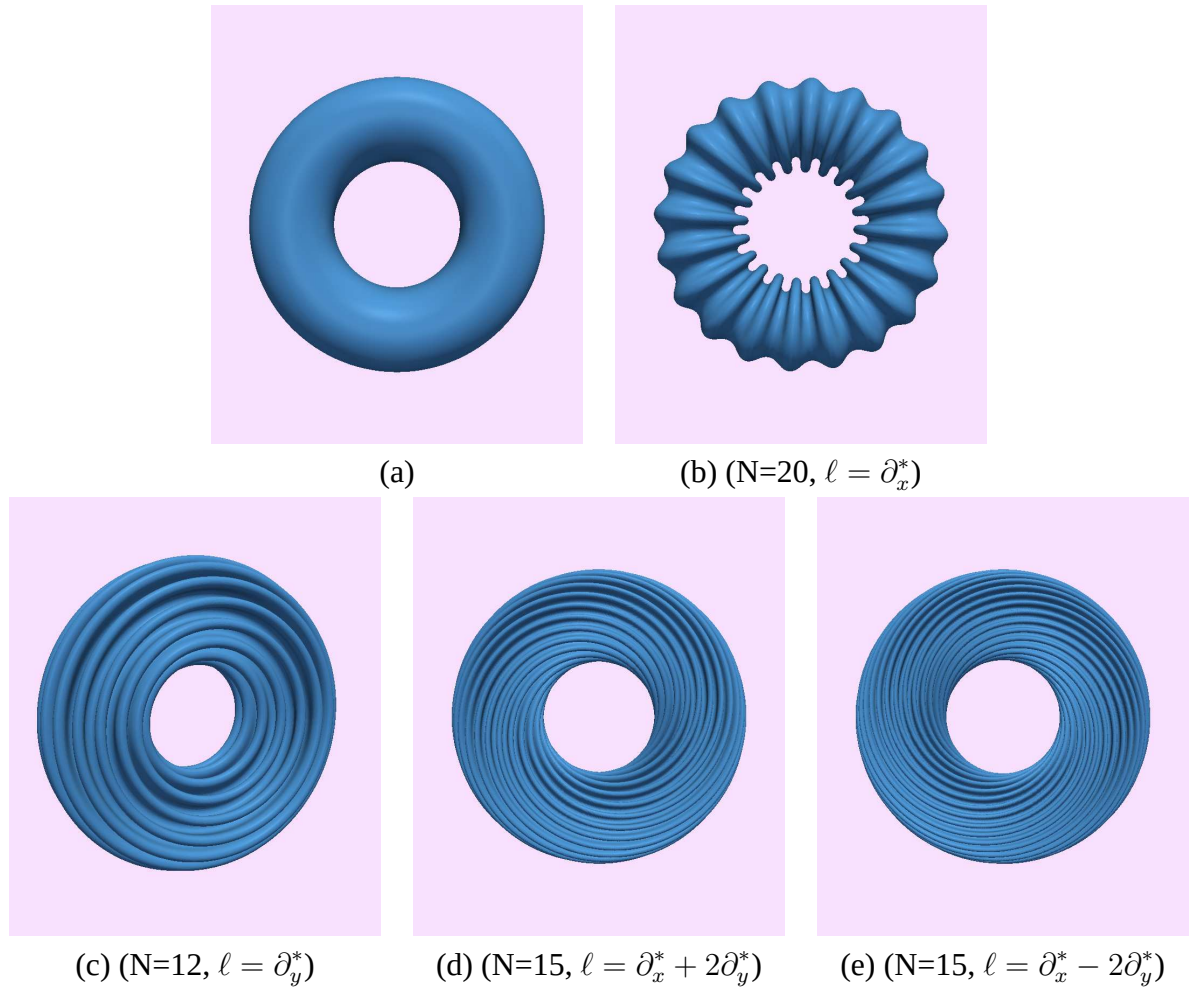


FIGURE 9 – (a) *Tore initial.* (b) *Tore après une corrugation dans la direction des longitudes partial_x.* (c) *Direction partial_y.* (d) *Direction partial_x + 2partial_y.* (e) *Direction partial_x - 2partial_y.*

Et nous désignons par :

$$\mathcal{C} := \{\rho_1 \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2 \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3 \ell_3 \otimes \ell_3 \mid \rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \rho_3 > 0\}$$

le cône positif engendré par les trois formes bilinéaires symétriques positives $\ell_1 \otimes \ell_1$, $\ell_2 \otimes \ell_2$ et $\ell_3 \otimes \ell_3$.

Ainsi tout point de $\mathcal{C}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}^2$ et donc, toute application C^∞ de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{C}$ est une métrique de $\mathbb{T}^2$.

Théorème 3.1.1 (théorème d'étape). *Soient g and h deux métriques riemanniennes sur $\mathbb{T}^2$ et soit $f_0 : (\mathbb{T}^2, g) \longrightarrow \mathbb{E}^3$ une immersion telles que :*

- 1) $h - g \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$,
- 2) $g - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$.

Alors, pour tout $K > 0$ il existe une immersion $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) $f(0, 0) = f_0(0, 0)$
- ii) $\|g - f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|h - g\|_{C^0}$

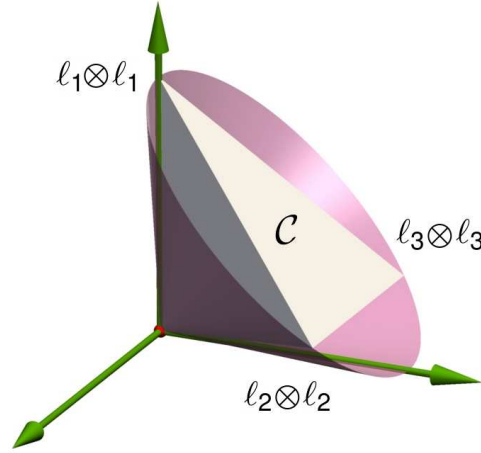


FIGURE 10 – L’espace de formes bilinéaires symétriques est identifié à $\mathbb{E}^3$ via la base $(\partial_x^* \otimes \partial_x^*, \partial_x^* \otimes \partial_y^* + \partial_y^* \otimes \partial_x^*, \partial_y^* \otimes \partial_y^*)$. Le cône C est représenté en gris à l’intérieur du cône des métriques.

$$\text{iii)} \quad h - f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \in C^\infty(\mathbb{T}^2, C)$$

$$\text{iv)} \quad \|df - df_0\|_{C^0} \leq C^{te} \|g - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} + K \|h - g\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}.$$

La différence fondamentale entre le théorème d’étape et le théorème I2C est la suivante : dans le théorème I2C la différence entre la métrique initiale et la métrique finale se réduit à un coefficient (le nombre ρ dans la relation $\mu = \mu_0 + \rho \ell \otimes \ell$). Ici la différence entre la métrique initiale et la métrique finale fait intervenir trois coefficients, précisément :

$$g - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} = \rho_1 \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2 \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3 \ell_3 \otimes \ell_3$$

et c’est l’application de trois intégrations convexes dans trois directions différentes qui permet d’obtenir une nouvelle immersion f qui est quasi-isométrique pour g (au sens du point *ii*) et dont la différentielle est sous contrôle (le point *iv*).

Dans ce théorème apparaît une troisième métrique, notée h , et telle que

$$f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} < g < h.$$

Le rôle de cette troisième métrique est de garantir que l’on pourra ensuite itérer le procédé. En effet le point *iii* du théorème d’étape nous assure que la solution f est strictement courte pour la métrique h . Nous pourrions donc itérer ce théorème pour construire une nouvelle application qui sera quasi-isométrique pour h . Étant donnée une suite croissante de métriques $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui converge par exemple vers la métrique plate $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2}$, ces itérations successives permettent de construire une suite d’applications dont chaque élément f_k sera quasi-isométrique pour la métrique g_k et strictement court pour la métrique g_{k+1} . Le contrôle à chaque étape des différentielles (point *iv*) permettra de s’assurer une convergence C^1 vers une application isométrique pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2}$.

Explicitons brièvement la construction de l’application f du théorème d’étape. Elle est le résultat de trois intégrations successives dans trois directions données : à partir de f_0 , on construit $f_{1,1}$, $f_{1,2}$ et $f_{1,3} := f$. Elle se réalise en trois phases :

Première phase. Soit

$$\begin{aligned} D_1 : &= g - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3} \\ &= \rho_1(D_1) \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2(D_1) \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3(D_1) \ell_3 \otimes \ell_3 \\ &\in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C}). \end{aligned}$$

Définissons une métrique auxiliaire μ_1 par

$$\mu_1 := f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_1(D_1) \ell_1 \otimes \ell_1.$$

Notons que l'application

$$f_0 : (\mathbb{T}^2, \mu_1) \longrightarrow (E^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$$

est une immersion courte. On applique alors le théorème *I2C* pour construire une immersion

$$f_1 : (\mathbb{T}^2, \mu_1) \rightarrow \mathbb{E}^3$$

obtenue par le procédé d'intégration convexe qui est μ_1 quasi-isométrique.

Deuxième phase. Soit

$$\begin{aligned} D_2 : &= g - f_1^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3} \\ &= \rho_1(D_2) \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2(D_2) \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3(D_2) \ell_3 \otimes \ell_3 \end{aligned}$$

Définissons une métrique auxiliaire μ_2 par

$$\mu_2 := f_1^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_2(D_2) \ell_2 \otimes \ell_2.$$

l'application

$$f_1 : (\mathbb{T}^2, \mu_2) \longrightarrow (E^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$$

est une immersion courte. On applique alors le théorème *I2C* pour construire une immersion

$$f_2 : (\mathbb{T}^2, \mu_2) \rightarrow \mathbb{E}^3$$

obtenue par le procédé d'intégration convexe qui est μ_2 quasi-isométrique.

Troisième phase. Soit

$$\begin{aligned} D_3 : &= g - f_2^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3} \\ &= \rho_1(D_3) \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2(D_3) \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3(D_3) \ell_3 \otimes \ell_3 \end{aligned}$$

Définissons une métrique auxiliaire μ_3 par

$$\mu_3 := f_2^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_3(D_3) \ell_3 \otimes \ell_3.$$

l'application

$$f_2 : (\mathbb{T}^2, \mu_3) \longrightarrow (E^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$$

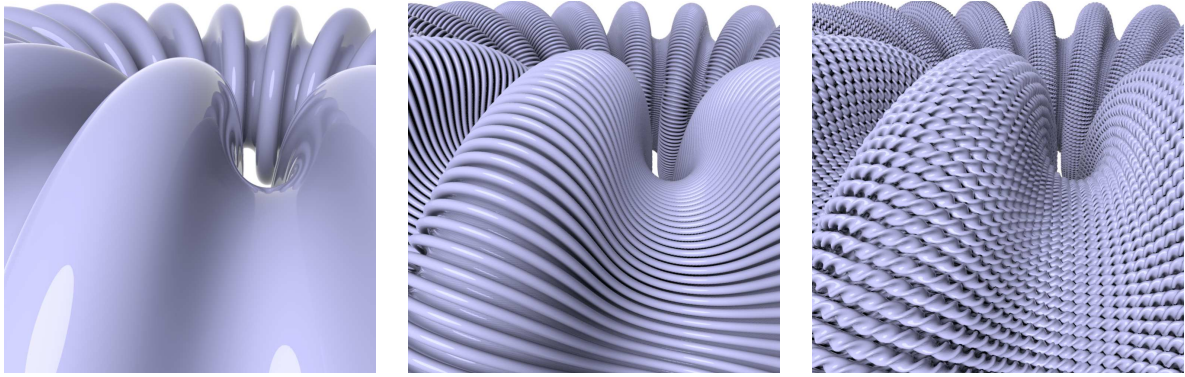
Phase 1 : f_1 Phase 2 : f_2 Phase 3 : f_3

FIGURE 11 – En partant d’une immersion strictement courte $f_0 : (\mathbb{T}^2, g = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2}) \rightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$ le théorème d’étape permet de construire f_1, f_2 et f_3 représentées ci-dessus.

est une immersion courte. On applique alors le théorème $I2C$ pour construire une immersion

$$f_3 : (\mathbb{T}^2, \mu_3) \rightarrow \mathbb{E}^3$$

obtenue par le procédé d’intégration convexe qui est μ_3 quasi-isométrique. On peut alors montrer que ceci implique que l’immersion f_3 est g quasi-isométrique. L’application f_3 est l’immersion f cherchée.

En utilisant le *théorème d’étape* itérativement, nous retrouvons le théorème de Nash-Kuiper-Gromov :

Théorème. Soit $f_{init} : (\mathbb{T}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2}) \rightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$ une immersion strictement courte. Alors il existe une immersion $f : (\mathbb{T}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2}) \rightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$ de classe C^1 telle que $f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2}$ i.e f est une isométrie.

Expliquons brièvement la construction de la limite. Désignons par

$$\Delta := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2} - f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

le défaut d’isométrie. On considère la suite croissante de métriques $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers la métrique euclidienne $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ et donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad , \quad g_k := f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \delta_k \Delta.$$

On construit une suite d’immersions

$$f_{init}; \quad f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}; \quad f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}; \quad f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}; \quad \dots$$

en appliquant d’une manière récursive le théorème d’étape. En effet, supposons avoir construit f_{k-1} immersion strictement courte par rapport à g_k , nous prenons

$$g = g_k \quad \text{et} \quad h = g_{k+1},$$

et par application du théorème d’étape on construit

$$f_{k,1}, f_{k,2}, f_{k,3} := f_k.$$

On montre que la suite $(f_k := f_{k,3})$ converge vers une C^1 -immersion isométrique du tore carré plat dans $\mathbb{E}^3$ grâce au contrôle des normes $\|f_k - f_{k-1}\|_{C^0}$ (point *iv* du théorème d'étape).

Nous fournissons ci-dessous une seconde version du théorème d'étape en vue de l'implémentation. Commençons par rappeler et introduire quelques notations. Soit

$$\begin{aligned} D_{k,j} : &= g - f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3} \\ &= \rho_1(D_{k,j}) \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2(D_{k,j}) \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3(D_{k,j}) \ell_3 \otimes \ell_3. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\mu_{k,j} = f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3} + \rho_j(D_{k,j}) \ell_j \otimes \ell_j$$

Nous définissons le défaut d'isométrie de $f_{k,j}$ par rapport à $\mu_{k,j}$ par

$$Err_{k,j} := \mu_{k,j} - f_{k,j}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \quad \text{et} \quad err_{k,j} := \|Err_{k,j}\|_{C^0}.$$

On démontre alors le résultat suivant :

Théorème 3.4.1 (théorème d'étape bis). *Soit ϵ un réel strictement positif. Il existe une famille d'entiers naturels $N_{k,j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, telle que la famille d'immersions $f_{k,j}$ construite comme ci-dessus vérifie les conditions suivantes :*

- i) $\|f_{k,j} - f_{k,j-1}\|_{C^0} \leq \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^k}.$
- ii) $\|df_{k,j} - df_{k,j-1}\|_{C^0} \leq \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} \|\Delta\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{7} \|\rho_j(D_{k,j})\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}.$
- iii) $err_{k,j} < \frac{4}{45\sqrt{3}} (\delta_{k+1} - \delta_k) \rho_{min}(\Delta).$

CHAPITRE 4 : Algorithme

Dans ce chapitre, nous présentons les étapes principales de l'algorithme général permettant de construire grâce à l'intégration convexe une suite d'immersions convergeant vers une immersion isométrique du tore carré plat ϵ -proche d'une immersion initiale donnée du tore $\mathbb{T}^2$ dans l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbb{E}^3$. Comme le plongement C^1 -isométrique de notre tore plat est le résultat d'un processus itératif infini (numériquement inaccessible), et puisqu'il n'y a aucune formule explicite pour la limite, l'algorithme génère en un nombre fini d'itérations une approximation de cette limite. Nous donnons aussi des conditions permettant la construction d'une telle suite ainsi que la condition d'arrêt de ce processus.

Plus précisément, l'algorithme requiert cinq nombres r, R, ϵ, K et γ . Les nombres (strictement positifs) R et r servent à construire un plongement standard et strictement court du tore carré. La constante $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ permet le contrôle de la vitesse de convergence de la suite de métriques $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ vers la métrique plate $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2}$. La suite de métriques $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est donnée par $g_k := f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \delta_k \Delta$, avec $\delta_k = 1 - e^{-\gamma^k}$. L'algorithme va produire alors les K premiers termes d'une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'immersions convergeant vers une immersion isométrique. En notant f_∞ la limite des f_k en $+\infty$, il garantit en outre que :

$$\|f_K - f_\infty\|_{C^0} \leq \frac{\epsilon}{2^K} \quad \text{et} \quad \|f_K - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon.$$

Chaque immersion f_k est à la fois une quasi-isométrie pour g_k et une application strictement courte pour g_{k+1} . Elle est obtenue grâce au *théorème d'étape* à partir de f_{k-1} et en effectuant trois corrugations successives selon trois directions différentes afin d'obtenir trois immersions $f_{k,1}$, $f_{k,2}$ et

$$f_{k,3} = f_k.$$

Trois domaines fondamentaux différents sont utilisés tout au long de cet algorithme, nous les décrivons ci-après. Soient

$$V(1) := \partial_y, \quad V(2) := -2\partial_x + \partial_y, \quad V(3) := 2\partial_x + \partial_y,$$

nous posons :

$$U(1) := \partial_x, \quad U(2) := \frac{1}{5}(\partial_x + 2\partial_y) \quad \text{et} \quad U(3) := \frac{1}{5}(\partial_x - 2\partial_y).$$

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la famille $(U(i), V(i))$ est une base orthogonale directe de $\mathbb{E}^2$ et le rectangle déterminé par l'origine O de $\mathbb{E}^2$ et les points

$$A(i) := O + U(i), \quad B(i) := O + V(i) \quad \text{et} \quad C(i) := O + U(i) + V(i)$$

est un domaine fondamental de $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$. Il est noté $Dom(i)$.

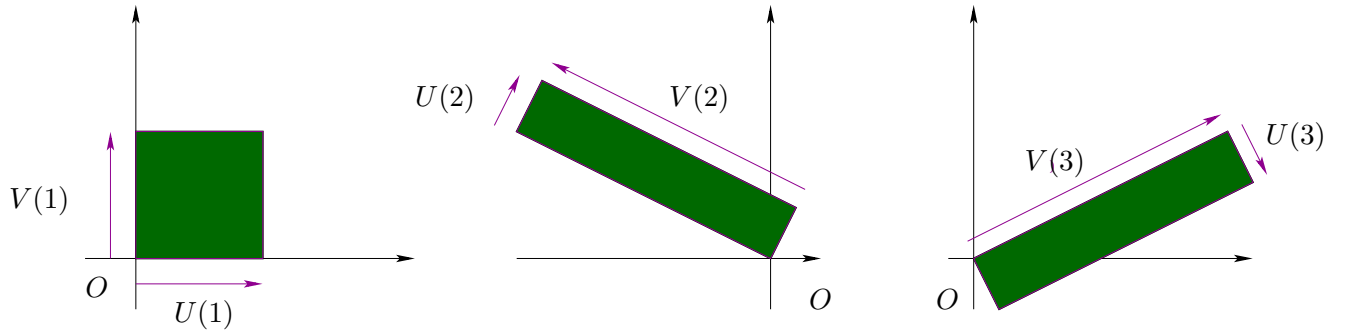


FIGURE 12 – Domaines fondamentaux de $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ de bases $(U(i), V(i))$.

Voici les étapes de la procédure principale de l'algorithme général permettant de construire $f_{k,j}$ à partir de $f_{k,j-1}$:

1. Construction d'une métrique auxillaire

Elle est donnée par $\mu_{k,j} := f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_{k,j}(D_{k,j})\ell_j \otimes \ell_j$. où le défaut d'isométrie $D_{k,j}$ vérifie :

$$\begin{aligned} D_{k,j} : &= g_k - f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \sum_{s=1}^3 \rho_{k,s}(D_{k,j})\ell_s \otimes \ell_s, \end{aligned}$$

Par hypothèse $\rho_{k,j}(D_{k,j}) > 0$. Le reste de la procédure est de réduire le défaut d'isométrie de l'immersion courte : $f_{k,j-1} : (\mathbb{T}^2, \mu_{k,j}) \longrightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$.

2. Construction du champ de vecteurs $W_{k,j}$

Il est donné en tout point $p \in \mathbb{T}^2$ par la formule :

$$W_{k,j} = U(j) + \zeta_{k,j}V(j) \quad \text{avec} \quad \zeta_{k,j} := -\frac{f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(V(j), U(j))}{f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(V(j), V(j))}$$

3. Calcul du flot $\varphi_{k,j}$ du champ de vecteurs $W_{k,j}$

4. Construction de la fonction h

Pour tout $p \in \text{Dom}(j)$, $h(p, \cdot) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{E}^3$ vérifie :

$$W_{k,j} \cdot f_{k,j-1}(p) = \int_0^1 h(p, u) du.$$

Explicitement, on a :

$$\begin{aligned} h(p, u) &= r(p) \cos(\alpha(p) \cos(2\pi u)) \mathbf{t}(p) \\ &+ r(p) \sin(\alpha(p) \cos(2\pi u)) \mathbf{n}(p) \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, on a pris

$$\begin{aligned} r : &= \sqrt{\mu_{k,j}(W_{k,j}, W_{k,j})} \\ \mathbf{t} : &= (W_{k,j} \cdot f_{k,j-1}) / \|(W_{k,j} \cdot f_{k,j-1})\| \\ \mathbf{n} : &= W_{k,j} \cdot f_{k,j-1} \wedge V(j) \cdot f_{k,j-1} / \|W_{k,j} \cdot f_{k,j-1} \wedge V(j) \cdot f_{k,j-1}\| \\ \alpha : &= J_0^{-1}(\|(W_{k,j} \cdot f_{k,j-1})\|/r) \end{aligned}$$

5. Construction de $F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}$

il s'agit de l'intégration convexe sur $\text{Dom}(j)$ le long des lignes du flot

6. Le recollement pour avoir la fonction $F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}$ sur le tore

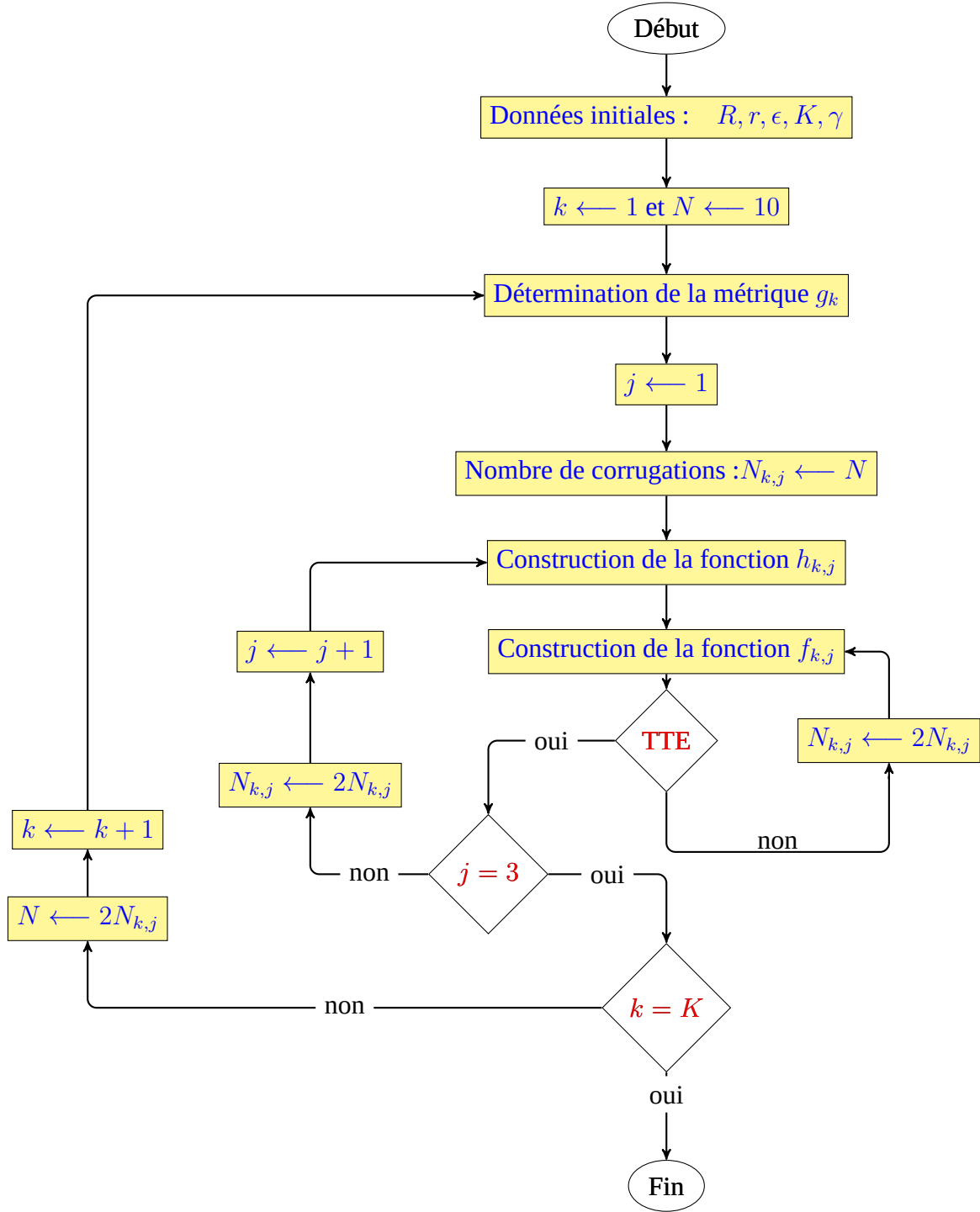
7. Extraction de $f_{k,j}$

Expression de $f_{k,j}$ en coordonnées catésiennes

8. Test et choix des nombres de corrugation

le choix du nombre de corrugation $N_{k,j}$ doit permettre de satisfaire les conclusions du *théorème d'étape bis*.

Nous donnons ci-dessous l'algorithme général de construction des K premières immersions. Dans le schéma ci-dessous, l'acronyme TTE signifie " test du théorème d'étape bis", précisément l'algorithme teste les points *i ii* et *iii* de ce théorème. Le nombre de corrugation initial sera initialisé à $N = 10$.



L'algorithme ci-dessus permet de trouver des nombres d'oscillations suffisamment grands pour lesquels le test TTE est satisfait. En pratique, on modifie légèrement cet algorithme de manière à trouver par dichotomie les plus petits nombres d'oscillations pour lesquels le test TTE est satisfait.

CHAPITRE 5 : Implémentation

Dans ce chapitre, nous présentons des techniques mathématiques et informatiques utilisées pour l'implémentation de l'algorithme présenté au chapitre IV et pour la visualisation du plongement isométrique d'un tore carré plat dans l'espace $\mathbb{E}^3$.

Pour réaliser cette implémentation, nous avons besoin d'encoder les immersions qui sont des ap-

plications du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ dans l'espace euclidien de dimension trois. D'autre part, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent nous avons besoin de calculer des dérivées, inverser la fonction J_0 , calculer des intégrales, inverser des flots et aussi calculer des supremum. Il est alors nécessaire de discrétiser les immersions. Nous avons choisi de le faire en utilisant des grilles carrées qui échantillonnent $[0, 1] \times [0, 1]$: les trois coordonnées d'une immersion f sont évaluées et stockées uniquement aux noeuds de la grille $(i/n, j/n)$ avec $0 \leq i, j < n$. Les coordonnées en d'autres points sont alors obtenues par interpolation.

Comme le plongement C^1 -isométrique de notre tore plat est le résultat d'un processus itératif infini (numériquement inaccessible), et puisqu'il n'y a aucune formule ni explicite ni implicite pour la limite, nous avons effectivement calculé une approximation de cette limite. En pratique, l'application de quatre corrugations successives sur un tore initial (non isométrique) donne visuellement des résultats satisfaisants et au-delà de ces quatre intégrations les oscillations deviennent indiscernables à l'œil nu.

Ce chapitre est divisé en plusieurs paragraphes. Nous traitons successivement la manière dont les applications continues sont codées comme des grilles discrètes dans l'ordinateur ainsi que le choix de la méthode d'interpolation surfacique mise en oeuvre. Nous expliquons comment est calculé numériquement le flot du champ de vecteurs $W_{k,j}$ nécessaire pour chaque corrugation. Sont traitées ensuite l'intégration convexe discrétisée et le choix de l'immersion initiale. Nous expliquerons comment choisir le paramètre principal du processus d'intégration convexe, c'est-à-dire le nombre d'oscillations. Nous terminons ce chapitre par une étude locale.

Pour la programmation nous avons utilisé le langage C++ avec les trois bibliothèques suivantes :

- la bibliothèque Blitz++ pour le calcul matriciel : les matrices permettent d'encoder les immersions.
- le code DOPRI5 (de Hairer) pour le calcul des flots et intégrales.
- OpenMP pour le parallélisme.

CHAPITRE 6 : Les images

Nous rassemblons dans ce chapitre qui clôt ce travail de thèse un ensemble d'images numériques obtenues au moyen de l'implémentation de notre algorithme. En particulier nous présentons les premières images d'un plongement isométrique du tore carré plat dans l'espace tridimensionnel. Rappelons une nouvelle fois que seules les quatre premières intégrations convexes ont été réalisées par le programme : la décroissance des amplitudes est telle que les corrugations suivantes sont invisibles à l'œil nu. Nous complétons ces images du tore par des images locales qui permettent de voir la décroissance des amplitudes sur une succession d'une dizaine de corrugations.

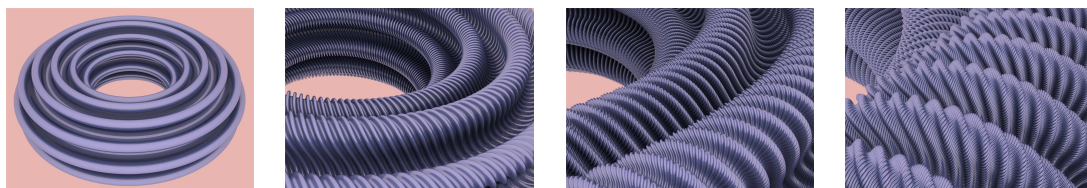


FIGURE 13 – Les quatre premières corrugations.

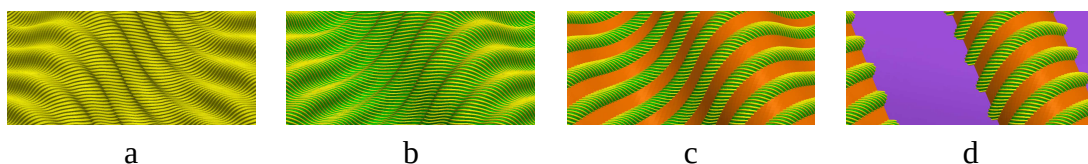


FIGURE 14 – Zooms et superposition des quatre premières corrugations.

a : zoom sur la quatrième corrugation. *b* : superposition de la quatrième et troisième corrugation

c : superposition de la quatrième, troisième et deuxième corrugation. *d* : superposition des quatre corrugations

0.3 Perspectives

Dans un futur proche il faudra étudier la régularité de l'isométrie obtenue à la limite. Borisov a conjecturé le type de régularité maximale auquel on peut s'attendre. Techniquement, il est énoncé que l'isométrie peut être de classe $C^{1,\alpha}$, avec α aussi proche qu'on le souhaite de la valeur $1/2$. Cette conjecture reste discutée, d'autres valeurs plus petites ayant également été proposées ($1/7$ par exemple). Quoiqu'il en soit, il serait extrêmement intéressant de connaître la régularité des isométries construites avec l'intégration convexe. Celle-ci donnera-t-elle des isométries avec le degré maximal de régularité ? Pour le savoir, il faut non seulement contrôler la convergence C^0 et C^1 de la suite d'applications obtenues avec l'intégration convexe, mais il faut également estimer la façon dont cette suite d'applications diverge au sens C^2 . Plus ces contrôles et ces estimations seront fins, plus la régularité de l'application limite sera connue avec précision.

La technique d'intégration convexe s'applique au delà de la visualisation de tores plats. Elle est utilisée de manière théorique dans la détermination de solutions atypiques d'équations aux dérivées partielles. En montrant que l'intégration convexe peut être implémentée, ces résultats ouvrent des perspectives en mathématiques appliquées, notamment pour la résolution d'équations différentielles.

Les images obtenues révèlent l'existence d'une classe d'objets dont la structure est intermédiaire entre les surfaces lisses et les fractales. De tels objets pourraient jouer un rôle centrale dans l'analyse de la géométrie des formes.

Chapitre 1

Le théorème de Nash-Kuiper et l'intégration convexe 1-dimensionnelle

1.1 Introduction

Le théorème de Nash-Kuiper affirme l'existence de plongements isométriques C^1 de variétés riemanniennes dans l'espace euclidien. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre au cas des plongements isométriques des courbes dans le plan. Notre objectif est de comprendre dans ce cadre simple la façon dont s'articule la démonstration de Nash-Kuiper et particulièrement d'étudier en détail l'effet des intégrations convexes nécessaires à la construction du plongement isométrique. Plus encore, elle nous permettra de choisir avec pertinence, l'ingrédient fondamental de la méthode d'intégration convexe, à savoir, le lacet le long duquel s'effectue l'intégration.

1.2 Lemmes fondamentaux de l'intégration convexe

Nous commençons par rappeler deux lemmes fondamentaux de l'intégration convexe.

Notation.— Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in A$. On désigne par $\text{IntConv}(A, a)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe par arcs contenant a .

Définition 1.2.0.1. Un lacet $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(0) = g(1)$ entoure strictement $z \in \mathbb{R}^n$ si

$$\text{IntConv}(g([0, 1])) \supset \{z\}.$$

Lemme 1 (Lemme fondamental). Soient $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $\sigma \in \mathcal{R}$ et $z \in \text{IntConv}(\mathcal{R}, \sigma)$. Il existe un lacet $h : [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathcal{R}$ basé en σ entourant strictement z et tel que :

$$z = \int_0^1 h(s) ds.$$

Démonstration.— Elle est classique. Voir [6]. □

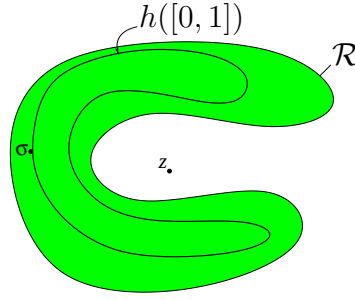


FIGURE 1.1 – Exemple de relation différentielle

Lemme 2 (Lemme fondamental : version paramétrique). Soient P une variété compacte, $E = P \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} P$ un fibré trivial, $\mathcal{R} \subset E$ une partie telle que

$$\forall p \in P, \quad \mathcal{R}_p := \pi^{-1}(p) \cap \mathcal{R} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n.$$

Soient encore $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ et $z \in \Gamma(E)$ tel que :

$$\forall p \in P, \quad z(p) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_p, \sigma(p)).$$

Alors il existe $h : [0, 1] \xrightarrow{C^0} \Gamma(\mathcal{R})$ avec $h(0) = h(1) = \sigma$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad z(p) = \int_0^1 h(s, p) ds.$$

Démonstration.— Voir [6]. □

On peut imposer à l'application h d'être de classe C^∞ comme nous allons le voir dans le lemme ci-dessus :

Lemme 3 (Lemme fondamental : version paramétrique C^∞). Soient P une variété compacte, $E = P \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} P$ un fibré trivial, $\mathcal{R} \subset E$ une partie telle que

$$\forall p \in P, \quad \mathcal{R}_p := \pi^{-1}(p) \cap \mathcal{R} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n$$

Soient encore $\sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{R})$ et $z \in \Gamma^\infty(E)$ tel que :

$$\forall p \in P, \quad z(p) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_p, \sigma(p)).$$

Alors il existe $h : [0, 1] \xrightarrow{C^\infty} \Gamma^\infty(\mathcal{R})$ avec $h(0) = h(1) = \sigma$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad z(p) = \int_0^1 h(s, p) ds.$$

Démonstration.— Soit $(\rho_\epsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R})_{\epsilon > 0}$ une suite de fonctions régularisantes. Pour tout $p \in P$, on définit une application C^∞ par

$$\begin{aligned} h_\epsilon(p, \cdot) : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (h(p, \cdot) * \rho_\epsilon)(t). \end{aligned}$$

Posons

$$z_\epsilon(p) := \int_0^1 h_\epsilon(p, t) dt$$

et soit $H_\epsilon : P \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par

$$H_\epsilon(p, t) := h_\epsilon(p, t) + z(p) - z_\epsilon(p).$$

On a

$$\int_0^1 H_\epsilon(p, t) dt = z(p)$$

et pour un choix suffisamment petit de ϵ l'application $t \longmapsto H_\epsilon(p, t)$ est à valeur dans $\mathcal{R}_p$. La compacité de P permet de choisir ϵ indépendamment de $p \in P$. $\square$

1.3 C^0 -densité

Dans ce paragraphe, nous donnons une version quantitative de la C^0 -densité. On montre qu'elle est en $O(1/N)$ où N est le nombre d'oscillations.

Proposition 1.3.1. *Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe par arcs et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f_0 \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ est telle que*

$$f'_0(I) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R})$$

alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $F \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$F'(I) \subset \mathcal{R} \text{ et } \|F - f_0\|_{C^0} < \epsilon$$

Démonstration.— Soit $\epsilon > 0$ et $f_0 \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $f'_0(I) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R})$. D'après le lemme fondamental, version lisse, il existe $h : I \times \mathbb{E}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\forall t \in I, \quad f'_0(t) = \int_0^1 h(t, u) du.$$

Définissons $F \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ par

$$F(t) := f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns) ds$$

où N est un entier naturel non nul. D'une part, en dérivant, on obtient :

$$F'(t) = h(t, Nt) \in \mathcal{R}$$

et par conséquent, l'application F est donc solution de la relation différentielle $\mathcal{R}$. D'autre part

$$\begin{aligned}
 F(t) - f_0(t) &= f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns) ds - f_0(t) \\
 &= \int_0^t h(s, Ns) ds - (f_0(t) - f_0(0)) \\
 &= \int_0^t h(s, Ns) ds - \int_0^t f'_0(s) ds \\
 &= \int_0^t h(s, Ns) ds - \int_0^t \left(\int_0^1 h(s, u) du \right) ds \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^t (h(s, Ns) - h(s, u)) ds \right) du \\
 &= \frac{1}{N} \int_0^1 \left(\int_0^{Nt} \left(h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
 &= \frac{1}{N} \int_0^1 \left(\int_0^{[Nt]} \left(h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
 &\quad + \frac{1}{N} \int_0^1 \left(\int_{[Nt]}^{Nt} \left(h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du
 \end{aligned}$$

Avec des notations évidentes, posons

$$F(t) - f_0(t) = A + B$$

Nous allons traiter chacun de ces deux termes.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{N} \int_0^1 \left(\int_0^{[Nt]} \left(h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left(\int_k^{k+1} \left(h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left(\int_k^{k+1} \left(h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(h\left(\frac{s+k}{N}, s+k\right) - h\left(\frac{s+k}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(h\left(\frac{s+k}{N}, s\right) - h\left(\frac{s+k}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^1 \left(h\left(\frac{s+k}{N}, s\right) - h\left(\frac{k}{N}, s\right) \right) ds du \\
&\quad - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^1 \left(h\left(\frac{s+k}{N}, u\right) - h\left(\frac{k}{N}, u\right) \right) ds du \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^1 \left(h\left(\frac{k}{N}, s\right) - h\left(\frac{k}{N}, u\right) \right) ds du \\
&= C - D + E
\end{aligned}$$

Le dernier terme est nul (s et u jouent des rôles symétriques). Les termes C et D vérifient les relations suivantes :

$$\|C\| \leq \frac{1}{2N} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0} \quad \text{et} \quad \|D\| \leq \frac{1}{2N} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\|A\| &\leq \|C\| + \|D\| \\
&\leq \frac{1}{N} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0}
\end{aligned}$$

Quant au terme B , il vérifie

$$\|B\| \leq \frac{2}{N} \|h\|_{C^0}$$

et donc finalement :

$$\|F - f_0\|_{C^0} \leq \frac{2}{N} \left(\|h\|_{C^0} + \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0} \right).$$

Ce majorant peut être rendu arbitrairement petit en choisissant N suffisamment grand. $\square$

Remarque.— Même si $f_0(0) = f_0(1)$, l'application F construite par intégration convexe ne vérifie pas en général $F(0) = F(1)$. On peut néanmoins adapter le procédé de l'intégration convexe pour construire des solutions f telles que $f(0) = f(1)$.

Proposition 1.3.2. Soient $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe par arcs et $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$f'_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R}).$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$f'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathcal{R} \text{ et } \|f - f_0\|_{C^0} < \epsilon$$

Démonstration.— Reprenons $F \in C^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ construite grâce à la première proposition et, pour tout $t \in [0, 1]$, définissons f par

$$\begin{aligned} f(t) &:= F(t) - t(F(1) - F(0)) \\ &= f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns)ds - t \int_0^1 h(s, Ns)ds \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient :

$$\forall t \in [0, 1] \text{ , } f'(t) = F'(t) - (F(1) - F(0)) .$$

Désignons par δ le réel strictement positif défini par :

$$\delta = \text{dist}(F'[0, 1], \mathcal{R}^c)$$

et choisissons N tel que

$$\|F(1) - F(0)\| < \frac{\delta}{2}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|f' - F'\|_{C^0} &= \|F(1) - F(0)\| \\ &= \|F(1) - f_0(0)\| \\ &= \|F(1) - f_0(1)\| \\ &< \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathcal{R}$. On a :

$$d(x, f'[0, 1]) \geq |d(x, F'[0, 1]) - d(f'[0, 1], F'[0, 1])|$$

Or $d(x, f'[0, 1]) \geq \delta$ et $d(f'[0, 1], F'[0, 1]) \leq \frac{\delta}{2}$ donc

$$d(x, f') \geq \frac{\delta}{2}.$$

On en déduit $d(\mathcal{R}^c, f'[0, 1]) > 0$, c'est-à-dire

$$f'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathcal{R}.$$

L'application f est donc bien solution de la relation différentielle. En outre, de l'égalité

$$f(t) = F(t) - t(F(1) - F(0))$$

on déduit :

$$\|f - f_0\|_{C^0} \leq \|F - f_0\|_{C^0} + \|F(1) - F(0)\| \leq 2 \|F - f_0\|_{C^0} .$$

□

Remarque 1.— Dans les deux propositions précédentes, les paramètres libres de la construction de la solution de la relation différentielle sont la famille de lacets $(h(p, \cdot))_{p \in P}$ et le choix du nombre d'oscillations N .

Remarque 2.— Evidemment, les propositions 1 et 2 ont des analogues “à paramètres”.

1.4 Nash-Kuiper en dimension 1

Dans les lignes qui suivent, on va appliquer la démonstration de Nash-Kuiper pour construire des immersions isométriques de courbes dans le plan. Le but de cette construction n'est évidemment pas de montrer l'existence de telles isométries (qui est un fait banal) mais plutôt la détermination la plus judicieuse possible de la famille de chemins nécessaire à la construction des immersions isométriques au moyen de l'intégration convexe.

1.4.1 Le procédé de Nash-Kuiper

Commençons par rappeler une définition qui sera utile tout au long de ce travail :

Définition 1.4.1.1. Soit (M, g) une variété riemannienne. On dit qu'une application

$$f : (M, g) \longrightarrow \mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$$

est strictement courte si le champ de formes bilinéaires symétriques

$$\Delta := g - f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

définit une métrique sur M .

Soit $f_0 : \mathbb{E}/\mathbb{Z} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{E}^2 \simeq \mathbb{C}$ un plongement strictement court. La démonstration de Nash-Kuiper construit, à partir de f_0 , une famille de plongements $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers un plongement isométrique et où, à chaque étape, l'application f_k résout une relation différentielle $\mathcal{R}_k$. Détaillons ce procédé dans un cas où, pour simplifier, on suppose en outre que f_0 satisfait aux deux hypothèses ci-dessus :

- (H_1) : f_0 est paramétrée à vitesse constante,
- (H_2) : f_0 est radialement symétrique.

L'hypothèse (H_1) :

$$\forall t \in \mathbb{E}/\mathbb{Z}, \quad \|f'_0(t)\| = r_0$$

implique que

$$\Delta = (1 - r_0^2) \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

et puisque f_0 est strictement courte, $r_0 < 1$. L'hypothèse (H_2) signifie que

$$\forall t \in \mathbb{E}/\mathbb{Z}, \quad f'_0(t + 1/2) = -f'_0(t).$$

Soit $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite de métriques définie par

$$g_k := f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2} + \delta_k \Delta$$

où $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante de nombres réels strictement positifs de limite 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$r_k := \sqrt{g_k(\partial_t, \partial_t)} = \sqrt{\delta_k + (1 - \delta_k)r_0^2}.$$

Désignons par $\mathcal{C}_k$ le cercle de $\mathbb{E}^2$ de centre l'origine et de rayon r_k défini ci-dessus et par $\mathcal{R}_k$ un épaississement de $\mathcal{C}_k$, c'est-à-dire une couronne ouverte. On suppose que les épaississements sont choisis de façon à ce que

$$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*, \quad k_1 \neq k_2 \quad ; \quad \mathcal{R}_{k_1} \cap \mathcal{R}_{k_2} = \emptyset.$$

Au moyen de l'intégration convexe, on va construire une suite d'applications $f_k : \mathbb{E}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{E}^2$ telles que

- f_k est solution de $\mathcal{R}_k$
- $\sum \|f_k - f_{k-1}\|_{C^1} < +\infty$.

Ainsi

$$f_{iso} := \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k$$

la limite C^1 des f_k , sera l'isométrie recherchée. Pour rendre complètement explicite la construction des f_k , il est nécessaire de déterminer à chaque étape la famille de lacets h_k choisie pour définir f_k . On pose :

$$\begin{aligned} h_k : [0, 1] \times \mathbb{E}/\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathcal{C}_k \subset \mathcal{R}_k \subset \mathbb{C} \\ (t, u) &\longmapsto h_k(t, u) \end{aligned}$$

où

$$h_k(t, u) := r_k e^{i\psi_k(t, u)} t_{k-1}(t)$$

avec

$$t_{k-1} := \frac{f'_{k-1}}{\|f'_{k-1}\|}$$

et $\psi_k : [0, 1] \times \mathbb{E}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application telle que

$$\int_0^1 e^{i\psi_k(t, u)} du = \frac{\|f'_{k-1}(t)\|}{r_k}.$$

Cette condition implique bien sûr que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'_{k-1}(t) = \int_0^1 h_k(t, u) du.$$

L'expression explicite de ψ_k sera déterminée ultérieurement. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose enfin

$$f_k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{E}^2$$

définie par

$$f_k(t) := f_{k-1}(0) + \int_0^t h_k(s, N_k s) ds.$$

où $N_k \in 2\mathbb{N}^*$ est un paramètre libre de la construction.

Lemme 4. Soit f_0 satisfaisant à l'hypothèse (H_1) alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f_k satisfait à (H_1) .

Démonstration.— Par récurrence. Supposons que :

$$\forall j \in \{0, \dots, k-1\}, \text{ les } f_j \text{ vérifient } (H_1) \text{ et } (H_2).$$

On a

$$\begin{aligned} f_k(t) &= f_{k-1}(0) + \int_0^t h_k(s, N_k s) ds \\ &= f_{k-1}(0) + \int_0^t r_k e^{i\psi_k(N_k s)} t_{k-1}(s) ds \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient

$$f'_k(t) = r_k e^{i\psi_k(N_k t)} t_{k-1}(t)$$

et par conséquent $\|f'_k(t)\| = r_k$. Ainsi f_k satisfait à (H_1) . □

Observation.— La condition que doit satisfaire ψ_k s'écrit maintenant

$$\int_0^1 e^{i\psi_k(t,u)} du = \frac{r_{k-1}}{r_k}.$$

Cette condition étant indépendante de t , on suppose désormais que ψ_k est une fonction de u seulement i. e. $\psi_k : \mathbb{E}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Lemme 5. Soit f_0 satisfaisant aux hypothèses (H_1) et (H_2) , alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f_k satisfait à (H_1) et (H_2) .

Démonstration.— Il suffit de montrer que (H_2) est héréditaire. On a

$$f'_k\left(t + \frac{1}{2}\right) = r_k e^{i\psi_k(N_k(s + \frac{1}{2}))} t_{k-1}\left(s + \frac{1}{2}\right) ds.$$

Or $N_k \in 2\mathbb{N}^*$ et ψ_k est 1-périodique on a donc :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \psi_k\left(N_k\left(s + \frac{1}{2}\right)\right) = \psi_k(N_k s).$$

Par hypothèse de récurrence

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad t_{k-1}\left(s + \frac{1}{2}\right) = -t_{k-1}(s).$$

Au bilan

$$f'_k\left(t + \frac{1}{2}\right) = -f'_k(t).$$

□

Remarque.— Notons que sous les hypothèses (H_1) et (H_2) on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|t_k\| = 1 \text{ et } \|h_k\| = r_k.$$

Lemme 6. Les applications $f_k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{E}^2$ passent au quotient en des applications $f_k : \mathbb{E}/\mathbb{Z} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{E}^2$.

Démonstration.— On a

$$f_k(1) - f_k(0) = f_k(1) - f_{k-1}(0) = \int_0^1 h_k(s, Ns) ds$$

et l'on vient de constater que

$$h_k(s + \frac{1}{2}, N(s + \frac{1}{2})) = -h_k(s, Ns)$$

ainsi

$$\int_0^1 h_k(s, Ns) ds = 0.$$

Il est trivial de vérifier par récurrence que

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad f_k^{(j)}(1) = f_k^{(j)}(0).$$

□

1.4.2 Choisir ψ_k

Lemme 7. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$r_k \text{scal}_k(t) = N_k \psi'_k(N_k t) + r_{k-1} \text{scal}_{k-1}(t)$$

où $\text{scal}_k(t)$ désigne la courbure scalaire de f_k en t .

Démonstration.— On a

$$\begin{aligned} f'_k(t) &= r_k e^{i\psi_k(N_k t)} t_{k-1}(t) \\ &= \frac{r_k}{r_{k-1}} e^{i\psi_k(N_k t)} f'_{k-1}(t) \end{aligned}$$

d'où, en dérivant deux fois

$$f''_k(t) = \frac{r_k}{r_{k-1}} (i N_k \psi'_k(N_k t) f'_{k-1}(t) + f''_{k-1}(t)) e^{i\psi_k(N_k t)}$$

or

$$f''_{k-1}(t) = i \|f'_{k-1}(t)\| \text{scal}_{k-1}(t) f'_{k-1}(t) = i r_{k-1} \text{scal}_{k-1}(t) f'_{k-1}(t)$$

donc

$$f''_k(t) = \frac{r_k}{r_{k-1}} (N_k \psi'_k(N_k t) + r_{k-1} \text{scal}_{k-1}(t)) i e^{i\psi_k(N_k t)} f'_{k-1}(t).$$

Mais puisque

$$\begin{aligned} f''_k(t) &= i r_k \text{scal}_k(t) f'_k(t) \\ &= i r_k \text{scal}_k(t) \frac{r_k}{r_{k-1}} e^{i\psi_k(N_k t)} f'_{k-1}(t) \end{aligned}$$

on en déduit

$$r_k \text{scal}_k(t) = N_k \psi'_k(N_k t) + r_{k-1} \text{scal}_{k-1}(t).$$

□

Choix de ψ_k .— Puisque $u \mapsto \psi_k(u)$ est 1-périodique on peut donc écrire

$$\psi_k(u) = a_0 + \sum_{l=1}^{+\infty} a_l \cos(2\pi l u) + \sum_{l=1}^{+\infty} b_l \sin(2\pi l u)$$

Pour tout $u \in \mathbb{E}/\mathbb{Z}$ on pose

$$\psi_k(u) := \alpha_k \cos(2\pi u).$$

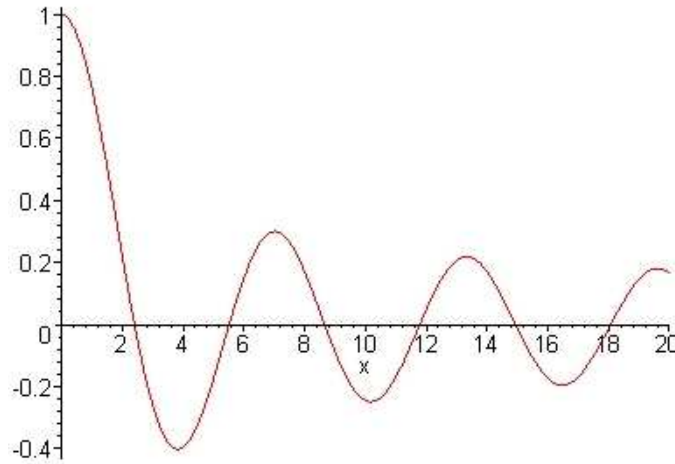
Ainsi, dans la série de Fourier ci-dessus, tous les coefficients sont choisis nuls sauf un. Il reste ensuite à déterminer α_k pour avoir

$$\int_0^1 e^{i\psi_k(u)} du = \frac{r_{k-1}}{r_k}.$$

Or

$$\int_0^1 e^{i\alpha_k \cos 2\pi u} du = J_0(\alpha_k)$$

où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.



La fonction de Bessel J_0 , $\lambda_0(1) \approx 2.4$

Cette fonction réalise une bijection de $[0, \lambda_0(1)]$ sur $[0, 1]$ où $\lambda_0(1)$ est le premier zéro strictement positif de J_0 . Notons, (un peu abusivement !) $J_0^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, \lambda_0(1)]$ sa réciproque. On pose

$$\alpha_k := J_0^{-1} \left(\frac{r_{k-1}}{r_k} \right).$$

Proposition 1.4.1 (Bilan). Soit $f_0 : \mathbb{E}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{E}^2$ un plongement court vérifiant (H1) et (H2) et soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*} : \mathbb{E}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{E}^2 \simeq \mathbb{C}$ la suite d'applications définies récursivement par

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_k(t) = f_{k-1}(0) + \int_0^t \frac{r_k}{r_{k-1}} e^{i\alpha_k \cos(2\pi N_k s)} f'_{k-1}(s) ds$$

avec

$$r_k = \sqrt{\delta_k + (1 - \delta_k)r_0^2}, \quad \alpha_k = J_0^{-1} \left(\frac{r_{k-1}}{r_k} \right)$$

et $N_k \in 2\mathbb{N}^*$ arbitraires. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\|f_k - f_{k-1}\|_{C^0} \leq \frac{2}{N_k} (\|f'_{k-1}\|_{C^0} + \|f''_{k-1}\|_{C^0})$$

et, pour tout $t \in \mathbb{E}/\mathbb{Z}$,

$$r_k \text{scal}_k(t) = r_0 \text{scal}_0(t) - 2\pi \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l N_l \sin(2\pi N_l t).$$

1.5 Le lemme d'amplitude

Il s'avère que le comportement de la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dépend principalement de celui de la suite des $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Lemme 8 (lemme d'amplitude). *On a*

$$\alpha_k \sim \sqrt{2\Delta(\partial_t, \partial_t)} \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}}.$$

Remarque.— Rappelons que $\Delta(\partial_t, \partial_t) = 1 - r_0^2$.

Démonstration.— Par définition $\alpha_k = J_0^{-1}(\frac{r_{k-1}}{r_k})$. Le développement de Taylor de $J_0(\alpha)$ à l'ordre 2 est donné par

$$\xi = 1 - \frac{\alpha^2}{4} + o(\alpha^2).$$

Soient $y = 1 - \xi$ et $X = \alpha^2$, on a $y = \frac{X}{4} + o(X)$ ainsi $X = 4y + o(y)$ et par conséquent $X \sim 4y$. Finalement, on obtient

$$\alpha \sim 2\sqrt{1 - \xi} \quad \text{and} \quad \alpha_k \sim 2\sqrt{1 - \frac{r_{k-1}}{r_k}}.$$

Puisque $\|f'_0\|_{\mathbb{E}^2}^2 + \Delta(\partial_t, \partial_t) = 1$, on a

$$r_k^2 = \|f'_0\|_{\mathbb{E}^2}^2 + \delta_k \Delta(\partial_t, \partial_t) = 1 + (\delta_k - 1)\Delta(\partial_t, \partial_t)$$

ainsi

$$r_k^2 - r_{k-1}^2 = (\delta_k - \delta_{k-1})\Delta(\partial_t, \partial_t)$$

et

$$1 - \frac{r_{k-1}^2}{r_k^2} = \frac{(\delta_k - \delta_{k-1})\Delta(\partial_t, \partial_t)}{1 - (1 - \delta_k)\Delta(\partial_t, \partial_t)} \sim (\delta_k - \delta_{k-1})\Delta(\partial_t, \partial_t).$$

Or

$$1 - \frac{r_{k-1}^2}{r_k^2} = \left(1 - \frac{r_{k-1}}{r_k}\right) \left(1 + \frac{r_{k-1}}{r_k}\right) \sim 2 \left(1 - \frac{r_{k-1}}{r_k}\right).$$

donc

$$\left(1 - \frac{r_{k-1}}{r_k}\right) \sim \frac{1}{2}(\delta_k - \delta_{k-1})\Delta(\partial_t, \partial_t).$$

et

$$\alpha_k \sim 2\sqrt{1 - \frac{r_{k-1}}{r_k}} \sim \sqrt{2\Delta(\partial_t, \partial_t)}\sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}}.$$

□

1.6 Régularité C^1 de f_{iso}

Proposition 1.6.1. *On a*

$$\|f'_k - f'_{k-1}\|_{C^0} \leq Cte_1\sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}}$$

où $Cte_1 = \sqrt{7\Delta(\partial_t, \partial_t)}$.

Démonstration.— Pour tout point $t \in \mathbb{E}/\mathbb{Z}$, on a (Pythagore !) :

$$\|f'_k - f'_{k-1}\|^2 = \|f'_k\|^2 + \|f'_{k-1}\|^2 - 2\|f'_k\|\|f'_{k-1}\|\cos(\alpha_k \cos 2\pi N_k t)$$

puisque $\alpha_k \cos(2\pi N_k t)$ est l'angle entre $f'_k(t)$ et $f'_{k-1}(t)$. Evidemment

$$\alpha_k \cos(2\pi N_k t) \leq \alpha_k = J_0^{-1}(w)$$

où $w = u/r \in]0, 1[$, $r = \|f'_k(t)\|$ et $u = \|f'_{k-1}(t)\|$. Et donc

$$\|f'_k - f'_{k-1}\|^2 \leq \|f'_k\|^2 + \|f'_{k-1}\|^2 - 2\|f'_k\|\|f'_{k-1}\|\cos \alpha_k.$$

La série de Taylor de $\alpha \mapsto J_0(\alpha)$ est alternée ainsi

$$w \leq 1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^4}{64} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{8}\right)^2$$

d'où

$$\frac{\alpha^2}{2} \leq 4(1 - \sqrt{w}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|f'_k - f'_{k-1}\|^2 &\leq r^2 + u^2 - 2ur \cos \alpha \\ &\leq r^2 - u^2 + 2u(u - r \cos \alpha). \end{aligned}$$

Puisque

$$\cos \alpha \geq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

on a

$$\begin{aligned} u(u - r \cos \alpha) &\leq u^2 - ru + ur \frac{\alpha^2}{2} \\ &\leq u^2 - ru + 4ur \left(1 - \sqrt{\frac{u}{r}}\right) \\ &\leq u^2 + 3ur - 4u\sqrt{ru} \\ &\leq u^2 + 3r^2 - 4u\sqrt{u^2} \quad (\text{car } u < r) \\ &\leq 3(r^2 - u^2). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|f'_k - f'_{k-1}\|^2 \leq 7 (\|f'_k\|^2 - \|f'_{k-1}\|^2).$$

Or

$$\begin{aligned} \|f'_k\|^2 - \|f'_{k-1}\|^2 &= g_k(\partial_t, \partial_t) - g_{k-1}(\partial_t, \partial_t) \\ &= (g_k - g_{k-1})(\partial_t, \partial_t). \end{aligned}$$

donc

$$\|f'_k - f'_{k-1}\|_{C^0} \leq Cte_1 \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}}$$

avec $Cte_1 = \sqrt{7\Delta(\partial_t, \partial_t)}$. □

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par

$$\forall t \in \mathbb{E}/\mathbb{Z}, \quad A_k(t) := \sum_{l=1}^k \alpha_l \cos(2\pi N_l t).$$

Lemme 9. Pour tout $t \in \mathbb{E}/\mathbb{Z}$, on a

$$f'_k(t) = e^{iA_k(t)} \frac{r_k}{r_0} f'_0(t).$$

Démonstration.— Immédiat à partir de l'expression

$$f'_k(t) = r_k e^{i\alpha_k \cos(2\pi N_k t)} \frac{1}{r_{k-1}} f'_{k-1}(t).$$

□

Proposition 1.6.2. Si

$$\sum \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} < +\infty$$

alors la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge C^1 vers $f_{iso} := \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k$ et

$$\forall t \in \mathbb{S}^1, \quad f'_{iso}(t) = e^{iA(t)} \frac{1}{r_0} f'_0(t).$$

Démonstration.— On déduit immédiatement de la proposition 3 que la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est C^1 -convergente vers f_{iso} . On déduit du lemme d'amplitude que

$$\sum \alpha_k < +\infty.$$

Par conséquent la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge normalement et

$$A := \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$$

est continue. La relation

$$f'_k(t) = e^{iA_k(t)} \frac{r_k}{r_0} f'_0(t)$$

permet de conclure que

$$f'_{iso} = e^{iA} \frac{1}{r_0} f'_0.$$

□

Corollaire 1. Soit $\gamma > 0$ et

$$\delta_k := 1 - e^{-\gamma(k+1)}.$$

Alors la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et converge vers 1, de plus

$$\sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} \sim \sqrt{\delta_0} e^{-\frac{\gamma}{2}k}.$$

En particulier, $f_{iso} = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ est C^1 .

Avertissement.— A partir de maintenant, on suppose que

$$\sum \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} < +\infty.$$

Proposition 1.6.3. Si $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \alpha_k N_k < +\infty$ alors f_{iso} est partout C^2 et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k'' = f_{iso}''.$$

Démonstration.— Puisque l'on suppose $\sum \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} < +\infty$, et d'après la proposition 4, la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge C^1 . Il suffit donc de montrer que $(f_k'')_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. De

$$f_k''(t) = ir_k \text{scal}_k(t) f_k''(t)$$

on tire

$$\begin{aligned} \|f_k''(t) - f_{k-1}''(t)\| &\leq \|r_k \text{scal}_k(t) f_k'(t) - r_{k-1} \text{scal}_{k-1}(t) \partial f_{k-1}'(t)\| \\ &\leq \|r_{k-1} \text{scal}_{k-1}(t) f_k'(t) - r_{k-1} \text{scal}_{k-1}(t) f_{k-1}'(t)\| \\ &\quad + |r_k \text{scal}_k(t) - r_{k-1} \text{scal}_{k-1}(t)| \|f_k'(t)\| \\ &\leq r_{k-1} |\text{scal}_{k-1}(t)| \|f_k'(t) - f_{k-1}'(t)\| \\ &\quad + r_k |r_k \text{scal}_k(t) - r_{k-1} \text{scal}_{k-1}(t)|. \end{aligned}$$

D'après la proposition-bilan, pour tout $t \in \mathbb{E}/\mathbb{Z}$ on a

$$r_k \text{scal}_k(t) = r_0 \text{scal}_0(t) - 2\pi \sum_{l=1}^k \alpha_l N_l \sin(2\pi N_l t)$$

d'où

$$|r_k \text{scal}_k(t) - r_{k-1} \text{scal}_{k-1}(t)| \leq 2\pi \alpha_k N_k$$

et

$$r_k |\text{scal}_k(t)| \leq r_0 |\text{scal}_0(t)| + 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \alpha_k N_k.$$

Ainsi, $r_k |\text{scal}_k(t)|$ est majoré uniformément par la constante M donnée par

$$M := \|r_0 \text{scal}_0\|_{C^0} + 2\pi \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \alpha_k N_k.$$

Par conséquent

$$\|f_k'' - f_{k-1}''\|_{C^0} \leq M \|f_k' - f_{k-1}'\|_{C^0} + 2\pi \alpha_k N_k.$$

Soit $p < q$, on a donc

$$\begin{aligned} \|f_q'' - f_p''\|_{C^0} &\leq M \sum_{k=p}^q \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} + 2\pi \sum_{k=p}^q \alpha_k N_k \\ &\leq M \sum_{k=p}^{\infty} \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} + 2\pi \sum_{k=p}^{\infty} \alpha_k N_k. \end{aligned}$$

Ainsi $(f_k'')_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

Proposition 1.6.4. Soient $\eta > 0$ et $S_k := \sum_{l=1}^k \alpha_l N_l$. Si

$$\sum (\delta_k - \delta_{k-1})^{\frac{1-\eta}{2}} S_k^\eta < +\infty$$

alors f_{iso} est $C^{1,\eta}$.

Remarque.— Evidemment ce théorème n'a d'intérêt que si

$$\sum \alpha_l N_l = +\infty.$$

Démonstration.— Soit $0 < \eta < 1$. On va utiliser l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{C^{1,\eta}} \leq C^{te} \|f\|_{C^1}^{1-\eta} \|f\|_{C^2}^\eta$$

pour démontrer que

$$(\|f_k - f_{k-1}\|_{C^{1,\eta}})_{k \in \mathbb{N}^*}$$

est de Cauchy. D'après la proposition 3, on a

$$\|f_k - f_{k-1}\|_{C^1} \leq 2Cte_1 \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}}$$

et

$$\begin{aligned} M_2(f_k - f_{k-1}) &\leq M_2(f_k) + M_2(f_{k-1}) \\ &\leq M_0(r_k \text{ scal}_k) M_1(f_k) + M_0(r_{k-1} \text{ scal}_{k-1}) M_1(f_k) \\ &\leq M_0(\text{scal}_k) + M_0(\text{scal}_{k-1}) \\ &\leq 2M_0(\text{scal}_0) + 4\pi \sum_{l=1}^k \alpha_l N_l \\ &\leq 2M_0(\text{scal}_0) + 4\pi S_k. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|f_k - f_{k-1}\|_{C^2} \leq 2Cte_1 \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} + 2M_0(\text{scal}_0) + 4\pi S_k.$$

Puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = +\infty$, pour k suffisamment grand, on a

$$\|f_k - f_{k-1}\|_{C^2} \leq Cte_2 S_k.$$

où Cte_2 est un nombre quelconque strictement plus grand que 4π . On a maintenant

$$\|f_k - f_{k-1}\|_{C^1}^{1-\eta} \|f_k - f_{k-1}\|_{C^2}^\eta \leq Cte_3 (\delta_k - \delta_{k-1})^{\frac{1-\eta}{2}} S_k^\eta$$

avec $Cte_3 = (2Cte_1)^{1-\eta} Cte_2^\eta$. □

Corollaire 2. Soit $0 < \gamma < 1$ et $\delta_k := 1 - e^{-\gamma(k+1)}$. S'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad N_k \leq N_0 e^{\beta k}$$

alors f_{iso} est $C^{1,\eta}$ pour tout $\eta > 0$ tel que

$$\eta < \frac{\gamma}{2\beta}.$$

Démonstration.— De

$$\delta_k - \delta_{k-1} \sim \delta_0 e^{-\gamma k}$$

et du lemme d'amplitude

$$\alpha_k \sim \sqrt{2\Delta(\partial_x, \partial_x)} \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}}$$

on déduit l'existence d'une constante $Cte_4 > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < \alpha_k \leq Cte_4 e^{-\frac{\gamma}{2}k}.$$

Ainsi

$$0 < N_k \alpha_k \leq Cte_5 e^{\beta - \frac{\gamma}{2}k}.$$

et

$$S_k = \sum_{l=1}^k N_l \alpha_l \leq Cte_5 \sum_{l=1}^k e^{(\beta - \frac{\gamma}{2})l} < Cte_5 e^{\beta - \frac{\gamma}{2}} \frac{1 - e^{\beta - \frac{\gamma}{2}(k+1)}}{1 - e^{\beta - \frac{\gamma}{2}}}$$

On suppose d'abord que $\beta > \frac{\gamma}{2}$. On a alors :

$$S_k \leq Cte_6 e^{(\beta - \frac{\gamma}{2})k}$$

et donc

$$(\delta_k - \delta_{k-1})^{\frac{1-\eta}{2}} S_k^\eta \leq Cte_7 e^{-\gamma \frac{1-\eta}{2}k} e^{\eta(\beta - \frac{\gamma}{2})k}.$$

Or

$$-\gamma \frac{1-\eta}{2} + \eta \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) < 0$$

si et seulement si

$$\eta < \frac{\gamma}{2\beta}.$$

Par conséquent, sous cette dernière condition,

$$\sum (\delta_k - \delta_{k-1})^{\frac{1-\eta}{2}} S_k^\eta < +\infty.$$

D'où le corollaire dans le cas où $\beta > \frac{\gamma}{2}$. Le cas $\beta \leq \frac{\gamma}{2}$ se traite similairement. □

Chapitre 2

Effets métriques de l'intégration convexe

Étant donnée une métrique riemannienne μ sur le tore carré plat $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, notre objectif est de déterminer un plongement quasi-isométrique de $(\mathbb{T}^2, \mu)$ dans l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbb{E}^3$. Ce plongement $f : (\mathbb{T}^2, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$ doit être C^0 -proche d'un plongement initial donné. Comme cela est décrit par la méthode originale de Nash [?] et Kuiper[?], nous supposons ce plongement initial $f_0 : (\mathbb{T}^2, \mu) \rightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$ (C^∞) court. Pour des raisons qui deviendront claires au chapitre III, nous supposons aussi que

$$\mu - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} = \rho \ell \otimes \ell \quad (2.1)$$

pour une certaine fonction positive $\rho : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et une forme linéaire non nulle ℓ sur $\mathbb{E}^2$ décrite ci-dessous. On identifiera tout espace tangent de la variété $\mathbb{T}^2$ avec $\mathbb{E}^2$.

Nous montrons qu'un grand nombre des effets induits par une intégration convexe sont contrôlés par le nombre d'oscillations (le théorème I2C en fin chapitre). La perturbation de la différentielle le long de la direction d'intégration échappe cependant à ce contrôle. Son ampleur dépend de l'erreur initiale à la métrique que l'on souhaite atteindre.

2.1 Notations, domaine fondamental

Soient (∂_x, ∂_y) une base orthonormée directe de $\mathbb{E}^2$, Λ le réseau $\mathbb{Z}\partial_x + \mathbb{Z}\partial_y$ et ℓ une forme linéaire sur $\mathbb{E}^2$. On suppose que $\ker \ell$ contient un élément primitif¹ du réseau Λ et on note ∂_2 un vecteur unitaire du noyau de ℓ . Il existe donc $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{1}{T} \partial_2$ soit primitif. Quitte éventuellement à changer le signe de ℓ , on suppose aussi que

$$\ell = \langle \partial_2^\perp, \cdot \rangle$$

où $\partial_2^\perp$ est le vecteur $\partial_2^\perp = \text{Rot}_{-\frac{\pi}{2}} \partial_2$. Notons que $(\partial_2^\perp, \partial_2)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{E}^2$. Le rectangle déterminé par l'origine O de $\mathbb{E}^2$ et les deux points

$$A := O + \frac{1}{T} \partial_2 \text{ et } B := O + T \partial_2^\perp$$

est un domaine fondamental pour l'action de Λ sur $\mathbb{E}^2$, il est noté Dom .

On note encore $\mathcal{C}$ le cylindre obtenu en identifiant le segment $[OB]$ avec $[AC]$ où $C = A + B$.

1. Rappelons qu'un élément $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ est dit *primitif* s'il existe $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$.

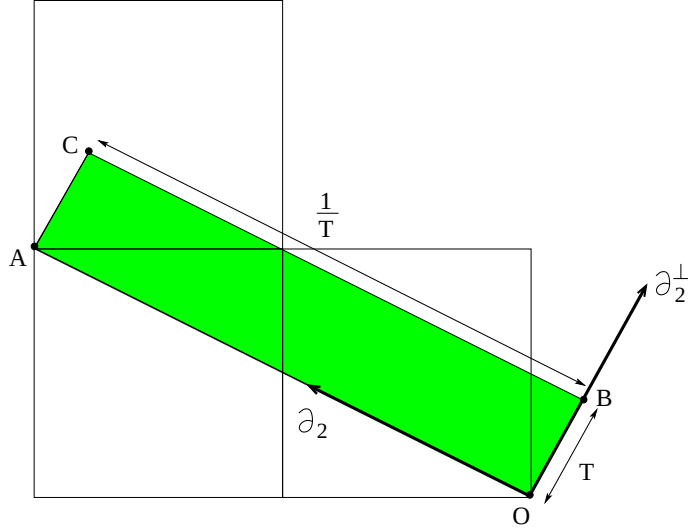


FIGURE 2.1 – Un domaine fondamental. Ici $\partial_2 = \frac{-2\partial_x + \partial_y}{\sqrt{5}}$. Le point $A = O + \sqrt{5}\partial_2$ est l'élément primitif $-2\partial_x + \partial_y \in \Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ et $T = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

2.2 Le cas du cylindre

Soit $f_0 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion de classe C^∞ et $\mu_0 := f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$. On définit une nouvelle métrique μ sur $\mathcal{C}$ en posant :

$$\mu := \mu_0 + \rho \ell \otimes \ell$$

où $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une application de classe C^∞ . Par définition de μ , l'application

$$f_0 : (\mathcal{C}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$$

est une immersion courte² i. e.

$$\mu_0 = f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \leq \mu.$$

On cherche à construire une application

$$H : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

qui soit C^0 -proche de f_0 et telle que

$$\mu \approx H^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

L'expression de cette application va faire intervenir le flot d'un champ de vecteurs ∂_1 défini par

$$\partial_1 := \partial_2^\perp + \sigma \partial_2$$

avec

$$\sigma(x, y) := -\frac{\mu_{(x,y)}(\partial_2, \partial_2^\perp)}{\mu_{(x,y)}(\partial_2, \partial_2)}$$

2. Mais pas strictement courte.

Notons qu'ainsi défini, le champ ∂_1 est μ -orthogonal à ∂_2 :

$$\mu(\partial_1, \partial_2) = 0.$$

Notons également que l'expression de la fonction σ se simplifie en

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= -\frac{f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(\partial_2, \partial_2^\perp) + \ell(\partial_2)\ell(\partial_2^\perp)}{f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(\partial_2, \partial_2^\perp) + \ell(\partial_2)\ell(\partial_2)} \\ &= -\frac{f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(\partial_2, \partial_2^\perp)}{f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(\partial_2, \partial_2)} \end{aligned}$$

car $\ell(\partial_2) = 0$. Soit φ le flot de ∂_1 , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(p, t) = \partial_1 \varphi(p, t) \quad \text{et} \quad \varphi(p, 0) = p \quad \text{où} \quad p \in \mathbb{E}^2.$$

Désignons par (X, Y) les coordonnées de p dans le repère $(O, \partial_2^\perp, \partial_2)$. On a donc $\varphi(p, t) = (X(t), Y(t))$ et

$$\begin{cases} X'(t) = 1 \\ Y'(t) = \sigma(X(t), Y(t)). \end{cases} \quad (2.2)$$

La première équation montre que si $p \in (OA)$ alors, au bout d'un temps T , $\varphi(p, T) \in (BC)$. Bien sûr

$$Dom_\varphi := \{\varphi(p_0, t) \mid p_0 \in [OA], t \in [0, T]\}$$

est un domaine fondamental pour Λ . Définissons alors H en tout point de Dom_φ par

$$H(\varphi(p_0, t)) := f_0(p_0) + \int_0^t h(\varphi(p_0, s), Ns) ds$$

où $p_0 \in [O, A]$, $t \in [0, T]$, N est un entier naturel non nul quelconque et

$$h(p, s) := r(p) \{ \cos(\alpha(p) \cos 2\pi u) \mathbf{t}_0(p) + \sin(\alpha(p) \cos 2\pi u) \mathbf{n}_0(p) \}.$$

Dans cette dernière expression, on a pris

$$\begin{cases} r(p) := \sqrt{\mu_p(\partial_1, \partial_1)} \\ \alpha(p) := J_0^{-1} \left(\frac{\|\partial_1 f_0(p)\|}{r(p)} \right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{t}_0 := \frac{\partial_1 f_0}{\|\partial_1 f_0\|} \\ \mathbf{n}_0 := \frac{\partial_1 f_0 \wedge \partial_2 f_0}{\|\partial_1 f_0 \wedge \partial_2 f_0\|} \\ \mathbf{w}_0 := \frac{\partial_2 f_0}{\|\partial_2 f_0\|} \end{cases}$$

où J_0^{-1} est la réciproque de la fonction de Bessel d'ordre 0 sur $[0, \lambda_0]$, λ_0 étant le premier zéro de J_0 . Le choix de h vérifie bien sûr

$$\begin{aligned} \partial_1 f_0(p) &= \int_0^1 r(p) \{ \cos(\alpha(p) \cos 2\pi u) \mathbf{t}_0(p) + \sin(\alpha(p) \cos 2\pi u) \mathbf{n}_0(p) \} du \\ &= \int_0^1 h(p, u) du. \end{aligned}$$

En effet

$$\int_0^1 h(p, u) du = r(p) \int_0^1 \cos(\alpha(p) \cos 2\pi u) du \mathbf{t}_0(p) + r(p) \int_0^1 \sin(\alpha(p) \cos 2\pi u) du \mathbf{n}_0(p)$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(\alpha(p) \cos 2\pi u) du &= J_0(\alpha(p)) \\ \text{et} \quad \int_0^1 \sin(\alpha(p) \cos 2\pi u) du &= 0, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(p, u) du &= r(p) J_0(\alpha(p)) \mathbf{t}_0(p) \\ &= \partial_1 f_0(p). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.1. *La fonction H définie ci-dessus vérifie les propriétés suivantes :*

- 1) $\|H - f_0\|_{C^0} \leq \frac{1}{N} (1 + \|\sigma\|_{C^0}) \|h\|_{C^1}$
- 2) $\|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} \leq \frac{1}{N} (1 + \|\sigma\| + \|\partial_2 \sigma\|) \|\partial_2 h\|_{C^1} e^{\|\partial_2 \sigma\|}$
- 3) $\|\mu - H^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \leq C \frac{1}{N} (1 + \|\sigma\| + \|\partial_2 \sigma\|) \|\partial_2 h\|_{C^1} e^{\|\partial_2 \sigma\|}$
où C ne dépend que des 1-jets de f_0 de σ et de h ,
- 4) $\|\partial_1 H - \partial_1 f_0\|_{C^0} \leq \sqrt{7} \|\rho\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}.$

Pour la démonstration de cette proposition, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 10. *Pour tout $\alpha \in [0, \lambda_0]$, on a*

$$4J_0^2(\alpha) - J_0(\alpha) \cos(\alpha) \leq 3$$

Démonstration du lemme.– Rappelons que

$$J_0(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$$

Par suite

$$J_0(\alpha) \leq 1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^4}{64}$$

et donc

$$\begin{aligned} 4J_0^2(\alpha) - J_0(\alpha) \cos(\alpha) - 3 &= J_0(\alpha) (4J_0(\alpha) - \cos(\alpha)) \\ &\leq \left(1 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^4}{64}\right) \left(3 + \frac{\alpha^2}{2}\right) - 3 \\ &:= G(\alpha) \end{aligned}$$

En posant $x = \frac{\alpha^2}{4}$, il vient

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= (1 - x + \frac{1}{4}x^2)(3 + 2x) - 3 \\ &= \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - x \\ &= \frac{1}{2}x[(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{33}{4}] \end{aligned}$$

Or ce polynome est negatif si $x \in [0, 3]$ et donc $G(\alpha)$ est negatif si $\alpha \in [0, 2\sqrt{3}]$ □

Démonstration de la proposition.— Nous commençons par le point 4). On a

$$\begin{aligned} \partial_1 H(\varphi(p, t)) &= \frac{\partial}{\partial s} H(\varphi(\varphi(p, t), s)) \big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial H(\varphi(\varphi(p, t), s))}{\partial s} \big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial H(\varphi(p, t + s))}{\partial s} \big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial H(\varphi(p, t))}{\partial t} \\ &= h(\varphi(p, t), Nt) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \|\partial_1 H(\varphi(p, t))\|^2 &= \langle \partial_1 H(\varphi(p, t)), \partial_1 H(\varphi(p, t)) \rangle \\ &= \|h(\varphi(p, t), Nt)\|^2 \\ &= \mu_{\varphi(p, t)}(\partial_1, \partial_1) \\ &= r(\varphi(p, t))^2 \end{aligned}$$

Notons r pour $r(\varphi(p, t))$ et posons $u = \|\partial_1 f_0(\varphi(p, t))\|$. D'après le lemme ci-dessus la fonction G définie par :

$$G(\alpha) = 4J_0^2(\alpha) - J_0(\alpha) \cos(\alpha)$$

définie sur $\mathbb{R}_+$ atteint son maximum en zéro et ce maximum vaut 3 donc

$$4J_0^2(\alpha) - J_0(\alpha) \cos(\alpha) - 3 \leq 0$$

On en déduit

$$1 - 2J_0(\alpha) \cos(\alpha) + J_0^2(\alpha) \leq 7(1 - J_0^2(\alpha))$$

Or

$$J_0(\alpha) = \frac{\|\partial_1 f_0(\varphi(p, t))\|}{r(\varphi(p, t))}$$

Donc :

$$1 - 2 \frac{\|\partial_1 f_0(\varphi(p, t))\|}{r(\varphi(p, t))} \cos(\alpha) + \left(\frac{\|\partial_1 f_0(\varphi(p, t))\|}{r(\varphi(p, t))} \right)^2 \leq 7 - 7 \left(\frac{\|\partial_1 f_0(\varphi(p, t))\|}{r(\varphi(p, t))} \right)^2$$

et en multipliant par r^2 on en déduit :

$$r^2 - 2ru \cos \alpha + u^2 \leq 7(r^2 - u^2)$$

Et par suite, on a :

$$\begin{aligned} \|\partial_1 H - \partial_1 f_0\|^2 &= \|\partial_1 H\|^2 + \|\partial_1 f_0\|^2 - 2\langle \partial_1 H, \partial_1 f_0 \rangle_{\mathbb{E}^3} \\ &= r^2 - u^2 - 2ru \cos(\alpha \cos(2\pi Nt)) \\ &\leq r^2 - u^2 - 2ru \cos \alpha \\ &\leq 7(r^2 - u^2) \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} r^2 - u^2 &= (\mu - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})_{\varphi(p,t)}(\partial_1, \partial_1) \\ &= \rho(\varphi(p, t)) \ell(\partial_1) \ell(\partial_1) \\ &= \rho(\varphi(p, t)) \end{aligned}$$

Finalement

$$\|\partial_1 H - \partial_1 f_0\|_{C^0}^2 \leq 7 \|\rho\|_{C^0}$$

ce qui montre 4).

Passons maintenant au point 1). On a

$$\begin{aligned} H(\varphi(p, t)) - f_0(\varphi(p, t)) &= \int_0^t h(\varphi(p, s), Ns) ds - \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} (f_0(\varphi(p, s))) ds \\ &= \int_0^t h(\varphi(p, s), Ns) ds - \int_0^t \partial_1 f_0(\varphi(p, s)) ds \\ &= \int_0^t h(\varphi(p, s), Ns) ds - \int_0^t \int_0^1 h(\varphi(p, s), u) du ds \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^t (h(\varphi(p, s), Ns) - h(\varphi(p, s), u)) ds \right] du \\ &= \frac{1}{N} \int_0^1 \left[\int_0^{Nt} (h(\varphi(p, \frac{s}{N}), s) - h(\varphi(p, \frac{s}{N}), u)) ds \right] du \\ &= \frac{1}{N} \int_0^1 \left[\int_0^{[Nt]} (h(\varphi(p, \frac{s}{N}), s) - h(\varphi(p, \frac{s}{N}), u)) ds \right] du \\ &\quad + \frac{1}{N} \int_0^1 \left[\int_{[Nt]}^{Nt} (h(\varphi(p, \frac{s}{N}), s) - h(\varphi(p, \frac{s}{N}), u)) ds \right] du \\ &= A + B. \end{aligned}$$

Le terme B vérifie l'inégalité suivante :

$$\|B\|_{C^0} \leq \frac{2}{N} \|h\|_{C^0}.$$

Nous allons traiter le terme A .

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left[\int_0^1 (h(\varphi(p, \frac{s+k}{N}), s) - h(\varphi(p, \frac{s+k}{N}), u)) ds \right] du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left[\int_0^1 (h(\varphi(p, \frac{s+k}{N}), s) - h(\varphi(p, \frac{k}{N}), s)) ds \right] du \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left[\int_0^1 (h(\varphi(p, \frac{s+k}{N}), u) - h(\varphi(p, \frac{k}{N}), u)) ds \right] du \\
&- \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left[\int_0^1 (h(\varphi(p, \frac{k}{N}), s) - h(\varphi(p, \frac{k}{N}), u)) ds \right] du \\
&= C + D + E
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \left[\int_0^1 \int_0^1 (h(\varphi(p, \frac{k}{N}), s) ds du - h(\varphi(p, \frac{k}{N}), u)) ds du \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$A = C + D$$

Remarquons d'abord qu'en écrivant $\varphi(p, t) = (\varphi_1(p, t), \varphi_2(p, t))$ dans la base $(\partial_2^\perp, \partial_2)$ on a :

$$\begin{aligned}
h(\varphi(p, s + \epsilon), z) - h(\varphi(p, s), z) &= \int_0^\epsilon \partial_2^\perp h(\varphi(p, s + \xi), z) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}((p, s + \xi)) d\xi \\
&+ \int_0^\epsilon \partial_2 h(\varphi(p, s + \xi), z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}((p, s + \xi)) d\xi
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\|h(\varphi(p, s + \epsilon), z) - h(\varphi(p, s), z)\| &\leq \left(\|\partial_2^\perp h\| \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right\| + \left\| \frac{\partial h}{\partial y} \right\| \left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right\| \right) |\epsilon| \\
&\leq (\|\partial_2^\perp h\|_{C^0} + \|\sigma\|_{C^0} \|\partial_2 h\|_{C^0}) |\epsilon|
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\|A\| &\leq \frac{1}{N} (\|C\| + \|D\|) \\
&\leq \frac{2}{N} (\|\partial_2^\perp h\| + \|\sigma\| \|\partial_2 h\|)
\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
\|H(\varphi(p, t)) - f_0(\varphi(p, t))\| &\leq \frac{2}{N} (\|\partial_2^\perp h\|_{C^0} + \|\sigma\|_{C^0} \|\partial_2 h\|_{C^0} + \|h\|_{C^0}) \\
&\leq \frac{2}{N} (1 + \|\sigma\|_{C^0}) \|h\|_{C^1},
\end{aligned}$$

ce qui montre le point 1).

Passons au point 2). Rappelons que :

$$(\partial_2 H)(\varphi(p, t)) = \frac{\partial}{\partial u} (H(\varphi(p, t) + u\partial_2))|_{u=0}$$

et définissons une application P par

$$P(u, t) := \varphi(\varphi(p, t) + u\partial_2, -t)$$

On a alors :

$$\forall t \in [0, 1], \varphi(p, t) + u\partial_2 = \varphi(P(u, t), t)$$

Donc :

$$\begin{aligned} (\partial_2 H)(\varphi(p, t)) &= \frac{\partial}{\partial u} (H(\varphi(P(u, t), t)))|_{u=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(f_0(\varphi(P(u, t), 0)) + \int_0^t h(\varphi(P(u, t), s), Ns) ds \right)|_{u=0} \end{aligned}$$

De même :

$$(\partial_2 f_0)(\varphi(p, t)) = \frac{\partial}{\partial u} (f_0(\varphi(P(u, t), t)))|_{u=0}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} (\partial_2 H - \partial_2 f_0)(\varphi(p, t)) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_0^t h(\varphi(P(u, t), s), Ns) ds \right)|_{u=0} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u} (f_0(\varphi(P(u, t), t)) - f_0(\varphi(P(u, t), 0)))|_{u=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_0^t h(\varphi(\varphi(P(u, t), t), s - t), Ns) ds \right)|_{u=0} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} (f_0(\varphi(P(u, t), s))) ds \right)|_{u=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_0^t h(\varphi(\varphi(p, t) + \partial_2 u, s - t), Ns) ds \right)|_{u=0} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_0^t \partial_1 f_0(\varphi(P, s)) ds \right)|_{u=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_0^t h(\varphi(\varphi(p, t) + \partial_2 u, s - t), Ns) ds \right)|_{u=0} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u} \left(\int_0^t \int_0^1 h(\varphi(\varphi(p, t) + \partial_2 u, s - t), v) dv ds \right)|_{u=0} \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} (h(\varphi(\varphi(p, t) + \partial_2 u, s - t), Ns))|_{u=0} ds \\ &\quad - \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} (h(\varphi(\varphi(p, t) + \partial_2 u, s - t), v))|_{u=0} dv ds \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial u} (h(\varphi(\varphi(p, t) + \partial_2 u, s - t), Z))|_{u=0} = (\partial_2 h)(\varphi(p, s), Z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, s), s - t)$$

Ainsi

$$(\partial_2 H - \partial_2 f_0)(\varphi(p, t)) = \int_0^1 \int_0^t [(\partial_2 h)(\varphi(p, s), Ns) - (\partial_2 h)(\varphi(p, s), u)] \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, s), s - t) ds du$$

où (p_1, p_2) sont les composantes de p dans la base $(\partial_2^\perp, \partial_2)$. On utilise la même méthode que précédemment :

$$\begin{aligned} & (\partial_2 H - \partial_2 f_0)(\varphi(p, t)) \\ &= \frac{1}{N} \int_0^1 \int_{[Nt]}^{Nt} ((\partial_2 h)(\varphi(p, s/N), s) - (\partial_2 h)(\varphi(p, s/N), u)) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), s/N - t) ds du \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^t \left((\partial_2 h)(\varphi(p, \frac{k}{N} + \frac{s}{N}), s) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), \frac{k}{N} - t + \frac{s}{N}) \right. \\ &- (\partial_2 h)(\varphi(p, \frac{k}{N}), s) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), \frac{k}{N} - t) \left. \right) ds du \\ &- \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^t \left((\partial_2 h)(\varphi(p, \frac{k}{N} + \frac{s}{N}), u) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), \frac{k}{N} - t + \frac{s}{N}) \right. \\ &- (\partial_2 h)(\varphi(p, \frac{k}{N}), u) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), \frac{k}{N} - t) \left. \right) ds du \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^t \left((\partial_2 h)(\varphi(p, \frac{k}{N} + \frac{s}{N}), s) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), \frac{k}{N} - t + \frac{s}{N}) \right. \\ &- (\partial_2 h)(\varphi(p, \frac{k}{N}), s) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), \frac{k}{N} - t) \left. \right) ds du \\ &- (\partial_2 h)(\varphi(p, \frac{k}{N}), u) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), \frac{k}{N} - t) \left. \right) ds du \\ &= A + B + C + D \end{aligned}$$

On a $D = 0$ puis

$$\|A\|_{C^0} \leq \frac{2}{N} \|\partial_2 h\|_{C^0} \left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} \right\|_{C^0}.$$

De

$$\varphi_2(p, t) = p_2 + \int_0^t \sigma(\varphi(p, s)) ds$$

il vient

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \varphi_2(p, t)}{\partial p_2} \right| &= \left| 1 + \int_0^t (\partial_2 \sigma)(\varphi(p, s)) \frac{\partial \varphi_2(p, s)}{\partial p_2} ds \right| \\ &\leq 1 + \|\partial_2 \sigma\|_{C^0} \int_0^t \left| \frac{\partial \varphi_2(p, s)}{\partial p_2} \right| ds \end{aligned}$$

et en utilisant le lemme de Gronwall on en déduit

$$\left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} \right\|_{C^0} \leq \exp(\|\partial_2 \sigma\|_{C^0}).$$

Par conséquent

$$\|A\|_{C^0} \leq \frac{2}{N} \|\partial_2 h\|_{C^0} e^{\|\partial_2 \sigma\|_{C^0}}.$$

Traisons maintenant le terme B

$$\begin{aligned} E : &= (\partial_2 h)(\varphi(p, \frac{k}{N} + \frac{s}{N}), Z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), \frac{k}{N} - t + \frac{s}{N}) - (\partial_2 h)(\varphi(p, \frac{k}{N}), Z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), \frac{k}{N} - t) \\ &= \int_0^{\frac{s}{N}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\partial_2 h)(\varphi(p, \frac{k}{N} + \xi), Z) \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), \frac{k}{N} - t + \xi) \right) d\xi \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|E\| &\leq \frac{s}{N} (\|\partial^\perp(\partial_2 h)\| + \|\partial_2(\partial_2 h)\| \|\sigma\|) \left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} \right\| + \frac{s}{N} \|(\partial_2 h)\| \left\| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} \right) \right\| \\ &\leq \frac{s}{N} (\|\partial^\perp(\partial_2 h)\| + \|\partial_2(\partial_2 h)\| \|\sigma\|) e^{\|\partial_2 \sigma\|} + \frac{s}{N} \|(\partial_2 h)\| \|\partial_2 \sigma\| e^{\|\partial_2 \sigma\|} \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} \leq \frac{1}{N} (1 + \|\sigma\| + \|\partial_2 \sigma\|) \|\partial_2 h\|_{C^1} e^{\|\partial_2 \sigma\|}$$

ce qui démontre le point 2)

Il reste maintenant à établir le point 3). On a

$$\begin{aligned} \partial_1 H(\varphi(p, t)) &= \frac{\partial}{\partial s} H(\varphi(\varphi(p, t), s)) \big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial H(\varphi(\varphi(p, t), s))}{\partial s} \big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial H(\varphi(p, t + s))}{\partial s} \big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial H(\varphi(p, t))}{\partial t} \\ &= h(\varphi(p, t), Nt) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \|\partial_1 H(\varphi(p, t))\|^2 &= \langle \partial_1 H(\varphi(p, t)), \partial_1 H(\varphi(p, t)) \rangle \\ &= \|h(\varphi(p, t), Nt)\|^2 \\ &= \mu_{\varphi(p, t)}(\partial_1, \partial_1). \end{aligned}$$

Désignons respectivement par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{M}$ les matrices associées aux deux formes bilinéaires définies positives $H^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ et $\mu \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ dans la base $(\partial_2^\perp, \partial_2)$. Nous allons établir que

- i) $|\mathcal{H}_{22} - \mathcal{M}_{22}| \leq \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} (2 \|\partial_2 f_0\|_{C^0} + \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0})$
- ii) $|\mathcal{H}_{12} - \mathcal{M}_{12}| \leq \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} (\|\partial_1 H\|_{C^0} + \|\sigma\|_{C^0} \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} + 2 \|\sigma\|_{C^0} \|\partial_2 f_0\|_{C^0})$
- iii) $|\mathcal{H}_{11} - \mathcal{M}_{11}| \leq \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} (\|\sigma\|_{C^0}^2 \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} + 2 \|\sigma\|_{C^0}^2 \|\partial_2 f_0\|_{C^0} + 2 \|\sigma\|_{C^0} \|\partial_1 H\|_{C^0})$

Commençons par les termes diagonaux. On a

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_{22} - \mathcal{M}_{22}| &= |\langle \partial_2 H, \partial_2 H \rangle_{\mathbb{R}^3} - \mu(\partial_2, \partial_2)| \\ &= |\langle \partial_2 H, \partial_2 H \rangle_{\mathbb{R}^3} - \langle \partial_2 f_0, \partial_2 f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3}| \\ &= |\|\partial_2 H\|^2 - \|\partial_2 f_0\|^2| \\ &\leq \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\| (\|\partial_2 H - \partial_2 f_0\| + 2 \|\partial_2 f_0\|) \end{aligned}$$

puis

$$|\mathcal{H}_{11} - \mathcal{M}_{11}| = |\langle \partial_2^\perp H, \partial_2^\perp H \rangle_{\mathbb{R}^3} - \mu(\partial_2^\perp, \partial_2^\perp)|.$$

Or

$$\langle \partial_2^\perp H, \partial_2^\perp H \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \partial_1 H, \partial_1 H \rangle_{\mathbb{R}^3} - 2\sigma \langle \partial_1 H, \partial_2 H \rangle_{\mathbb{R}^3} + \sigma^2 \langle \partial_2 H, \partial_2 H \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

et

$$\mu(\partial_2^\perp, \partial_2^\perp) = \mu(\partial_1, \partial_1) - 2\sigma\mu(\partial_1, \partial_2) + \sigma^2\mu(\partial_2, \partial_2)$$

Puisque $\mu(\partial_1, \partial_1) = \langle \partial_1 H, \partial_1 H \rangle_{\mathbb{R}^3}$ et que $\mu(\partial_1, \partial_2) = 0$, il vient

$$|\mathcal{H}_{22} - \mathcal{M}_{22}| = \sigma^2 |\mu(\partial_2, \partial_2) - \langle \partial_2 H, \partial_2 H \rangle_{\mathbb{R}^3}| + 2\sigma \langle \partial_1 H, \partial_2 H \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned} |\langle \partial_1 H, \partial_2 H \rangle_{\mathbb{R}^3}| &= \langle \partial_1 H, \partial_2 H - \partial_2 f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &\leq \|\partial_1 H\| \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\| \end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} |\mu(\partial_2, \partial_2) - \langle \partial_2 H, \partial_2 H \rangle_{\mathbb{R}^3}| &\leq |\langle \partial_2 f_0, \partial_2 f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3} - \langle \partial_2 H, \partial_2 H \rangle_{\mathbb{R}^3}| \\ &\leq \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} (2 \|\partial_2 f_0\|_{C^0} + \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0}) \end{aligned}$$

Finalement :

$$|\mathcal{H}_{11} - \mathcal{M}_{11}| \leq \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} (\|\sigma\|_{C^0}^2 \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} + 2 \|\sigma\|_{C^0}^2 \|\partial_2 f_0\|_{C^0} + 2 \|\sigma\|_{C^0} \|\partial_1 H\|_{C^0}).$$

Passons maintenant au terme non diagonal. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{12} - \mathcal{M}_{12} &= \langle \partial_2 H, \partial_2^\perp H \rangle_{\mathbb{R}^3} - \mu(\partial_2, \partial_2^\perp) \\ &= \langle \partial_1 H, \partial_2 H \rangle_{\mathbb{R}^3} - \sigma \langle \partial_2 H, \partial_2 H \rangle_{\mathbb{R}^3} - \mu(\partial_1, \partial_2) + \sigma\mu(\partial_2, \partial_2) \\ &= \langle \partial_1 H, \partial_2 H - \partial_2 f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3} - \sigma (\|\partial_2 H\|^2 - \|\partial_2 f_0\|^2) \end{aligned}$$

Par suite

$$|\mathcal{H}_{12} - \mathcal{M}_{12}| \leq \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} (\|\partial_1 H\|_{C^0} + \|\sigma\|_{C^0} \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} + 2 \|\sigma\|_{C^0} \|\partial_2 f_0\|_{C^0})$$

On pose alors

$$\begin{aligned} C_0 := & \max ((2 \|\partial_2 f_0\|_{C^0} + \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0}), \\ & (\|\partial_1 H\|_{C^0} + \|\sigma\|_{C^0} \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} + 2 \|\sigma\|_{C^0} \|\partial_2 f_0\|_{C^0}), \\ & (\|\sigma\|_{C^0}^2 \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} + 2 \|\sigma\|_{C^0}^2 \|\partial_2 f_0\|_{C^0} + 2 \|\sigma\|_{C^0} \|\partial_1 H\|_{C^0})) \end{aligned}$$

Puisque $\|\partial_1 H\|_{C^0} = \|r\|_{C^0}$ et d'après les points 1) et 2), le terme C_0 se majore par un terme C ne dépendant que des 1-jets de f_0 de σ et de h . Ceci montre le point 3). $\square$

2.3 Le cas du tore

En général, l'application $H : Dom_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie précédemment n'induit pas une application de $\mathbb{E}^2/\Lambda$ dans $\mathbb{R}^3$. On définit une application $f : \mathbb{T}^2 = \mathbb{E}^2/\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$f(\varphi(p_0, t)) = H(\varphi(p_0, t)) + w\left(\frac{t}{T}\right) (H(\varphi(p_0, T)) - f_0(\varphi(p_0, T)))$$

pour tout $p_0 \in [O, A]$ et tout $t \in [0, T]$. La fonction $w : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ est une fonction C^∞ telle que $w(0) = 0$, $w(1) = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, w^{(k)}(0) = w^{(k)}(1) = 0.$$

Un calcul montre alors que f est C^∞ .

Théorème 2.3.1. (Théorème I2C) On a :

$$1) \|f - f_0\|_{C^0} \leq \frac{2}{N} (1 + \|\sigma\|_{C^0}) \|h\|_{C^1}$$

$$2) \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\|_{C^0} \leq \frac{2}{N} (1 + \|\sigma\| + \|\partial_2 \sigma\|) \|\partial_2 h\|_{C^1} e^{\|\partial_2 \sigma\|}$$

$$3) \|\mu - f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \leq \frac{C}{N}$$

où C ne dépend que des 1-jets de w , de f_0 , de σ et de h ,

$$4) \|\partial_1 f - \partial_1 f_0\|_{C^0} \leq \sqrt{7} \|\sqrt{\rho}\|_{C^0} + \frac{1}{N} \|w'\|_{C^0} (1 + \|\sigma\|_{C^0}) \|h\|_{C^1}$$

La démonstration de ce théorème sera faite d'une succession de lemmes.

Lemme (point 1).— On a

$$\|f - f_0\|_{C^0} \leq \frac{2}{N} (1 + \|\sigma\|_{C^0}) \|h\|_{C^1}.$$

Démonstration.– On a :

$$f(\varphi(p, t)) - f_0(\varphi(p, t)) = H(\varphi(p, t)) - f_0(\varphi(p, t)) + w \left(\frac{t}{T} \right) (H(\varphi(p, T)) - f_0(\varphi(p, T))),$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \|f - f_0\|_{C^0} &\leq 2 \|H - f_0\|_{C^0} \\ &\leq 2 \frac{1}{N} (1 + \|\sigma\|_{C^0}) \|h\|_{C^1} \end{aligned}$$

□

Lemme (point 2).– On a

$$\|\partial_2 f - \partial_2 f_0\|_{C^0} \leq \frac{2}{N} (1 + \|\sigma\| + \|\partial_2 \sigma\|) \|\partial_2 h\|_{C^1} e^{\|\partial_2 \sigma\|}.$$

Démonstration.– En effet :

$$\begin{aligned} (\partial_2 f)(\varphi(p, t)) - (\partial_2 f_0)(\varphi(p, t)) &= (\partial_2 H)(\varphi(p, t)) - (\partial_2 f_0)(\varphi(p, t)) \\ &+ w \left(\frac{t}{T} \right) \int_0^T \int_0^1 [\partial_2 h(\varphi(p, t), Ns) - \partial_2 h(\varphi(p, t), v)] \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}(\varphi(p, t), s - t) dv ds. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\|_{C^0} &\leq 2 \|\partial_2 H - \partial_2 f_0\|_{C^0} \\ &\leq \frac{2}{N} (1 + \|\sigma\| + \|\partial_2 \sigma\|) \|\partial_2 h\|_{C^1} e^{\|\partial_2 \sigma\|} \end{aligned}$$

□

Lemme (point 4).–

$$\|\partial_1 f - \partial_1 f_0\|_{C^0} \leq \sqrt{7} \|\sqrt{\rho}\|_{C^0} + \frac{1}{N} \|w'\|_{C^0} (1 + \|\sigma\|_{C^0}) \|h\|_{C^1}.$$

Démonstration.– On a :

$$\begin{aligned} (\partial_1 f)(\varphi(p, t)) - (\partial_1 f_0)(\varphi(p, t)) &= (\partial_1 H)(\varphi(p, t)) - (\partial_1 f_0)(\varphi(p, t)) \\ &- w' \left(\frac{1}{T} \right) (H(\varphi(p, T)) - f_0(\varphi(p, T))) \end{aligned}$$

Or

$$\|\partial_1 H - \partial_1 f_0\|_{C^0} \leq \sqrt{7} \|\sqrt{\rho}\|_{C^0}$$

et

$$\begin{aligned} \|(H(\varphi(p, T)) - f_0(\varphi(p, T)))\| &\leq \|H - f_0\| \\ &\leq \frac{1}{N} (1 + \|\sigma\|_{C^0}) \|h\|_{C^1} \end{aligned}$$

d'où

$$\|\partial_1 f - \partial_1 f_0\|_{C^0} \leq \sqrt{7} \|\sqrt{\rho}\|_{C^0} + \frac{1}{N} \|w'\|_{C^0} (1 + \|\sigma\|_{C^0}) \|h\|_{C^1}$$

□

Désignons respectivement par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{M}$ les matrices associées aux deux formes bilinéaires définies positives $f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ et μ dans la base $(\partial_2^\perp, \partial_2)$.

Lemme (implique le point 3).— On a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} i) |\mathcal{F}_{22} - \mathcal{M}_{22}| &\leq \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\| (\|\partial_2 f - \partial_2 f_0\| + 2 \|\partial_2 f_0\|) \\ ii) |\mathcal{F}_{12} - \mathcal{M}_{12}| &\leq \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\| (\|\partial_1 f\| + \|\sigma\| \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\| + 2 \|\sigma\| \|\partial_2 f_0\|) \\ &\quad + \frac{1}{T} \|H - f_0\| \|w'\| \|\partial_2 f_0\| \\ iii) |\mathcal{F}_{11} - \mathcal{M}_{11}| &\leq \|H - f_0\| \left(2 \|w'\| \|\partial_1 H\| + \|w'\|^2 \|H - f_0\| + 2 \|\sigma\| \|\partial_1 f_0\| \right) \\ &\quad + \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\| (\|\sigma\|^2 \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\| + 2 \|\sigma\|^2 \|\partial_2 f_0\|) \end{aligned}$$

Démonstration.— On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{12} - \mathcal{M}_{12} &= \langle \partial_2 f, \partial_2^\perp f \rangle_{\mathbb{R}^3} - \mu(\partial_2, \partial_2^\perp) \\ &= \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle_{\mathbb{R}^3} - \sigma \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle_{\mathbb{R}^3} - \mu(\partial_1, \partial_2) + \sigma \mu(\partial_2, \partial_2) \\ &= \langle \partial_1 f, \partial_2 f - \partial_2 f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3} - \sigma (\|\partial_2 f\|^2 - \|\partial_2 f_0\|^2) + \langle \partial_1 f, \partial_2 f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

Commençons par traiter le troisième terme :

$$(\partial_1 f)(\varphi(p, t)) = (\partial_1 H)(\varphi(p, t)) - \frac{1}{T} w' \left(\frac{t}{T} \right) (H(\varphi(p, T)) - f_0(\varphi(p, T)))$$

Par suite

$$\langle \partial_1 f, \partial_2 f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3} = -\frac{1}{T} w' \left(\frac{t}{T} \right) \langle \partial_2 f_0, H(\varphi(p, T)) - f_0(\varphi(p, T)) \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

et

$$|\langle \partial_1 f, \partial_2 f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3}| \leq \|w'\| \|\partial_2 f_0\| \|H - f_0\|.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{12} - \mathcal{M}_{12}| &\leq \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\| (\|\partial_1 f\| + \|\sigma\| \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\| + 2 \|\sigma\| \|\partial_2 f_0\|) \\ &\quad + \frac{1}{T} \|H - f_0\| \|w'\| \|\partial_2 f_0\| \end{aligned}$$

Traitons maintenant $\mathcal{F}_{11} - \mathcal{M}_{11}$. On a

$$(\partial_1 f)(\varphi(p, t)) = (\partial_1 H)(\varphi(p, t)) - w' \left(\frac{1}{T} \right) (H(\varphi(p, T)) - f_0(\varphi(p, T)))$$

et donc

$$\|\partial_1 f\|^2 = \|\partial_1 H\|^2 - 2w' \left(\frac{1}{T} \right) \langle \partial_1 H, H - f_0 \rangle + w' \left(\frac{1}{T} \right)^2 \|H - f_0\|^2.$$

Puis

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{11} - \mathcal{M}_{11} &= \|\partial_1 f\|^2 - 2\sigma \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle + \sigma^2 \|\partial_2 f\|^2 - \mu(\partial_1, \partial_1) - \sigma^2 \mu(\partial_2, \partial_2) \\ &= \|\partial_1 H\|^2 - 2w' \left(\frac{1}{T} \right) \langle \partial_1 H, H - f_0 \rangle + w' \left(\frac{1}{T} \right)^2 \|H - f_0\|^2 \\ &\quad - 2\sigma \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle + \sigma^2 \|\partial_2 f\|^2 - \mu(\partial_1, \partial_1) - \sigma^2 \mu(\partial_2, \partial_2), \end{aligned}$$

or

$$\|\partial_1 H\|^2 - \mu(\partial_1, \partial_1) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{11} - \mathcal{M}_{11} &= -2w' \left(\frac{1}{T} \right) \langle \partial_1 H, H - f_0 \rangle + w' \left(\frac{1}{T} \right)^2 \|H - f_0\|^2 \\ &\quad - 2\sigma \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle + \sigma^2 \|\partial_2 f\|^2 - \sigma^2 \mu(\partial_2, \partial_2) \\ &= -2w' \left(\frac{1}{T} \right) \langle \partial_1 H, H - f_0 \rangle + w' \left(\frac{1}{T} \right)^2 \|H - f_0\|^2 \\ &\quad - 2\sigma \langle \partial_1 f, \partial_2 f - \partial_2 f_0 \rangle + \sigma^2 \|\partial_2 f\|^2 - \sigma^2 \mu(\partial_2, \partial_2) + 2\sigma \langle \partial_1 f, \partial_2 f_0 \rangle. \end{aligned}$$

Comme

$$|\langle \partial_1 f, \partial_2 f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3}| \leq \|w'\| \|\partial_2 f_0\| \|H - f_0\|$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{11} - \mathcal{M}_{11}| &\leq \|H - f_0\| \left(2 \|w'\| \|\partial_1 H\| + \|w'\|^2 \|H - f_0\| + 2 \|\sigma\| \|\partial_1 f_0\| \right) \\ &\quad + \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\| (\|\sigma\|^2 \|\partial_2 f - \partial_2 f_0\| + 2 \|\sigma\|^2 \|\partial_2 f_0\|). \end{aligned}$$

□

2.4 Complément : de l'importance d'intégrer le long d'un champ de vecteur.

On reprend les notations du premier paragraphe 2.1 de ce chapitre où on avait noté $\mathcal{C}$ le cylindre obtenu en identifiant le segment $[OB]$ avec $[AC]$ on note $C = A + B$. notons aussi que les deux vecteurs :

$$U = T \partial_2^\perp \quad \text{et} \quad V = T^{-1} \partial_2$$

forment une base orthogonale directe et vérifient

$$\|U\| \|V\| = 1 \quad \text{et} \quad \ell(U) = \|U\|$$

Nous supposons notre cylindre feuilleté par la famille de courbes $\phi_t : I \rightarrow \mathcal{Cyl}, s \mapsto O + tV + sU$ avec $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (voir figure 2.2).

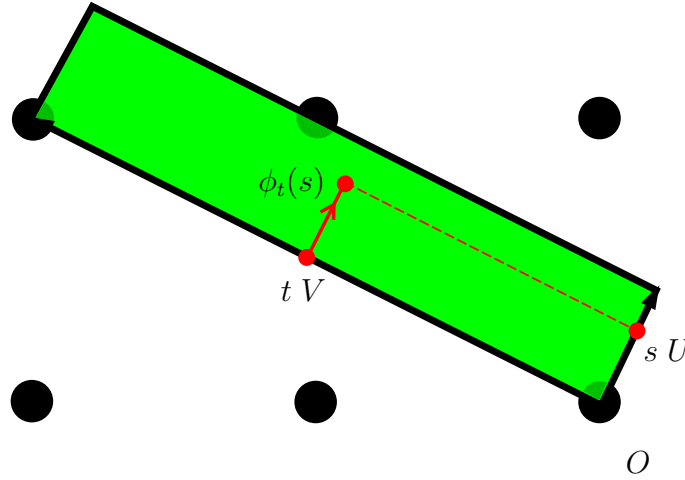


FIGURE 2.2 – Le point $\phi_t(s)$ a pour coordonnées (s, t) dans le repère (O, U, V) .

Afin d'obtenir un plongement quasi-isométrique $f : (\mathcal{C}, \mu) \rightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$ nous appliquons à chaque courbe $f_0 \circ \phi_t$ le processus d'intégration convexe décrit au chapitre I. Suivons alors cette stratégie.

$$\left\| \frac{\partial(f_0 \circ \phi_t)}{\partial s}(s) \right\|^2 = (f_0 \circ \phi_t)^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(U, U) \leq \mu(U, U).$$

Posons

$$r^2(s, t) := \mu(U, U)$$

Cela nous amène à définir une version paramétrique de la fonction h vue au chapitre I. Définissons alors cette nouvelle fonction h comme suit : pour tout $(s, t, u) \in [0, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$:

$$h(t, s, u) = r(t, s)(\cos(\alpha(t, s) \cos(2\pi u))\mathbf{t}(t, s) + \sin(\alpha(t, s) \cos(2\pi u))\mathbf{n}(t, s)),$$

avec $r := \sqrt{\mu(U, U)}$, $\mathbf{t} := U \cdot f_0 / \|U \cdot f_0\|$ et $\alpha := J_0^{-1}(\|U \cdot f_0\| / r)$. Un choix naturel de $\mathbf{n}$ est donné par un vecteur normal au plongement f_0 , à savoir $\mathbf{n} := U \cdot f_0 \wedge V \cdot f_0 / \|U \cdot f_0 \wedge V \cdot f_0\|$.

3. Notation : $X \cdot f_0 = df_0(X)$ désigne la dérivation de f le long du champ de vecteurs X .

Évidemment, μ et les dérivées de f_0 sont calculées au point $\phi_t(s)$. Nous avons alors :

$$\frac{\partial(f_0 \circ \phi_t)}{\partial s}(s) = \int_0^1 h(t, s, u) du$$

Nous définissons alors $f : (\mathcal{C}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$ par le procédé d'intégration convexe :

$$f \circ \phi_t(s) := f_0(tV) + \int_{u=0}^s h(t, u, Nu) du. \quad (2.3)$$

Dans quelle mesure f est-elle proche d'une isométrie ? Pour répondre à cette question nous allons juste évaluer et comparer l'effet des deux métriques $f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ et μ sur les couples de vecteurs (U, U) , (V, V) , et (U, V) .

D'un côté, notons que $\frac{\partial \phi_t}{\partial s} = U$. On a alors

$$\langle U \cdot f, U \cdot f \rangle_{\mathbb{R}^3} = \left\langle \frac{\partial f \circ \phi_t(s)}{\partial s}, \frac{\partial f \circ \phi_t(s)}{\partial s} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \|h(t, s, Ns)\|^2$$

et

$$\|h(t, s, Ns)\|^2 = r^2(t, s) = \mu(U, U),$$

d'où

$$f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(U, U) = \mu(U, U).$$

D'un autre côté, en dérivant (2.3) par rapport à t , nous observons que $\frac{\partial f \circ \phi_t(s)}{\partial t}$ peut être obtenue à partir de $\frac{\partial f_0 \circ \phi_t(s)}{\partial t}$ par le processus d'intégration convexe. Nous pouvons donc appliquer le lemme de C^0 -densité pour montrer que ces deux dérivées peuvent être rendues aussi proches l'une de l'autre si N est choisi suffisamment grand. En notant $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = V$, cela se traduit par :

$$V \cdot f \approx_N V \cdot f_0,$$

où $u \approx_N v$ signifie $u = v + O(\frac{1}{N})$. Grâce au choix de la métrique μ (2.1) et le fait que $V \in \ker \ell$, nous déduisons que :

$$\left\langle \frac{\partial f_0 \circ \phi_t(s)}{\partial t}, \frac{\partial f_0 \circ \phi_t(s)}{\partial t} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle V \cdot f_0, V \cdot f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3} = \mu(V, V),$$

et par suite

$$f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(V, V) \approx_N \mu(V, V).$$

Ainsi donc le fait que f soit une quasi-isométrie ou non va reposer la proximité entre $\mu(U, V)$ et $\langle U \cdot f, V \cdot f \rangle_{\mathbb{R}^3}$. Nous avons

$$\langle U \cdot f, V \cdot f \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle h(t, s, Ns), V \cdot f \rangle_{\mathbb{R}^3} \approx_N \langle h(t, s, Ns), V \cdot f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

et, en omettant certains paramètres évidents

$$\begin{aligned} \langle h(t, s, Ns), V \cdot f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3} &= \langle r(\cos(\alpha \cos(2\pi Ns)))\mathbf{t}, V \cdot f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \left\langle r \frac{\cos(\alpha \cos(2\pi Ns))}{\|U \cdot f_0\|} U \cdot f_0, V \cdot f_0 \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= r \frac{\cos(\alpha \cos(2\pi Ns))}{\|U \cdot f_0\|} \langle U \cdot f_0, V \cdot f_0 \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= r \frac{\cos(\alpha \cos(2\pi Ns))}{\|U \cdot f_0\|} \mu(U, V). \end{aligned}$$

La première égalité résulte de l'orthogonalité entre $\mathbf{n}(s)$ et $V \cdot f$, alors que la dernière égalité résulte du fait que $V \in \ker \ell$. Nous concluons que :

$$f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(U, V) \approx_N r \frac{\cos(\alpha \cos(2\pi N s))}{\|U \cdot f_0\|} \mu(U, V).$$

Conclusion : sauf dans le cas où $\mu(U, V)$ est nulle, une telle construction naïve de f ne s'approche pas d'une isométrie, quel que soit la valeur de N . Pour corriger ce défaut il faut remplacer la direction d'intégration U par un champ de vecteurs W , μ -orthogonal à V .

Chapitre 3

Immersions isométriques du tore carré plat

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment à partir d'un plongement lisse strictement court du tore carré plat dans l'espace euclidien, on peut construire de façon suffisamment explicite pour être implémentée, une suite d'applications $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une C^1 -isométrie du tore carré plat dans $\mathbb{E}^3$. Le résultat principal est le *théorème d'étape* énoncé ci-dessous qui lui même utilise le *théorème I2C* démontré au chapitre 2.

3.1 Le théorème d'étape

Soient (∂_x, ∂_y) la base orthonormale standard de $\mathbb{E}^2$ et $(\partial_x^*, \partial_y^*)$ sa base duale. On définit trois formes linéaires ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sur $\mathbb{E}^2$ par :

$$\ell_1 := \partial_x^* \quad , \quad \ell_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}(\partial_x^* + 2\partial_y^*) \quad , \quad \ell_3 := \frac{1}{\sqrt{5}}(\partial_x^* - 2\partial_y^*)$$

On désigne par :

$$\mathcal{C} := \{\rho_1 \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2 \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3 \ell_3 \otimes \ell_3 \mid \rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \rho_3 > 0\}$$

le cône positif engendré par les trois formes bilinéaires symétriques positives $\ell_1 \otimes \ell_1, \ell_2 \otimes \ell_2$ et $\ell_3 \otimes \ell_3$. Tout point de $\mathcal{C}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}^2$ et donc, toute application C^∞ de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ dans $\mathcal{C}$ est une métrique de $\mathbb{T}^2$.

Dans ce premier paragraphe nous allons démontrer le théorème principal ci-dessous et l'utiliser, dans le paragraphe suivant, d'une manière récursive pour construire une suite d'applications de classe C^∞ convergeant vers une immersion isométrique de classe au moins C^1 de $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{E}^3$.

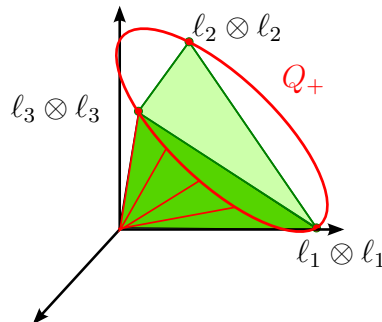


FIGURE 3.1 – L'espace des formes bilinéaires symétriques est identifié à $\mathbb{R}^3$ via la base $(\partial_x^* \otimes \partial_x^*, \partial_x^* \otimes \partial_y^* + \partial_y^* \otimes \partial_x^*, \partial_y^* \otimes \partial_y^*)$. Le cône $\mathcal{C}$ est à l'intérieur du cône Q_+ des produits scalaires.

Théorème 3.1.1. [*Théorème d'étape*] Soient g and h deux métriques riemanniennes sur $\mathbb{T}^2$ et soit

$$f_0 : (\mathbb{T}^2, g) \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

une immersion telles que :

- 1) $h - g \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$.
- 2) $g - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$.

Alors, pour tout $K > 0$ il existe une immersion $f : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) $f(0, 0) = f_0(0, 0)$
- ii) $\|g - f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|h - g\|_{C^0}$
- iii) $h - f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$
- iv) $\|df - df_0\|_{C^0} \leq C^{te} \|g - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} + K \|h - g\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}$

Remarque 1. Le nombre $\|df\|_{C^0}$ désigne le maximum de la norme de Frobenius de l'opérateur linéaire $df(p)$, $p \in \mathbb{T}^2$.

Remarque 2. Il découle de l'hypothèse 2 que $f_0 : (\mathbb{T}^2, g) \rightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$ est une immersion strictement courte, i.e. $g - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ est une métrique sur le tore plat . De même la conclusion iii) implique aussi que l'immersion $f : (\mathbb{T}^2, h) \rightarrow \mathbb{E}^3$ est strictement courte.

Remarque 3. La constante C^{te} de la conclusion iv) dépend du choix de la fonction w utilisée pour le recollement.

Le paragraphe suivant sera consacré à la démonstration de ce théorème.

3.2 Démonstration du théorème d'étape

3.2.1 Domaines fondamentaux

Nous allons construire l'immersion f en appliquant à f_0 trois corrugations (c'est-à-dire trois intégrations convexes) successives suivant des directions dépendant des ℓ_i .

Soit Λ le réseau $\mathbb{Z}\partial_x + \mathbb{Z}\partial_y$. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, le noyau $\ker \ell_i$ de ℓ_i contient un élément primitif $V(i)$ du réseau Λ . Nous prenons :

$$V(1) := \partial_y, \quad V(2) := -2\partial_x + \partial_y, \quad V(3) := 2\partial_x + \partial_y.$$

Et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, nous posons :

$$U(i) := \frac{1}{\|V(i)\|^2} \text{Rot}_{-\frac{\pi}{2}} V(i),$$

soit

$$U(1) := \partial_x, \quad U(2) := \frac{1}{5}(\partial_x + 2\partial_y) \quad \text{et} \quad U(3) := \frac{1}{5}(\partial_x - 2\partial_y)$$

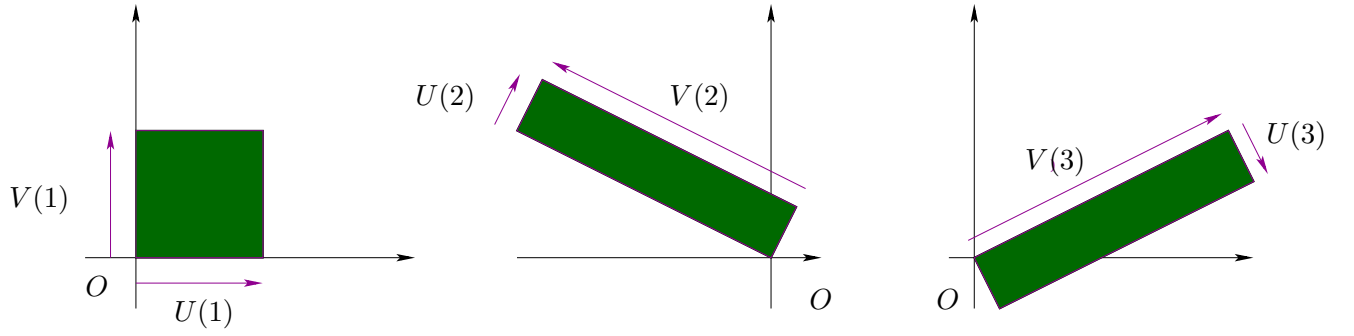


FIGURE 3.2 – Domaines fondamentaux de $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ de bases $(U(i), V(i))$.

Notons alors que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la famille $(U(i), V(i))$ est une base orthogonale directe de $\mathbb{E}^2$ et le rectangle déterminé par l'origine O de $\mathbb{E}^2$ et les deux points

$$A(i) := O + U(i) \text{ et } B(i) := O + V(i),$$

d'aire $\|U(i) \wedge V(i)\| = 1$ est un domaine fondamental de $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2$ pour l'action de Λ sur $\mathbb{E}^2$. Il est noté $Dom(i)$.

3.2.2 Lemme préliminaire

Dans la suite nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 11 (Lemme préliminaire). *Soit*

$$B := \rho_1 \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2 \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3 \ell_3 \otimes \ell_3$$

une forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{E}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} |\rho_1| &\leq \frac{\sqrt{17}}{4} \|B\|_F \\ |\rho_2| &\leq \frac{5\sqrt{3}}{8} \|B\|_F \\ |\rho_3| &\leq \frac{5\sqrt{3}}{8} \|B\|_F. \end{aligned}$$

En particulier :

$$\max\{|\rho_1|, |\rho_2|, |\rho_3|\} \leq \frac{5\sqrt{3}}{8} \|B\|_F.$$

Remarque . Rappelons, qu'en général si B un champ de formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{T}^2$, alors pour tout $p \in \mathbb{T}^2$, on note

$$\|B_p\|_F = \sqrt{B_{xx}^2(p) + B_{yy}^2(p) + 2B_{xy}^2(p)}$$

la norme de Frobenius¹ de la matrice

$$\begin{pmatrix} B_{xx}(p) & B_{xy}(p) \\ B_{yx}(p) & B_{yy}(p) \end{pmatrix}$$

1. Rappelons que la norme de Frobenius $\|A\|_F$ d'une matrice carrée A est le nombre $\sqrt{\text{tr}(^T A A)}$. Cette norme est sous-multiplicative et compatible avec la norme euclidienne, i. e. pour tout vecteur V on a : $\|AV\| \leq \|A\|_F \|V\|$.

qui représente B_p dans la base (∂_x, ∂_y) .

L'inégalité de Schwarz appliquée aux vecteurs

$$(B_{xx}(p), B_{xy}(p), B_{yx}, B_{yy}(p))$$

et

$$(X_1^2, X_1X_2, X_1X_2, X_2^2)$$

montre immédiatement que :

$$\forall X \in T_p\mathbb{T}^2, \quad |B_p(X, X)| \leq \|B_p\|_F \langle X, X \rangle_{\mathbb{E}^2}.$$

Si on note $\|B\|_{C^0}$ le *supremum* pour tous les $p \in \mathbb{T}^2$ des $\|B_p\|_F$, on a donc

$$|B(\cdot, \cdot)| \leq \|B\|_{C^0} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2},$$

l'écriture $|B(\cdot, \cdot)| < g$ où g est une métrique signifiant bien sûr que :

$$\forall p \in \mathbb{T}^2, \quad \forall X \in T_p\mathbb{T}^2, \quad |B_p(X, X)| < g_p(X, X).$$

Démonstration. Développons l'expression de B :

$$\begin{aligned} B &= \rho_1 \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2 \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3 \ell_3 \otimes \ell_3 \\ &= (\rho_1 + 1/5(\rho_2 + \rho_3)) \partial_x^* \otimes \partial_x^* + 2/5(\rho_2 - \rho_3) (\partial_x^* \otimes \partial_y^* + \partial_y^* \otimes \partial_x^*) \\ &\quad + 4/5(\rho_2 + \rho_3) (\partial_y^* \otimes \partial_y^*). \end{aligned}$$

En écrivant :

$$B = B_{xx} \partial_x^* \otimes \partial_x^* + B_{xy} (\partial_x^* \otimes \partial_y^* + \partial_y^* \otimes \partial_x^*) + B_{yy} \partial_y^* \otimes \partial_y^*,$$

un calcul direct montre que

$$\rho_1 = B_{xx} - \frac{1}{4}B_{yy}, \quad \rho_2 = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}B_{yy} + B_{xy}\right), \quad \rho_3 = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}B_{yy} - B_{xy}\right).$$

En utilisant maintenant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$, on peut aussi écrire

$$\rho_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{xx} \\ B_{xy} \\ B_{xy} \\ B_{yy} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \rho_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 5/8 \\ 5/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{xx} \\ B_{xy} \\ B_{xy} \\ B_{yy} \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{et} \quad \rho_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -5/8 \\ -5/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{xx} \\ B_{xy} \\ B_{xy} \\ B_{yy} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Le résultat s'en suit par simple application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. $\square$

3.2.3 Première corrugation

Soit

$$D_1 := g - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3}.$$

D'après l'hypothèse 2 du théorème, on sait que

$$D_1 \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C}).$$

En d'autre terme, il existe trois fonctions positives $\rho_1(D_1), \rho_2(D_1), \rho_3(D_1) \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}_+^*)$ telles que

$$D_1 = \rho_1(D_1)\ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2(D_1)\ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3(D_1)\ell_3 \otimes \ell_3.$$

Définissons une métrique auxilliare μ_1 par

$$\mu_1 := f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_1(D_1)\ell_1 \otimes \ell_1.$$

Notre but est d'appliquer le théorème *I2C* du chapitre 2 pour construire une application presque isométrique pour μ_1 . Notons que l'application

$$f_0 : (\mathbb{T}^2, \mu_1) \longrightarrow (E^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$$

est une immersion courte. Donc, elle vérifie les hypothèses du théorème *I2C*. Par suite pour tout $N_1 \in \mathbb{N}^*$, il existe une immersion

$$f_1 : (\mathbb{T}^2, \mu_1) \rightarrow \mathbb{E}^3$$

obtenue par le procédé d'intégration convexe dans la direction

$$W_1 := U(1) + \zeta_1 V(1) \text{ avec } \zeta_1 := -\frac{f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(V(1), U(1))}{f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(V(1), V(1))}$$

telle que

$$\|f_1 - f_0\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_1}\right), \quad (3.1)$$

$$\|df_1 - df_0\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_1}\right) + \sqrt{7}\sqrt{\|\rho_1(D_1)\|_{C^0}} \quad (3.2)$$

$$\text{et } \|\mu_1 - f_1^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_1}\right). \quad (3.3)$$

Rappelons que la condition (1) signifie que l'immersion f_1 est C^0 -proche de f_0 . Soit

$$Err_1 := \mu_1 - f_1^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \text{ et } err_1 := \|Err_1\|_{C^0}$$

le défaut d'isométrie de f_1 par rapport à μ_1 . Considérons la forme bilinéaire

$$\mu_2 := f_1^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_2(D_2)\ell_2 \otimes \ell_2$$

où $D_2 := g - f_1^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ et $\rho_2(D_2)$ est le second coefficient dans la décomposition :

$$D_2 = \rho_1(D_2)\ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2(D_2)\ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3(D_2)\ell_3 \otimes \ell_3.$$

Lemme 12. Soit

$$\rho_{\min}(D_1) := \min\{\|\rho_1(D_1)\|_{C^0}, \|\rho_2(D_1)\|_{C^0}, \|\rho_3(D_1)\|_{C^0}\}.$$

Si

$$err_1 < \frac{8}{5\sqrt{3}} \rho_{\min}(D_1) \quad (C1)$$

alors

$$\rho_2(D_2) : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+^*,$$

et donc μ_2 est une métrique sur $\mathbb{T}^2$.

Démonstration. Comme

$$\begin{aligned}\mu_1 &= f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_1(D_1) \ell_1 \otimes \ell_1 \\ &= g - \rho_2(D_1) \ell_2 \otimes \ell_2 - \rho_3(D_1) \ell_3 \otimes \ell_3\end{aligned}$$

et

$$\mu_1 - f_1^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} = \mu_1 - g + D_2,$$

on a

$$Err_1 = \rho_1(D_2) \ell_1 \otimes \ell_1 + (\rho_2(D_2) - \rho_2(D_1)) \ell_2 \otimes \ell_2 + (\rho_3(D_2) - \rho_3(D_1)) \ell_3 \otimes \ell_3. \quad (3.4)$$

On en déduit d'après le lemme préliminaire :

$$\|\rho_2(D_2) - \rho_2(D_1)\|_{C^0} \leq \frac{5\sqrt{3}}{8} err_1.$$

En particulier,

$$\rho_2(D_2) \geq \rho_2(D_1) - \frac{5\sqrt{3}}{8} err_1$$

Et en utilisant la minoration évidente

$$\rho_2(D_1) \geq \rho_{\min}(D_1)$$

on conclut que :

$$\rho_2(D_2) \geq \rho_{\min}(D_1) - \frac{5\sqrt{3}}{8} err_1 > 0.$$

□

Remarque sur la condition (C1) pour N_1 . Puisque $err_1 = O(\frac{1}{N_1})$ on peut choisir N_1 aussi grand que l'on veut pour que la condition (C1) du lemme soit réalisée.

3.2.4 Seconde corrugation

Comme l'immersion

$$f_1 : (\mathbb{T}^2, \mu_2) \longrightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$$

est strictemnt courte, d'après le théorème *I2C*, pour tout $N_2 \in \mathbb{N}^*$, il existe une immersion :

$$f_2 : (\mathbb{T}^2, \mu_2) \longrightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$$

obtenue par le procédé d'intégration convexe dans la direction

$$W_2 := U(2) + \zeta_2 V(2) \text{ avec } \zeta_2 := -\frac{f_1^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(V(2), U(2))}{f_1^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(V(2), V(2))}$$

telle que

$$\|f_2 - f_1\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_2}\right), \quad (3.5)$$

$$\|df_2 - df_1\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_2}\right) + \sqrt{7} \sqrt{\|\rho_2(D_2)\|_{C^0}} \quad (3.6)$$

$$\text{et } \|\mu_2 - f_2^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_2}\right). \quad (3.7)$$

Considérons maintenant la forme bilinéaire :

$$\mu_3 = f_2^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_3(D_3) \ell_3 \otimes \ell_3$$

où

$$D_3 := g - f_2^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

et $\rho_3(D_3)$ est le troisième coefficient de la décomposition de D_3 .

$$D_3 := \rho_1(D_3) \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2(D_3) \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3(D_3) \ell_3 \otimes \ell_3.$$

Et posons

$$Err_2 := \mu_2 - f_2^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3} \quad \text{et} \quad err_2 := \|Err_2\|_{C^0}.$$

Lemme 13. Si

$$err_1 + err_2 < \frac{8}{5\sqrt{3}} \rho_{\min}(D_1) \quad (C2)$$

alors

$$\rho_3(D_3) : \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

et donc μ_3 est une métrique sur $\mathbb{T}^2$.

Démonstration. Comme

$$\begin{aligned} \mu_2 &= f_1^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_2(D_2) \ell_2 \otimes \ell_2 \\ &= g - \rho_1(D_2) \ell_1 \otimes \ell_1 - \rho_3(D_2) \ell_3 \otimes \ell_3 \end{aligned}$$

et

$$\mu_2 - f_2^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} = \mu_2 - g + D_3,$$

on a

$$Err_2 = (\rho_1(D_3) - \rho_1(D_2)) \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2(D_3) \ell_2 \otimes \ell_2 + (\rho_3(D_3) - \rho_3(D_2)) \ell_3 \otimes \ell_3. \quad (3.8)$$

Appliquons maintenant le lemme préliminaire à (3.8) et à (3.4) on en déduit que

$$\|\rho_3(D_3) - \rho_3(D_2)\|_{C^0} \leq \frac{5\sqrt{3}}{8} err_2 \quad \text{and} \quad \|\rho_3(D_2) - \rho_3(D_1)\|_{C^0} \leq \frac{5\sqrt{3}}{8} err_1$$

et par application de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|\rho_3(D_3) - \rho_3(D_1)\|_{C^0} \leq \frac{5\sqrt{3}}{8} (err_1 + err_2).$$

et par suite

$$\rho_3(D_3) \geq \rho_{\min}(D_1) - \frac{5\sqrt{3}}{8} (err_1 + err_2) > 0.$$

□

Remarque sur la condition (C2) pour N_2 . Si la condition (C1) est réalisée alors

$$\frac{8}{5\sqrt{3}} \rho_{\min}(D_1) - err_1 > 0.$$

Et par suite, comme

$$err_2 = O\left(\frac{1}{N_2}\right),$$

on peut choisir N_2 assez grand pour que la condition (C2) du lemme soit réalisée.

3.2.5 Troisième corrugation

Comme l'immersion

$$f_2 : (\mathbb{T}^2, \mu_3) \longrightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$$

est strictemnt courte, d'après le théorème *I2C*, pour tout $N_3 \in \mathbb{N}^*$, il existe une immersion :

$$f_3 : (\mathbb{T}^2, \mu_3) \longrightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$$

obtenue par le procédé d'intégration convexe dans la direction

$$W_3 := U(3) + \zeta_3 V(3) \text{ avec } \zeta_3 := -\frac{f_2^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(V(3), U(3))}{f_2^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(V(3), V(3))}$$

telle que

$$\|f_3 - f_2\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_3}\right), \quad (3.9)$$

$$\|df_3 - df_2\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_3}\right) + \sqrt{7} \sqrt{\|\rho_3(D_3)\|_{C^0}} \quad (3.10)$$

$$\text{et } \|\mu_3 - f_3^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_3}\right). \quad (3.11)$$

Définissons

$$Err_3 := \mu_3 - f_3^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \text{ et } err_3 := \|Err_3\|_{C^0}.$$

Lemme 14. *On a*

$$\|g - f_3^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \leq 3(err_1 + err_2 + err_3).$$

Démonstration. D'un côté, on a :

$$\begin{aligned} g - f_3^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} &= g - \mu_3 + \mu_3 - f_3^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= g - (f_2^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_3(D_3)\ell_3 \otimes \ell_3) + Err_3 \\ &= D_3 - \rho_3(D_3)\ell_3 \otimes \ell_3 + Err_3 \\ &= \rho_1(D_3)\ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2(D_3)\ell_2 \otimes \ell_2 + Err_3. \end{aligned}$$

Comme

$$\|\ell_1 \otimes \ell_1\| = \|\ell_2 \otimes \ell_2\| = 1,$$

on obtient, en appliquant l'inégalité triangulaire :

$$\|g - f_3^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\| \leq |\rho_1(D_3)| + |\rho_2(D_3)| + err_3. \quad (3.12)$$

De l'autre côté, en additionnant les équations (3.4) et (3.8) on obtient

$$Err_1 + Err_2 = \rho_1(D_3)\ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2(D_2 + D_3 - D_1)\ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3(D_3 - D_1)\ell_3 \otimes \ell_3. \quad (3.13)$$

Apppliquons maintenant le lemme préliminaire à la dernière équation et à l'équation (3.8) on obtient :

$$|\rho_1(D_3)| \leq \frac{\sqrt{17}}{4} \|Err_1 + Err_2\| \leq \frac{\sqrt{17}}{4} (err_1 + err_2) \quad \text{and} \quad |\rho_2(D_3)| \leq \frac{5\sqrt{3}}{8} err_2$$

En reportant ces inégalités dans (3.12), et en notant que

$$\frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{8} \leq 3,$$

ceci achève la démonstration. $\square$

Lemme 15. *Si*

$$\frac{15\sqrt{3}}{8}(err_1 + err_2 + err_3) < \rho_{\min}(h - g)$$

alors

$$h - f_3^*\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C}).$$

Démonstration. Soient

$$\Delta := h - g, \quad B := g - f_3^*\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \quad \text{et} \quad D := h - f_3^*\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

On a $D = \Delta + B$ et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \rho_i(D) &= \rho_i(\Delta) + \rho_i(B) \\ &> \rho_{\min}(\Delta) + \rho_i(B). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, la condition

$$\|\rho_i(B)\| < \rho_{\min}(\Delta)$$

implique

$$\rho_i(D) > 0.$$

D'après le lemme préliminaire, on sait que

$$\max\{\|\rho_1(B)\|_{C^0}, \|\rho_2(B)\|_{C^0}, \|\rho_3(B)\|_{C^0}\} \leq \frac{5\sqrt{3}}{8} \|B\|_{C^0}$$

et d'après le lemme 14

$$\|B\|_{C^0} \leq 3(err_1 + err_2 + err_3).$$

En reportant la dernière inégalité dans la précédente le lemme s'en suit. $\square$

Condition (C3) pour N_1, N_2 et N_3 . Nous allons effectuer une l'égère modification à la contrainte apparaissant dans le lemme 15 :

$$\frac{15\sqrt{3}}{8}(err_1 + err_2 + err_3) < \frac{1}{2}\rho_{\min}(h - g) \quad (\text{C3})$$

Contrairement à (C1) et (C2), la condition (C3) peut être impossible à réaliser une fois N_1 et N_2 sont choisis. Nous allons contourner cette difficulté par un choix uniforme de N_1, N_2 et N_3 . Cela va être expliquée dans la section suivante.

3.2.6 Réalisation des conditions (C1), (C2) et (C3)

Soient $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$0 < \tau < \frac{4}{45\sqrt{3}}$$

et $0 < \lambda \leq 1$ tel que

$$\lambda(h - g) < g - f_0^*\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

Comme $h - g$ et $g - f_0^*\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ sont des métriques sur une variété riemannienne compacte, un tel nombre existe toujours.

Lemme 16 (Lemme de bouclage). *Si pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,*

$$err_i < \lambda\tau \cdot \rho_{\min}(h - g)$$

alors les conditions (C1), (C2) et (C3) sont satisfaites.

Remarque 4. Comme pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a $err_i = O(\frac{1}{N_i})$, l'inégalité du lemme ci-dessus peut être réalisée étape par étape en choisissant les N_i aussi grands que possible.

Démonstration. D'une manière concise, posons comme au dessus

$$\Delta := h - g \quad \text{et} \quad D_1 := g - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

Si pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$

$$err_i < \lambda\tau \cdot \rho_{\min}(\Delta)$$

alors

$$\frac{15\sqrt{3}}{8}(err_1 + err_2 + err_3) < \frac{45\sqrt{3}}{8}\lambda\tau \cdot \rho_{\min}(\Delta).$$

Et donc, la condition (C3) sera réalisée si

$$\frac{45\sqrt{3}}{8}\lambda\tau < \frac{1}{2}$$

ou d'une manière équivalente si

$$\lambda\tau < \frac{4}{45\sqrt{3}}.$$

D'après les définitions de λ et τ l'inégalité ci-dessus est trivialement réalisée.

On déduit également :

$$\lambda\rho_{\min}(\Delta) < \rho_{\min}(D_1)$$

et par suite

$$err_i < \lambda\tau \cdot \rho_{\min}(\Delta) \implies err_i < \tau \cdot \rho_{\min}(D_1).$$

L'inégalité $\tau < \frac{4}{5\sqrt{3}}$ implique $err_i < \frac{4}{5\sqrt{3}}\rho_{\min}(D_1)$. En particulier, les conditions (C1) et (C2)

$$err_1 < \frac{8}{5\sqrt{3}}\rho_{\min}(D_1), \quad err_1 + err_2 < \frac{8}{5\sqrt{3}}\rho_{\min}(D_1)$$

sont satisfaites. □

3.2.7 Fin de la démonstration et choix des N_i

Choix des N_i

Pour tout $K > 0$, on choisit les nombres de corrugations N_i (dépendant de K) correspondant à la i -ème intégration convexe assez grands pour que

$$err_i < \lambda\tau \cdot \rho_{\min}(h - g)$$

et

$$\|df_i - df_{i-1}\|_{C^0} \leq \frac{K}{3} \sqrt{\|h - g\|_{C^0}} + \sqrt{7} \sqrt{\|\rho_i(D_i)\|_{C^0}}$$

Un tel choix des N_i est toujours possible puisque, (voir paragraphe 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5) :

$$err_i = O\left(\frac{1}{N_i}\right) \quad \text{et} \quad \|df_i - df_{i-1}\|_{C^0} \leq O\left(\frac{1}{N_i}\right) + \sqrt{7} \sqrt{\|\rho_i(D_i)\|_{C^0}}.$$

Fin de la démonstration

D'après le lemme 15, le choix des N_i implique directement le point *iii*) du théorème, c'est-à-dire :

$$h - f_3^*\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C}).$$

En outre,

$$\begin{aligned} \|g - f_3^*\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\| &\leq 3(err_1 + err_2 + err_3) \quad (\text{par le lemme 14}) \\ &\leq \frac{4}{5\sqrt{3}} \rho_{\min}(h - g) \quad (\text{par le choix des } N_i) \\ &\leq \frac{1}{2} \|h - g\|_{C^0} \quad (\text{par le lemme préliminaire}) \end{aligned}$$

ce qui montre le point *ii*) du théorème. Notons que le point *i*) est trivialement vérifié d'après la formule d'intégration convexe.

Démontrons maintenant le point *iv*). Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|df_3 - df_0\| &\leq \|df_3 - df_2\| + \|df_2 - df_1\| + \|df_1 - df_0\| \\ &\leq K \sqrt{\|h - g\|_{C^0}} + \sqrt{7} \sum_{i=1}^3 \sqrt{\|\rho_i(D_i)\|_{C^0}}. \end{aligned}$$

Le lemme préliminaire appliqué aux équations (3.4) et (3.13) implique :

$$\|\rho_2(D_2) - \rho_2(D_1)\|_{C^0} \leq \frac{5\sqrt{3}}{8} err_1 \quad \text{et} \quad \|\rho_3(D_3) - \rho_3(D_1)\|_{C^0} \leq \frac{5\sqrt{3}}{8} (err_1 + err_2).$$

Il s'en suit :

$$\|\rho_2(D_2)\|_{C^0} \leq \|\rho_2(D_1)\|_{C^0} + \frac{5\sqrt{3}}{8} err_1 \quad \text{and} \quad \|\rho_3(D_3)\|_{C^0} \leq \|\rho_3(D_1)\|_{C^0} + \frac{5\sqrt{3}}{8} (err_1 + err_2)$$

d'où, grâce aux conditions (C1) et (C2) :

$$\|\rho_2(D_2)\|_{C^0} \leq \|\rho_2(D_1)\|_{C^0} + \rho_{\min}(D_1) \leq 2 \max_i \|\rho_i(D_1)\|_{C^0}.$$

Parallèlement

$$\|\rho_3(D_3)\|_{C^0} \leq 2 \max_i \|\rho_i(D_1)\|_{C^0}.$$

On conclut que

$$\|df_3 - df_0\| \leq K \sqrt{\|h - g\|_{C^0}} + \sqrt{7}(2\sqrt{2} + 1) \max_i \sqrt{\|\rho_i(D_1)\|_{C^0}}.$$

Le lemme préliminaire appliqué à la decomposition de D_1 permet d'établir que

$$\max_i \|\rho_i(D_1)\| \leq \frac{5\sqrt{3}}{8} \|D_1\|,$$

ce qui conduit à

$$\|df_3 - df_0\| \leq K \sqrt{\|h - g\|_{C^0}} + C^{te} \sqrt{\|g - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0}}$$

avec

$$C^{te} = \sqrt{7}(2\sqrt{2} + 1) \sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{8}}.$$

Et le point *iv* est démontré ainsi que le théorème. $\square$

3.3 Suite convergeant vers une immersion isométrique

Soit $f_{init} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ une immersion² telle que

$$\Delta := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2} - f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}).$$

Soient $\gamma > 0$ et $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \delta_k := 1 - e^{-\gamma k}.$$

On considère la suite croissante de métriques $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers la métrique euclidienne $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ et donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad , \quad g_k := f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \delta_k \Delta.$$

On construit une suite d'immersions

$$f_{init}; \quad f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}; \quad f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}; \quad f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}; \quad \dots$$

en appliquant d'une manière récursive le théorème d'étape. Plus précisément, à l'étape $k \in \mathbb{N}^*$, on prend l'immersion $f_0 := f_{k-1,3}$ et on pose alors $g := g_k$ et $h := g_{k+1}$. Les trois immersions correspondant aux trois corrugations qui apparaissent dans la démonstration du théorème d'étape sont notées $f_{k,1}$, $f_{k,2}$ et $f_{k,3}$. En particulier l'immersion résultant du théorème d'étape est $f := f_{k,3}$. Notons que $h - g = (\delta_{k+1} - \delta_k) \Delta$ et donc

$$h - g \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$$

2. Par exemple, une paramétrisation standard du tore de révolution avec un choix approprié du petit et grand rayon convient.

Cette condition est requise. C'est l'hypothèse 1 du théorème d'étape. L'hypothèse 2 à savoir

$$g - f_0^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathcal{C})$$

est satisfaite d'une manière inductive de la conclusion *iii* du théorème. Notons que par convention, $f_{0,3}$ est f_{init} . Plus généralement, on assume les conventions circulaires naturelles pour les indices : $(k, 4) = (k + 1, 1)$ et $(k, 0) = (k - 1, 3)$.

Théorème 3.3.1. *La suite $(f_{k,3})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est C^1 -convergente vers une C^1 immersion isométrique $f_\infty : \mathbb{E}^2 / \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$.*

Démonstration. Pour montrer que la suite $(f_{k,3})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est C^1 -convergente, nous allons établir que la suite des différentielles $(df_{k,3})_{k \in \mathbb{N}^*}$ vérifie le critère de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{C^0}$. La conclusion *iv*) du théorème d'étape assure que

$$\|df_{k,3} - df_{k-1,3}\|_{C^0} \leq C^{te} \|g_k - f_{k-1,3}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} + K \|g_{k+1} - g_k\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $k > 1$, on a

$$\|df_{k,3} - df_{k-1,3}\|_{C^0} \leq C^{te} \|g_k - g_{k-1}\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} + C^{te} \|g_{k-1} - f_{k-1,3}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} + K \|g_{k+1} - g_k\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}$$

et d'après la conclusion *ii*) on déduit :

$$\|g_{k-1} - f_{k-1,3}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|g_k - g_{k-1}\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \|df_{k,3} - df_{k-1,3}\|_{C^0} &\leq (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) C^{te} \|g_k - g_{k-1}\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} + K \|g_{k+1} - g_k\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) C^{te} \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} \|\Delta\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} + K \sqrt{\delta_{k+1} - \delta_k} \|\Delta\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Puisque $\delta_k = 1 - \exp(-\gamma k)$ on a :

$$\sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} = \exp(-\gamma k/2) \sqrt{\exp(\gamma) - 1}$$

et donc la série

$$\sum \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}}$$

converge. Par suite $(df_{k,3})$ est de Cauchy dans $C^0(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)$. D'autre part, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, on a pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $m \in T^2$:

$$\|f_{q,3}(m) - f_{p,3}(m) - (f_{q,3}(0,0) - f_{p,3}(0,0))\| \leq \|m\| \|df_{q,3} - df_{p,3}\|_{C^0}.$$

Comme $f_{p,3}(0,0) = f_{q,3}(0,0) = f_{init}(0,0)$, la suite $(f_{k,3})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est donc de Cauchy dans $C^0(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3)$. De ce qui précède, on déduit que $(f_{k,3})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est C^1 -convergente vers une C^1 -application f_∞ . Montrons maintenant que l'immersion f_∞ est une C^1 -isométrie. D'après la conclusion *ii* du théorème d'étape, on a :

$$\|g_k - f_{k,3}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|g_{k+1} - g_k\|_{C^0}$$

En passant à la limite, on obtient

$$\|\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2} - f_{\infty}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} = 0$$

i.e. f_{∞} est une C^1 -immersion isométrique de $(\mathbb{T}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2})$ dans $(\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}})$. $\square$

Remarque. De l'égalité :

$$g_k - f_{k-1,3}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} = (g_k - g_{k-1}) + (g_{k-1} - f_{k-1,3}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$$

on déduit :

$$\|g_k - f_{k-1,3}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \geq \left| \|g_k - g_{k-1}\|_{C^0} - \|g_{k-1} - f_{k-1,3}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \right|$$

et comme d'après la conclusion *ii*) du théorème d'étape on a :

$$\|g_{k-1} - f_{k-1,3}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|g_k - g_{k-1}\|_{C^0},$$

on conclut que :

$$\|g_k - f_{k-1,3}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} \geq \frac{1}{2} \|g_k - g_{k-1}\|_{C^0}.$$

La conséquence est que dans notre application itérative du théorème d'étape, nous pouvons prendre $\lambda = \frac{1}{2}$ dans le lemme 16. et pouvons reporter cette même valeur dans les conditions qui déterminent le choix des N_i .

3.4 Mise en forme en vue de l'implémentation

Dans ce paragraphe nous reformulons notre façon de choisir le nombre de corrugations de manière à l'adapter à la construction effective de la suite d'applications $f_{k,j}$ décrite dans le paragraphe précédent. Les notations sont celles du paragraphe 3.3.

3.4.1 Nouveau choix du nombre de corrugations

Théorème 3.4.1. *Soit ϵ un réel strictement positif. Il existe une famille d'entiers naturels $(N_{k,j})$, $j \in \{1, 2, 3\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, telle que la famille d'immersions $f_{k,j}$ construite comme ci-dessus vérifie les conditions suivantes :*

- i) $\|f_{k,j} - f_{k,j-1}\|_{C^0} \leq \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^k}.$
- ii) $\|df_{k,j} - df_{k,j-1}\|_{C^0} \leq \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} \|\Delta\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{7} \|\rho_j(D_{k,j})\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}.$
- iii) $err_{k,j} < \frac{4}{45\sqrt{3}} (\delta_{k+1} - \delta_k) \rho_{min}(\Delta).$

Démonstration et Commentaire

Le point *i*) provient de la C^0 -densité énoncé dans le théorème *I2C* du chapitre 2 :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall N_{k,j} \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_{k,j} - f_{k,j-1}\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_{k,j}}\right).$$

Un choix convenable de $N_{k,j}$ réalise la propriété *i*). Une conséquence immédiate est la C^0 -proximité de l'immersion limite f_∞ avec l'application initiale f_0 . En effet, cette hypothèse implique que la suite $(f_k := f_{k,3})_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $C^0(\mathbb{T}^2, \mathbb{E}^3)$. Sa limite dans vérifie :

$$f_\infty - f_0 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k - f_{k-1}.$$

Or

$$\begin{aligned} \|f_k - f_{k-1}\|_{C^0} &\leq \|f_{k,3} - f_{k,2}\|_{C^0} + \|f_{k,2} - f_{k,1}\|_{C^0} + \|f_{k,1} - f_{k,0}\|_{C^0} \\ &\leq 3 \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^k} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \|f_\infty - f_0\|_{C^0} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k - f_{k-1}\|_{C^0} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^k} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Le point *ii*) provient du théorème *I2C* du chapitre 2. En effet, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall N_{k,j} \in \mathbb{N}^*, \quad \|df_{k,j} - df_{k,j-1}\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N_{k,j}}\right) + \sqrt{7} \|\rho_j(D_{k,j})\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}$$

Un choix convenable de $N_{k,j}$ réalise *ii*). Quant au point *iii*) c'est une simple reformulation du lemme 16 (*lemme de bouclage*). $\square$

Chapitre 4

Algorithme général

Dans ce chapitre, nous présentons les étapes principales de l'algorithme général permettant de construire grâce à l'intégration convexe une suite d'immersions convergeant vers une immersion isométrique du tore carré plat et ϵ -proche d'une immersion initiale donnée du tore $\mathbb{T}^2$ dans l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbb{E}^3$. Rappelons que le principal objectif est de produire globalement ou localement une image, à l'aide de l'ordinateur, d'un plongement isométrique du tore carré plat dans l'espace à trois dimensions. Comme le plongement C^1 -isométrique de notre tore plat est le résultat d'un processus itératif infini (numériquement inaccessible), et puisqu'il n'y a aucune formule explicite pour la limite, l'algorithme génère en un nombre fini d'itérations une approximation de cette limite. Nous donnons aussi des conditions permettant la construction d'une telle suite ainsi que la condition d'arrêt de ce processus. Les techniques informatiques mises en oeuvre dans l'implémentation et la programmation C++ seront exposées dans le prochain chapitre.

4.1 Données initiales et calculs préliminaires

Les données initiales sont limitées aux cinq nombres suivants :

$$R \in \mathbb{R}_+^*, \quad r \in \mathbb{R}_+^*, \quad \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \gamma \in \mathbb{R}_+^*, \quad \text{et} \quad K \in \mathbb{N}^*$$

avec les contraintes :

$$R + r < 1 \quad \text{et} \quad r < R.$$

Nous allons donner la signification de chacune de ces données et rappeler brièvement les calculs (préliminaires) effectués par l'algorithme.

4.1.1 Immersion initiale et les nombres R et r

Les nombres r et R sont respectivement le petit et le grand rayon apparaissant dans la paramétrisation du tore standard :

$$f_{init} : \mathbb{E}^2 / \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3; \quad (x, y) \longmapsto (X(x, y), Y(x, y), Z(x, y))$$

avec :

$$\begin{cases} X(x, y) = \frac{1}{2\pi}(R + r \cos 2\pi x) \cos 2\pi y \\ Y(x, y) = \frac{1}{2\pi}(R + r \cos 2\pi x) \sin 2\pi y \\ Z(x, y) = \frac{r}{2\pi} \sin 2\pi x \end{cases}$$

La matrice associée à la première forme fondamentale $f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ de ce tore standard est donnée dans la base canonique par

$$\begin{aligned} I_{(x,y)} &= \begin{pmatrix} \langle \partial_x f_{init}, \partial_x f_{init} \rangle & \langle \partial_x f_{init}, \partial_y f_{init} \rangle \\ \langle \partial_y f_{init}, \partial_x f_{init} \rangle & \langle \partial_y f_{init}, \partial_y f_{init} \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos 2\pi x)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La contrainte $R+r < 1$ est donc nécessaire et suffisante pour que l'immersion f_{init} soit strictement courte.

4.1.2 Le défaut d'isométrie et le nombre γ

Le défaut d'isométrie est mesuré par le champ de formes bilinéaires symétriques définies positives :

$$\Delta : \mathbb{E}^2 / \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2 \otimes \mathbb{E}^2$$

définies par

$$\Delta(\cdot, \cdot) := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2} - f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

La norme de Δ est donnée par :

$$\|\Delta\|_{C^0} = \sup_{p \in \mathbb{T}^2} \|\Delta(p)\|_F$$

avec

$$\|\Delta(p)\|_F = \sqrt{\Delta_{xx}^2(p) + \Delta_{yy}^2(p) + 2\Delta_{xy}^2(p)}$$

la norme de Frobenius¹ de la matrice

$$\begin{pmatrix} \Delta_{xx}(p) & \Delta_{xy}(p) \\ \Delta_{yx}(p) & \Delta_{yy}(p) \end{pmatrix}$$

représentant $\Delta(p)$ dans la base (∂_x, ∂_y) . On décompose Δ au moyen de trois métriques primitives. Rappelons que les trois métriques primitives que nous avons choisies sont les suivantes :

$$\ell_1 \otimes \ell_1, \quad \ell_2 \otimes \ell_2, \quad \ell_3 \otimes \ell_3,$$

1. Rappelons que la norme de Frobenius $\|A\|_F$ d'une matrice carrée A est le nombre $\sqrt{\text{tr}(TAA)}$. Cette norme est sous-multiplicative et compatible avec la norme euclidienne, i. e. pour tout vecteur V on a : $\|AV\| \leq \|A\|_F \|V\|$.

où ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont les trois formes linéaires :

$$\ell_1 = \partial_x^*, \quad \ell_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\partial_x^* + 2\partial_y^*), \quad \ell_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\partial_x^* - 2\partial_y^*).$$

Un calcul direct (cf page..) montre que si

$$D = D_{xx}\partial_x^* \otimes \partial_x^* + D_{xy}(\partial_x^* \otimes \partial_y^* + \partial_y^* \otimes \partial_x^*) + D_{yy}\partial_y^* \otimes \partial_y^*$$

alors

$$D = \alpha_1 \ell_1 \otimes \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 \otimes \ell_2 + \alpha_3 \ell_3 \otimes \ell_3,$$

avec

$$\alpha_1 = D_{xx} - \frac{1}{4}D_{yy}, \quad \alpha_2 = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}D_{yy} + D_{xy}\right), \quad \alpha_3 = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}D_{yy} - D_{xy}\right). \quad (4.1)$$

La convexité du cône des métriques permet de décomposer le défaut d'isométrie Δ comme une somme de trois métriques primitives :

$$\Delta = \sum_{j=1}^3 \rho_j \ell_j \otimes \ell_j.$$

Un calcul simple montre que si $R + r < 1$ alors le défaut d'isométrie Δ est à valeurs dans le cône positif :

$$\mathcal{C} := \{\rho_1 \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2 \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3 \ell_3 \otimes \ell_3 \mid \rho_1 > 0, \rho_2 > 0, \rho_3 > 0\}$$

engendré par les métriques $\ell_j \otimes \ell_j, j \in \{1, 2, 3\}$ c'est-à-dire que les ρ_j sont des fonctions strictement positives. En effet :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{(\partial_x, \partial_y)}(\Delta) &= \begin{pmatrix} \Delta_{xx}(p) & \Delta_{xy}(p) \\ \Delta_{yx}(p) & \Delta_{yy}(p) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - r^2 & 0 \\ 0 & 1 - (R + r \cos 2\pi x)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

soit

$$\Delta = (1 - r^2) \partial_x^* \otimes \partial_x^* + (1 - (R + r \cos 2\pi x)^2) \partial_y^* \otimes \partial_y^*$$

et donc d'après (4.1), on a :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \Delta_{xx} - \frac{1}{4}\Delta_{yy} \\ &= 1 - r^2 - \frac{1}{4}(1 - (R + r \cos 2\pi x)^2) \\ &= \frac{3}{4} - r^2 + (R + r \cos 2\pi x)^2 \\ &\geq R^2 - 2rR + \frac{3}{4} \\ &> 0 \end{aligned}$$

En effet considéré comme trinome de second degré en R , $R^2 - 2rR + 3/4$ est toujours strictement positif dès que son discriminant $4r^2 - 3$ est strictement négatif i.e. $r < \sqrt{3}/2$. Ce qui sera toujours

le cas. En effet ; les conditions $R + r < 1$ et $r < R$ impliquent $r \leq 1/2$. Quand aux deux autres coefficients, on a :

$$\rho_2 = \rho_3 = 5/8(1 - (R + r \cos 2\pi x)^2) \geq 5/8(1 - (R + r)^2) > 0.$$

Ainsi ρ_1 , ρ_2 et ρ_3 sont des fonctions strictement positives. On pose :

$$\rho_{\min}(\Delta) := \min_{p \in \mathbb{T}^2} \{\rho_1(p), \rho_2(p), \rho_3(p)\}.$$

On définit sur la variété riemannienne $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}^2 := \mathbb{T}^2$ une suite de métriques $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers la métrique plate $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2}$. Cette suite est définie par :

$$g_k := f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \delta_k \Delta,$$

où l'on a choisi :

$$\delta_k = 1 - e^{-\gamma k}.$$

La constante $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ permet le contrôle de la vitesse de convergence de la suite de métriques $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ vers la métrique plate $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^2}$.

4.1.3 Les nombres K et ϵ

L'algorithme produit les K premiers termes d'une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'immersions convergeant vers une immersion isométrique. En notant f_∞ la limite des f_K en $+\infty$, il garantit en outre que :

$$\|f_K - f_\infty\|_{C^0} \leq \frac{\epsilon}{2K} \quad \text{et} \quad \|f_K - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon.$$

4.2 Construction de la suite

La suite $(f_k)_{k \leq K}$ est en réalité extraite d'une suite d'applications $(f_{k,j})_{k \in \mathbb{N}^*, j \in \{1,2,3\}}$ générées par l'algorithme. Plus précisément, l'algorithme construit la suite d'applications suivantes :

$$\begin{aligned} f_{0,3} = f_{init} &= f_0; \\ f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3} &= f_1; \\ f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3} &= f_2; \\ \dots &\dots \\ f_{K,1}, f_{K,2}, f_{K,3} &= f_K. \end{aligned}$$

Ainsi, les applications f_k ne sont autres que les $f_{k,3}$. Chaque immersion f_k est à la fois une quasi-isométrie pour g_k et une application strictement courte pour g_{k+1} . Elle est obtenue à partir de f_{k-1} en effectuant trois corrugations successives selon trois directions différentes afin d'obtenir trois immersions $f_{k,1}$, $f_{k,2}$ et $f_{k,3} = f_k$. Ces immersions sont déterminées itérativement. Si $f_{k,j-1}$ est construite, on décompose le champ de formes bilinéaires symétriques :

$$D_{k,j} : = g_k - f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

dans la base $(\ell_1 \otimes \ell_1; \ell_2 \otimes \ell_2; \ell_3 \otimes \ell_3)$. Il existe, alors trois fonctions $\rho_{k,1}(D_{k,j})$, $\rho_{k,2}(D_{k,j})$ et $\rho_{k,3}(D_{k,j})$ telles que

$$D_{k,j} = \sum_{s=1}^3 \rho_{k,s}(D_{k,j}) \ell_s \otimes \ell_s.$$

L'algorithme va garantir que si $j = 1$ alors les fonctions $\rho_{k,s}(D_{k,1})$, $s \in \{1, 2, 3\}$ sont strictement positives et si $j > 1$ alors $\rho_{k,j}(D_{k,j})$ est strictement positive. La construction de $f_{k,j}$ à partir de $f_{k,j-1}$ constitue la procédure principale de l'algorithme. Elle est décrite au prochain paragraphe

4.3 La procédure principale

Nous allons expliciter la construction de $f_{k,j}$ en 8 étapes

ÉTAPE 1 :

Construction d'une métrique auxillaire

Le défaut d'isométrie $D_{k,j}$ vérifie :

$$\begin{aligned} D_{k,j} : &= g_k - f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ &= \sum_{s=1}^3 \rho_{k,s}(D_{k,j}) \ell_s \otimes \ell_s, \end{aligned}$$

Par hypothèse

$$\rho_{k,j}(D_{k,j}) > 0,$$

Donc le champ de formes bilinéaires symétriques

$$\mu_{k,j} := f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_{k,j}(D_{k,j}) \ell_j \otimes \ell_j.$$

définit une métrique sur le tore plat $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Le but de la procédure est de réduire le défaut d'isométrie de l'immersion courte suivante :

$$f_{k,j-1} : (\mathbb{T}^2, \mu_{k,j}) \longrightarrow (\mathbb{E}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^3})$$

On choisit comme domaine fondamental du tore plat $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le rectangle $(O; U(j), V(j))$. Tous les calculs seront effectués dans ce repère orthogonal.

Rappelons que nous avons pris :

$$V(1) := \partial_y, \quad V(2) := -2\partial_x + \partial_y, \quad V(3) := 2\partial_x + \partial_y.$$

et

$$U(1) := \partial_x, \quad U(2) := \frac{1}{5}(\partial_x + 2\partial_y) \quad \text{et} \quad U(3) := \frac{1}{5}(\partial_x - 2\partial_y)$$

ÉTAPE 2 :

Construction des champs de vecteurs $W_{k,j}$

On définit un champ de vecteurs $W_{k,j}$ en tout point $p \in \mathbb{T}^2$ par la formule :

$$W_{k,j} = U(j) + \zeta_{k,j} V(j) \quad \text{avec} \quad \zeta_{k,j} := -\frac{f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(V(j), U(j))}{f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}(V(j), V(j))}$$

Ce champ de vecteurs est $\mu_{k,j}$ -orthogonal à $V(j)$. Dit autrement $W_{k,j}$ vérifie l'équation suivante :

$$\mu_{k,j}(V(j), W_{k,j}) = 0.$$

ÉTAPE 3 :

Calcul du flot $\varphi_{k,j}$ du champs de vecteurs $W_{k,j}$

Soit $p := tV(j)$, $t \in [0 ; 1]$ un point du tore sur "le cercle de conditions initiales" $\mathbb{R}/\mathbb{Z} V(j)$.
Considérons l'équation différentielle :

$$\begin{cases} W_{k,j} \circ \varphi_{k,j}(p, s) &= \frac{\partial \varphi_{k,j}(p, s)}{\partial s} \\ \varphi_{k,j}(p, 0) &= p \end{cases}$$

En décomposant φ dans la base $(U(j), V(j))$:

$$\varphi_{k,j}(p, s) = X(s)U(j) + Y(s)V(j),$$

l'équation différentielle ci-dessus devient équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} X' &= 1 \\ Y' &= \zeta_{k,j}(X, Y) \\ X(0)U(j) + Y(0)V(j) &= p \end{cases}$$

qui se réduit à un système monodimensionnel :

$$X(s) = s \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y'(s) &= \zeta_{k,j}(s, Y) \\ Y(0) &= t. \end{cases}$$

(Du fait que $p = tV(j)$ on a $X(0) = 0$ et $Y(0) = t$).

La résolution de ce système pour tout point p détermine complètement le flot du champ de vecteurs $W_{k,j}$. L'étape 3 consiste en la résolution de ce système.

ÉTAPE 4 :

Construction de la fonction h

On commence par calculer les grandeurs suivantes :

$$r : = \sqrt{\mu_{k,j}(W_{k,j}, W_{k,j})}$$

$$\mathbf{t} : = (W_{k,j} \cdot f_{k,j-1}) / \|(W_{k,j} \cdot f_{k,j-1})\|$$

$$\mathbf{n} : = W_{k,j} \cdot f_{k,j-1} \wedge V(j) \cdot f_{k,j-1} / \|W_{k,j} \cdot f_{k,j-1} \wedge V(j) \cdot f_{k,j-1}\|$$

$$\alpha : = J_0^{-1}(\|(W_{k,j} \cdot f_{k,j-1})\|/r)$$

On définit alors la fonction h de la manière suivante : pour tout point $p := sV(j)$, $s \in [0; 1]$ sur le cercle de conditions initiales $\mathbb{R}/\mathbb{Z} V(j)$, pour tout $t \in [0; 1]$ et pour tout $u \in [0; 1]$ on pose :

$$\begin{aligned} h(\varphi_{k,j}(p, t), u) &= r(\varphi_{k,j}(p, t)) \cos(\alpha(\varphi_{k,j}(p, t)) \cos(2\pi u)) \mathbf{t}(\varphi_{k,j}(p, t)) \\ &+ r(\varphi_{k,j}(p, t)) \sin(\alpha(\varphi_{k,j}(p, t)) \cos(2\pi u)) \mathbf{n}(\varphi_{k,j}(p, t)) \end{aligned}$$

ÉTAPE 5 :

Construction de $F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}$

Dans cette étape, nous déterminons l'application $F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}$ obtenue à partir de $f_{k,j-1}$ par le processus d'intégration convexe le long des courbes intégrales et sans recollement. Nous choisissons comme valeur initiale du nombre d'oscillations l'entier positif :

$$N_{k,j} = 2N_{k,j-1}$$

et on pose pour tout point $p := sV(j)$, $s \in [0; 1]$ sur le cercle de conditions initiales $\mathbb{R}/\mathbb{Z} V(j)$ et pour tout $t \in [0; 1]$:

$$F_{k,j}(\varphi_{k,j}(p, t)) = f_{k,j-1}(\varphi_{k,j}(p, 0)) + \int_0^t h(\varphi_{k,j}(p, u), Nu) du$$

Il s'agit d'une application définie sur le cylindre $\mathbb{R}/\mathbb{Z} V(j) \times [0, 1]$. Formellement :

$$\varphi_{k,j} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} V(j) \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} V(j) \times [0, 1] U(j)$$

et

$$F_{k,j} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} V(j) \times [0, 1] U(j) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ÉTAPE 6 : Le recollement

Dans cette étape, on corrige l'application $F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}$ définie sur le cylindre de façon à obtenir une application définie sur le tore $\mathbb{T}^2$. Nous posons pour cela :

$$f_{k,j} \circ \varphi(p, t) = F_{k,j} \circ \varphi(p, t) - w(t)(F_{k,j} \circ \varphi(p, 1) - f_{k,j-1} \circ \varphi(p, 1))$$

où $w : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ est une fonction C^∞ croissante en forme de «S» qui vérifie les conditions suivantes :

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 1, \quad \text{et} \quad w^{(k)}(0) = w^{(k)}(1) = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

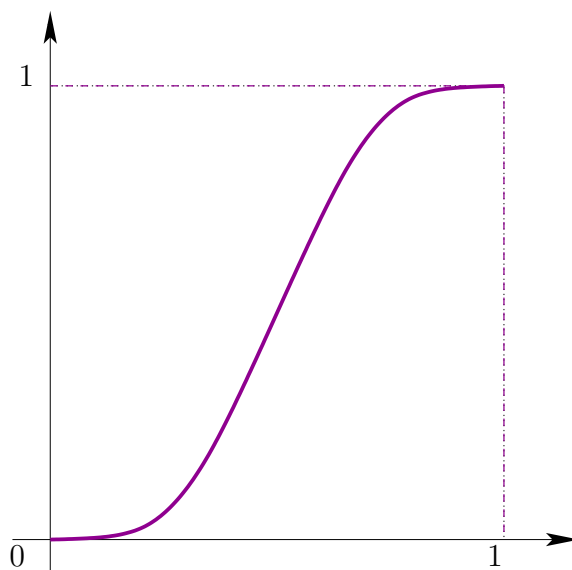


FIGURE 4.1 – représentation graphique de W .

ÉTAPE 7 :

Extraction de $f_{k,j}$

Il s'agit d'une procédure permettant d'inverser le flot et d'obtenir l'expression de $f_{k,j}$ en tout point q de coordonnées (X, Y) dans le repère $(O; U(j), V(j))$ du tore. Cette procédure sera discutée amplement au prochain chapitre.

ÉTAPE 8 :

TEST et Choix des nombres de corrugation

Le test de validation consiste à vérifier que le choix de $N_{k,j}$ permet aux trois conditions suivantes d'être satisfaites :

- i) $\|f_{k,j} - f_{k,j-1}\|_{C^0} \leq \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^k}$
- ii) $\|df_{k,j} - df_{k,j-1}\|_{C^0} \leq \sqrt{\delta_k - \delta_{k-1}} \|\Delta\|_{C^0}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{35} \|\rho_j(D_{k,j})\|_{C^0}^{\frac{1}{2}}$
- iii) $err_{k,j} := \|\mu_{k,j} - f_{k,j}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} < \frac{4}{45\sqrt{3}} (\delta_{k+1} - \delta_k) \rho_{min}(\Delta)$.

Nous allons interpreter chacune de ces conditions :

i) permet d'assurer la C^0 -densité et par conséquent elle assure que f_K se trouve dans la boule $B(f_{ini}; \epsilon)$. En effet, en utilisant l'inégalité triangulaire nous avons :

$$\begin{aligned}
 \|f_K - f_{init}\|_{C^0} &\leq \sum_{k=1}^K \|f_k - f_{k-1}\|_{C^0} \\
 &\leq \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^3 \|f_{k,j} - f_{k,j-1}\|_{C^0} \\
 &\leq \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^3 \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^k} \\
 &\leq \sum_{k=1}^K \frac{1}{2^k} \epsilon \\
 &\leq \epsilon.
 \end{aligned}$$

ii) assure que l'immersion limite est au moins C^1

iii) permet d'avoir à chaque corrugation le défaut d'isométrie dans le cône des métriques défini au chapitre 3

Dans le cas où l'une des conditions fait défaut, on double la valeur de $N_{k,j}$ et on retourne à l'étape 5 pour reconstruire à nouveau $F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}$.

On trouve dans la page suivante l'organigramme de tout le programme permettant de construire une immersion quasi-isométrique du tore plat dans l'espace tri-dimensionnel.

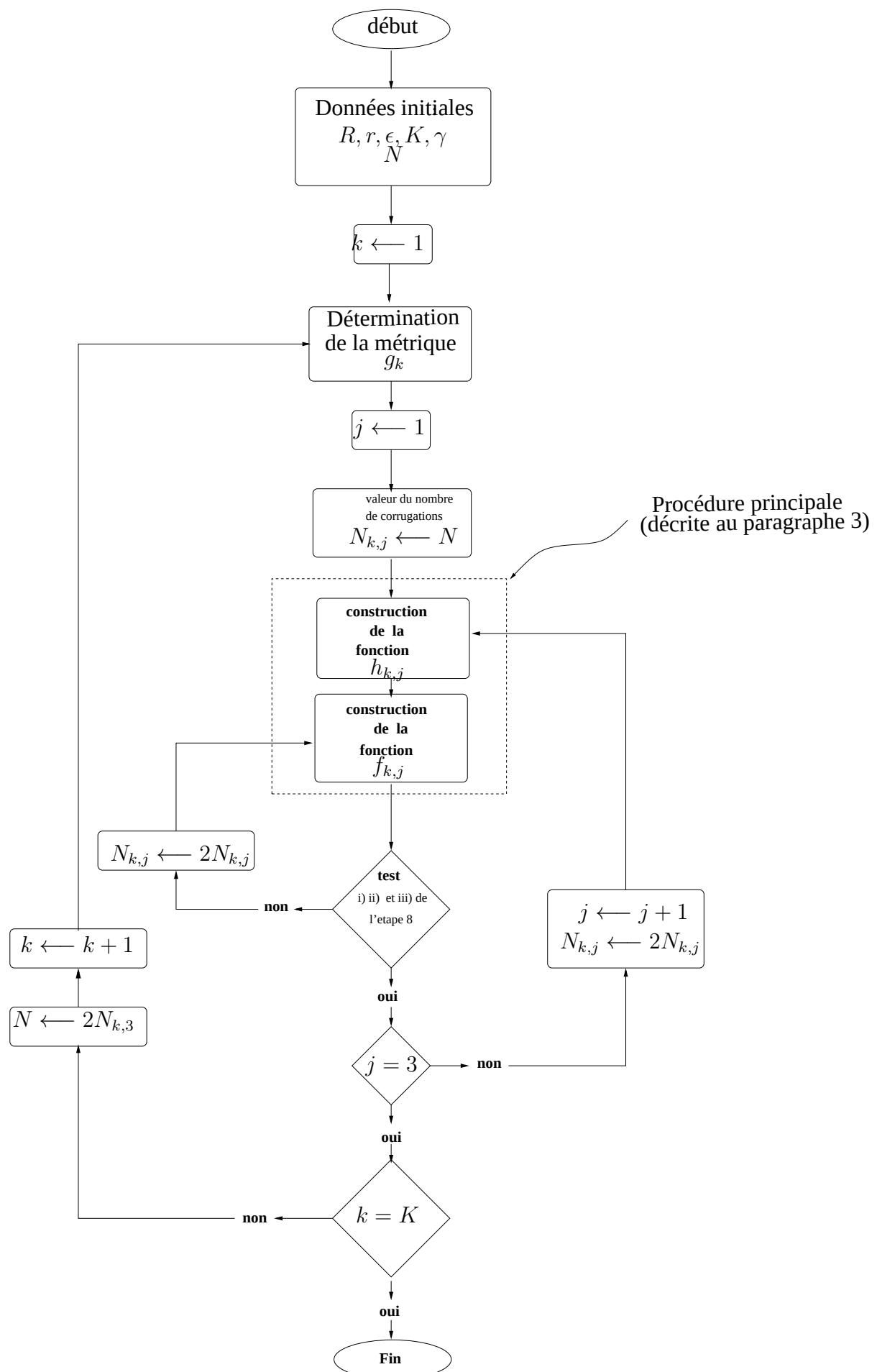


FIGURE 4.2 – Organigramme de programmation

Chapitre 5

Implémentation

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter des techniques mathématiques et informatiques utilisées dans le programme C++. Elles sont mises en œuvre pour l'implémentation du processus d'intégration convexe. Rappelons que le principal objectif est de produire globalement ou localement une image, par l'ordinateur, du plongement (quasi-)isométrique du tore plat dans l'espace à trois dimensions.

Comme le plongement C^1 -isométrique de notre tore plat est le résultat d'un processus itératif infini (numériquement inaccessible), et puisqu'il n'y a aucune formule ni explicite ni implicite pour la limite, nous avons effectivement calculé une approximation de cette limite. En pratique, l'application de quatre corrugations successives sur un tore initial (non isométrique) donne visuellement des résultats satisfaisants et comme on le verra dans le dernier paragraphe de ce chapitre, au-delà de ces quatre intégrations les oscillations deviennent indiscernables à l'oeil nu.

Ce chapitre est divisé en plusieurs paragraphes. Le premier paragraphe décrit la manière dont les applications continues sont encodées par des grilles discrètes dans l'ordinateur ainsi que le choix de la méthode d'interpolation surfacique mise en œuvre. Dans le paragraphe 5.2, nous expliquons comment est calculé numériquement le flot du champ de vecteurs $W_{k,j}$ nécessaire pour chaque corrugation. L'intégration convexe discrétisée est décrite dans les paragraphes 5.3 et 5.4. Le choix de l'immersion initiale est discuté au paragraphe 5.5. Nous expliquerons dans le paragraphe 5.6 comment choisir le paramètre principal du processus, c'est-à-dire le nombre d'oscillations. Nous terminons ce chapitre par une étude locale.

5.1 Codage des immersions

5.1.1 Discrétisation

Notre première préoccupation est de représenter les immersions successives $f := f_{k,j}$ dans le but d'effectuer des calculs numériques par ordinateur. Nous discrétisons donc f afin d'obtenir une représentation finie. Nous avons choisi d'échantillonner f avec une grille carrée de $n \times n$ sommets. Le choix du paramètre n est discuté au paragraphe 5.6. Les trois coordonnées de f seront évaluées aux noeuds de la grille :

$$p^{i,j} := (i/n, j/n), \quad 0 \leq i, j < n.$$

Ainsi, on pose :

$$f^{i,j} := f(p^{i,j}). \quad (5.1)$$

5.1.2 Interpolation

Nous remarquons que le processus d'intégration convexe, dans notre cas, repose sur le calcul de certains flots et intégrales qui ne dépendent que de l'application f et de ses dérivées premières. Il s'avère que les schémas numériques usuels pour résoudre les équations différentielles ou pour évaluer les intégrales nécessitent la connaissance du flot ou de l'intégrande en des points n'appartenant pas à la grille ci-dessus. Afin de fournir ces valeurs en des points n'appartenant pas à la grille, nous associons $n \times n$ noeuds représentant f une surface interpolante bicubique C^1 $\hat{f} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ basée sur les splines cubiques d'Hermite¹. Cette surface nous permettra d'évaluer f et ses dérivées en tout point hors de la grille et telle que

$$\hat{f}(p^{i,j}) = f^{i,j}.$$

Nous évaluons $\hat{f}$ en des points n'appartenant pas à la grille comme suit : nous estimons en premier les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(p^{i,j})$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(p^{i,j})$ en utilisant une méthode de différences finies d'ordre 4. Rappelons que cela consiste à approcher la dérivée $g'(x)$ d'une fonction g par l'expression :

$$\frac{1}{12h}(g(x-2h) - 8g(x-h) + 8g(x+h) - g(x+2h)). \quad (5.2)$$

Notons respectivement $f_x^{i,j}$ et $f_y^{i,j}$ les estimations des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(p^{i,j})$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(p^{i,j})$.

En utilisant (5.2) avec $h = 1/N$, nous avons donc :

$$f_x^{i,j} := \frac{n}{12}(f^{i-2,j} - 8f^{i-1,j} + 8f^{i+1,j} - f^{i+2,j}) \quad (5.3)$$

$$f_y^{i,j} := \frac{n}{12}(f^{i,j-2} - 8f^{i,j-1} + 8f^{i,j+1} - f^{i,j+2}). \quad (5.4)$$

Considérons maintenant les quatre fonctions de base de l'interpolation de Hermite définies pour tout $t \in [0, 1]$ par :

$$h_{00}(t) := (1+2t)(1-t)^2, \quad h_{01}(t) := t^2(3-2t), \quad h_{10}(t) := t(1-t)^2 \quad \text{et} \quad h_{11}(t) := t^2(t-1).$$

Nous définissons alors l'interpolation par splines cubiques de Hermite dite *horizontale* comme suit :

$$f_h^{i,j}(t) := h_{00}(t)f^{i,j} + h_{01}(t)f^{i+1,j} + h_{10}(t)f_x^{i,j}/n + h_{11}(t)f_x^{i+1,j}/n.$$

Finalement la fonction $\hat{f}$ est définie au point de paramètre (x, y) inclus dans la maille $P^{i,j} := [p^{i,j}, p^{i+1,j}, p^{i+1,j+1}, p^{i,j+1}]$ de la grille par une interpolation *verticale* (cf Fig. 5.1) :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) := & h_{00}(y_j)f_h^{i,j}(x_i) + h_{01}(y_j)f_h^{i,j+1}(x_i) + \\ & h_{10}(y_j)(f_h^{i,j})_y(x_i)/n + h_{11}(y_j)(f_h^{i,j+1})_y(x_i)/n, \end{aligned} \quad (5.5)$$

1. Nous avons aussi essayé d'utiliser une interpolation bilinéaire de surface.

où

$$(x_i, y_j) := (nx - i, ny - j)$$

sont des coordonnées locales de (x, y) dans la maille $P^{i,j}$. Les estimations des dérivées $(f_h^{i,j})_y(x)$ et $(f_h^{i,j+1})_y(x)$ sont obtenues avec la formule (5.4) utilisant les valeurs $f_h^{i,k}(x)$ à la place des points d'échantillonnage de $f^{i,k}$, i.e. :

$$\begin{aligned} (f_h^{i,j})_y(x) &:= \frac{n}{12} \left(f_h^{i,j-2}(x) - 8f_h^{i,j-1}(x) + 8f_h^{i,j+1}(x) - f_h^{i,j+2}(x) \right) \\ (f_h^{i,j+1})_y(x) &:= \frac{n}{12} \left(f_h^{i,j-1}(x) - 8f_h^{i,j}(x) + 8f_h^{i,j+2}(x) - f_h^{i,j+3}(x) \right). \end{aligned}$$

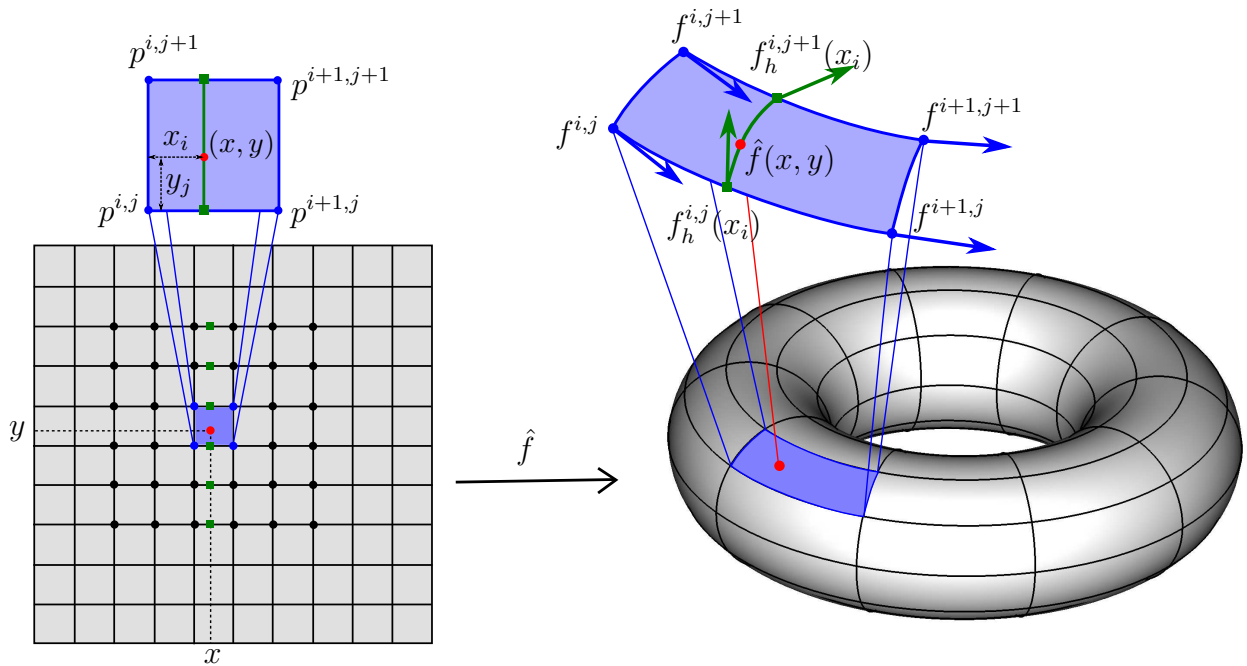


FIGURE 5.1 – Interpolation de f au point (rouge) de paramètre (x, y) . La valeur de f en chaque point carré (vert) de l'espace des paramètres est interpolée avec des splines cubiques horizontales. Les valeurs en ces six points carrés sont utilisées pour estimer les deux dérivées par rapport à y figurées par des flèches (vertes) sur la figure de droite. Le calcul de $\hat{f}(x, y)$ implique les 36 noeuds de la grille de paramètres indiqués par des points gras sur la figure de gauche.

Remarquons que les rôles de l'interpolation horizontale et verticale peuvent être interchangés sans que cela n'affecte la définition de $\hat{f}$. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) &= h_{00}(x_i) f_v^{i,j}(y_j) + h_{01}(x_i) f_v^{i,j+1}(y_j) + \\ &\quad h_{10}(x_i) (f_v^{i,j})_x(y_j)/n + h_{11}(x_i) (f_v^{i,j+1})_x(y_j)/n, \end{aligned}$$

où

$$f_v^{i,j}(t) := h_{00}(t) f^{i,j} + h_{01}(t) f^{i,j+1} + h_{10}(t) f_y^{i,j}/n + h_{11}(t) f_y^{i,j+1}/n. \quad (5.6)$$

Avec l'aide de la table ci-dessous, la continuité de $\hat{f}$ ainsi que de ses dérivées partielles $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \hat{f}}{\partial y}$ le long des bords de la grille peut être vérifiée facilement.

fonction F	$F(0)$	$F(1)$	$F'(0)$	$F'(1)$
h_{00}	1	0	0	0
h_{01}	0	1	0	0
h_{10}	0	0	1	0
h_{11}	0	0	0	1
$f_h^{i,j}$	$f^{i,j}$	$f^{i+1,j}$	$n f_x^{i,j}$	$n f_x^{i+1,j}$

En effet, pour un point de paramètre $(x, j/n)$ du segment $[p^{i,j}, p^{i+1,j}]$, on obtient $\hat{f}(x, j/n) = f_h^{i,j}(x)$, considérant que $(x, j/n)$ appartient soit au bord inférieur de la grille $P^{i,j}$ soit au bord supérieur de $P^{i,j-1}$. De même, pour un point de paramètre $(i/n, y)$ du segment $[p^{i,j}, p^{i,j+1}]$, nous trouvons $\hat{f}(i/n, y) = f_v^{i,j}$ dans les deux cellules incidentes $P^{i,j}$ et $P^{i-1,j}$ de la grille. Cela se voit mieux en utilisant la seconde formulation (5.6) de $\hat{f}$.

Par dérivation de (5.5), nous calculons $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(x, j/n) = \frac{\partial f_h^{i,j}}{\partial x}(x)$ en considérant $(x, j/n)$ dans l'une ou l'autre des deux cellules incidentes à $[p^{i,j}, p^{i+1,j}]$.

Les conditions de continuité restantes peuvent être vérifiées de la même manière. Nous concluons que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{T}^2$. Nous pouvons maintenant dériver formellement $\hat{f}$ et fournir une estimation des dérivées (du premier ordre) de f .

Dans le programme informatique, $\hat{f}$ et ses dérivées du premier ordre sont en effet explicitement utilisées à la place de f et de ses dérivées de premier ordre.

La figure 5.2 ci-dessous montre les effets de l'interpolation sur un tore échantillonné.

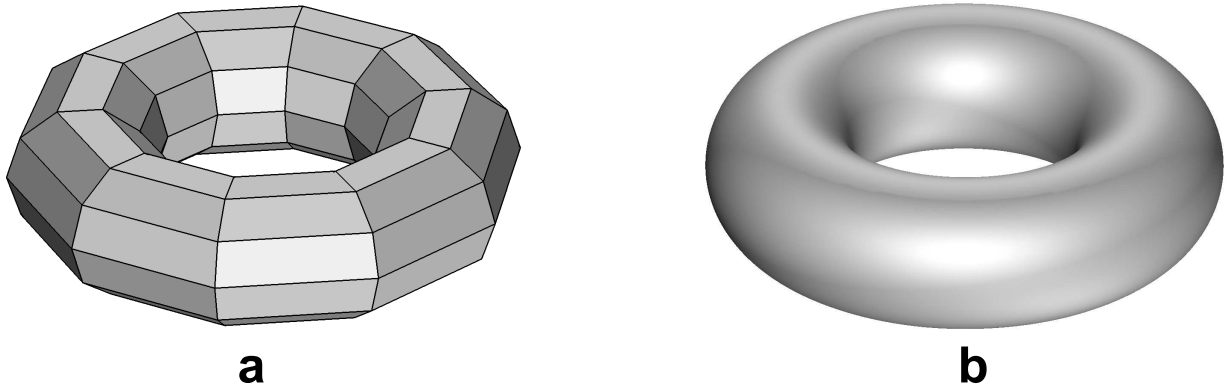


FIGURE 5.2 – a : Le tore standard échantillonné avec une grille 10×10 . **b :** Interpolation du tore précédent.

Bien que la surface interpolée $\hat{f}$ ne soit pas en général pas C^2 , dans la pratique elle semble être bien adaptée pour nos calculs comme en témoigne la figure 5.2b qui correspond à la fonction $\hat{f}$ construite à partir de la figure 5.2a. Rappelons que la régularité du plongement isométrique du tore carré plat dans l'espace euclidien n'est pas C^2 .

5.2 Champs de vecteurs et calcul du flot

Rappelons que la construction de $f_{k,j}$ à partir de $f_{k,j-1}$ repose sur le calcul du flot du champ de vecteurs

$$W_{k,j} = V^\perp(j) + \zeta_{k,j} V(j)$$

avec

$$\zeta_{k,j} = -\frac{\langle V^\perp(j) \cdot f_{k,j-1}, V(j) \cdot f_{k,j-1} \rangle_{\mathbb{R}^3}}{\langle V(j) \cdot f_{k,j-1}, V(j) \cdot f_{k,j-1} \rangle_{\mathbb{R}^3}},$$

où $V(j)$ et $V^\perp(j)$ sont des champs de vecteurs constants donnés par :

$$V(1) := \partial_y, \quad V(2) := -2\partial_x + \partial_y, \quad V(3) := 2\partial_x + \partial_y$$

et

$$V^\perp(1) := \partial_x, \quad V^\perp(2) := \frac{1}{5}(\partial_x + 2\partial_y), \quad V^\perp(3) := \frac{1}{5}(\partial_x - 2\partial_y).$$

Le calcul de $W_{k,j}$, en particulier de $\zeta_{k,j}$, nécessite le calcul des dérivées premières de $f_{k,j-1}$, dont l'évaluation a été décrite dans le paragraphe 5.1. L'étape suivante sera de calculer les courbes intégrales $\varphi_{k,j}(t, \cdot)$ de $W_{k,j}$ de condition initiale $\varphi_{k,j}(t, 0) = tV(j)$. On utilise le solveur d'Hairer basé sur le DOPRI5 pour des équations différentielles non raides. Ce code utilise une méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 5 avec un pas adaptatif. La non raideur de notre équation différentielle repose sur les valeurs propres 0 et $V(j) \cdot \zeta_{k,j}$ de la matrice jacobienne de $W_{k,j}$. Bien que nous n'avons pas évalué ces valeurs propres, le code d'Hairer est capable de détecter à quel moment cette équation devient raide, ce qui ne s'est jamais produit dans notre cas.

Pour chaque $i = 0 \dots n-1$, on appelle le code d'Hairer pour résoudre l'équation différentielle du premier ordre :

$$\phi'(s) = W_{k,j}(\phi(s)) \quad \text{avec} \quad \phi(0) = \frac{i}{n}V(j).$$

Le solveur d'Hairer nous fournit $\varphi_{k,j}(i/n, l/n) = \phi(l/n)$ pour $0 \leq l < n$. Ces valeurs sont stockées dans un tableau de dimension $n \times n$ dont l'entrée (i, l) contient $\varphi_{k,j}(i/n, l/n)$.

La figure 5.3 montre les courbes intégrales pour les quatre premières corrugations. Elles ont été calculées avec une grille de $10,000^2$ points. Seules 100 parmi les 10,000 courbes intégrales ont été dessinées à chaque étape.

5.3 Corrugation le long des courbes intégrales

5.3.1 Corrugation sans recollement

Nous sommes maintenant prêts à appliquer l'intégration convexe. Nous commençons par construire l'application $F_{k,j}$ définie sur le cylindre $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$:

$$F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}(t, s) := f_{k,j-1}(tV(j)) + \int_{u=0}^s h(\varphi_{k,j}(t, u), N_{k,j}u) du, \quad (5.7)$$

où

$$h(t, s, u) = r(t, s)(\cos(\alpha(t, s) \cos(2\pi u))\mathbf{t}(t, s) + \sin(\alpha(t, s) \cos(2\pi u))\mathbf{n}(t, s)) \quad (5.8)$$

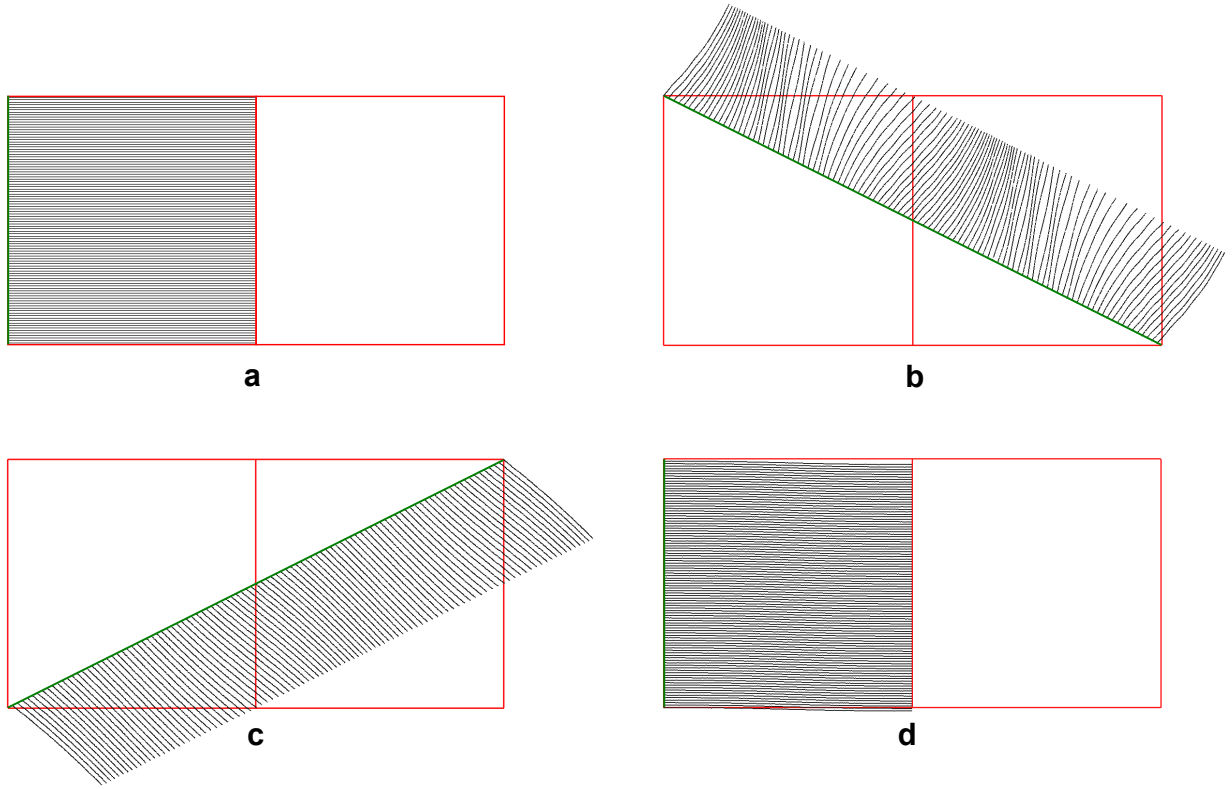


FIGURE 5.3 – courbes intégrales de $W_{k,j}$. Dans chaque figure, les deux carrés unitaires (rouges) représentent des domaines fondamentaux de l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. **a)** les dérivées partielles de la paramétrisation usuelle du tore standard sont orthogonales. Le champ de vecteurs correspondant $W_{11} = V(1)$ est constant et vaut ∂_x . Ses courbes intégrales sont des lignes horizontales. **b)** Pour la seconde corrugation, l'origine de chaque courbe intégrale est sur la droite de direction $V(2)$ passant par l'origine. **c)** À la troisième corrugation, l'immersion s'approche d'une isométrie. En conséquence, le champ de vecteurs $W_{1,3}$ s'approche du champ constant $V^\perp(j)$ et ces courbes intégrales sont presque des lignes droites, mais pas encore orthogonales à $V(3)$. **d)** Quant à la quatrième corrugation, le champ de vecteurs W_{11} est presque constant et horizontal.

avec

$$\begin{aligned}
 r &:= \sqrt{\mu(W_{k,j}, W_{k,j})}, \\
 \mathbf{t} &:= \frac{W_{k,j} \cdot f_{k,j-1}}{\|W_{k,j} \cdot f_{k,j-1}\|}, \\
 \mathbf{n} &:= \frac{W_{k,j} \cdot f_{k,j-1} \wedge V(j) \cdot f_{k,j-1}}{\|W_{k,j} \cdot f_{k,j-1} \wedge V(j) \cdot f_{k,j-1}\|}, \\
 \alpha &= J_0^{-1}\left(\frac{\|W_{k,j} \cdot f_{k,j-1}\|}{r}\right).
 \end{aligned}$$

La métrique auxiliaire μ est donnée par :

$$\mu = f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \rho_j(D_{k,j}) \ell_j \otimes \ell_j$$

où

$$\begin{aligned}
 D_{k,j} &:= g_k - f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} \\
 &= \rho_1(D_{k,j}) \ell_1 \otimes \ell_1 + \rho_2(D_{k,j}) \ell_2 \otimes \ell_2 + \rho_3(D_{k,j}) \ell_3 \otimes \ell_3,
 \end{aligned}$$

Quant à la suite de métriques $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$; rappelons qu'elle est donnée par :

$$g_k := (1 - \delta_k) f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3} + \delta_k \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$$

avec

$$\delta_k = 1 - e^{-k/10}.$$

En pratique , toutes les métriques sont considérées comme des matrices carrées d'ordre 2 dans des bases canoniques. En particulier, les coefficients du tiré en arrière $f_{k,j-1}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ sont des produits scalaires des dérivées partielles premières de $f_{k,j-1}$. Notons aussi qu'il s'agit d'un simple calcul d'algèbre linéaire que de déterminer les coefficients $\rho_j(D_{k,j})$ de la décomposition de $D_{k,j}$.

Pour évaluer l'intégrale (5.7) on utilise le même solveur d'Hairer comme pour le flot. En effet, pour t fixé, l'équation (5.7) peut être vue comme solution de l'équation différentielle :

$$y'(u) = h(\varphi_{k,j}(t, u), N_{k,j}u) \quad \text{avec la condition initiale} \quad y(0) = f_{k,j-1}(tV(j)).$$

On résout cette équation pour les valeurs échantillonnées :

$$t = i/n, \quad 0 \leq i < n.$$

Pour un tel t fixé, on évalue la solution

$$F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}(t, u) = y(u)$$

aux valeurs échantillonnées

$$u = l/n, \quad 0 \leq l \leq n.$$

Nous avons eu des résultats plus précis avec le code de Hairer qu'avec la formule du trapèze, pour le calcul d'intégrales. À la fin on obtient un tableau de dimension $n \times (n + 1)$ dont l'entrée (i, l) contient $F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}(i/n, l/n)$.

5.3.2 Le recollement

Il reste à effectuer le recollement des bords de cette immersion du cylindre pour obtenir une immersion du tore. On pose ainsi :

$$f_{k,j} \circ \varphi_{k,j}\left(\frac{i}{n}, \frac{l}{n}\right) = F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}\left(\frac{i}{n}, \frac{l}{n}\right) + w\left(\frac{l}{n}\right) \left(f_{k,j-1} \circ \varphi_{k,j}\left(\frac{i}{n}, 1\right) - F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}\left(\frac{i}{n}, 1\right) \right)$$

où

$$w : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

est une fonction lisse vérifiant :

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 1,$$

et satisfaisant les conditions :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : w^{(k)}(0) = w^{(k)}(1) = 0.$$

En pratique, on a utilisé la fonction polynomiale

$$w(x) := x^3(6x^2 - 15x + 10).$$

Même si elle ne satisfait les conditions ci-dessus que pour $k = 1, 2$, nous n'avons détecté aucune différence perceptible lorsque l'on considère des fonctions polynomiales de degrés plus élevé. Une raison est que nous avons effectué seulement quatre étapes d'intégration convexe. L'autre raison est que nous avons observé un écart très petit $f_{k,j-1} \circ \varphi_{k,j}(\frac{i}{n}, 1) - F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}(\frac{i}{n}, 1)$ avant et après recollement en conformité avec le lemme de C^0 -densité.

Dans le paragraphe suivant, nous allons décrire comment extraire $f_{k,j}$ de $f_{k,j} \circ \varphi_{k,j}$.

5.4 Retour aux coordonnées euclidiennes

Les calculs ci-dessus donnent un échantillonnage uniforme de $f_{k,j} \circ \varphi_{k,j}$. Mais, afin d'itérer le processus, c'est-à-dire calculer $f_{k,j+1}$ à partir $f_{k,j}$, nous avons besoin d'extraire un échantillonnage uniforme de $f_{k,j}$. Autrement dit, connaissant $f_{k,j}$ aux points $\varphi_{k,j}(i/n, l/n)$, $0 \leq i, l \leq n$, on veut évaluer $f_{k,j}$ aux points $p^{i,l} = (i/n, l/n)$ appartenant à la grille initiale. Comme n est assez grand, on ne peut se permettre un algorithme non linéaire en temps. Heureusement, la forme particulière de $\varphi_{k,j}$ nous permet de concevoir un tel algorithme.

Comme on l'a observé dans le chapitre 2 on peut écrire :

$$\varphi_{k,j}(t, s) = sV^\perp(j) + \psi_{k,j}(t, s)V(j)$$

pour une fonction $\psi_{k,j}$ telle que $\psi_{k,j}(t, 0) = t$. Il suit que pour un s fixé, l'ensemble

$$\{\varphi_{k,j}(t, s) \mid t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$$

est contenue dans la droite :

$$L_s = sV^\perp(j) + \mathbb{R}V(j)$$

L_s est parallèle à $V(j)$. Comme $V(j)$ a ses coordonnées entières, premières entre elles et que

$$|V^\perp(j) \times V(j)| = 1,$$

les lignes

$$L_{u/n}, \quad u \in \mathbb{Z}$$

balayent à la fois les points de la grille régulière et les points de $(\varphi_{k,j}(u/n, v/n))_{u,v \in \mathbb{Z}}$ (Cf Fig 5.4). Chaque point de la grille régulière se trouve donc entre deux points q_v et q_{v+1} du flot échantillonné où q_v et q_{v+1} sont de la forme

$$q_v = \varphi_{k,j}(u/n, v/n) \quad \text{et} \quad q_{v+1} = \varphi_{k,j}(u/n, (v+1)/n)$$

Maintenant, pour évaluer $f_{k,j}$ aux points réguliers de la grille initiale, on fixe un entier $u \in [0, n-1]$ et on balaye l'échantillon de points

$$\{q_v := \varphi_{k,j}(u/n, v/n) \mid v \in [0, n]\} \subset L_{u/n}.$$

Tout point $p^{i,j}$ de la grille régulière se trouvant entre q_v et q_{v+1} , s'exprime comme une combinaison linéaire convexe :

$$p^{i,j} = (1-t)q_v + tq_{v+1}.$$

et on pose enfin l'approximation :

$$f_{k,j}(p^{i,j}) = (1-t) \cdot f_{k,j} \circ \varphi_{k,j}\left(\frac{u}{n}, \frac{v}{n}\right) + t \cdot f_{k,j} \circ \varphi_{k,j}\left(\frac{u}{n}, \frac{v+1}{n}\right).$$

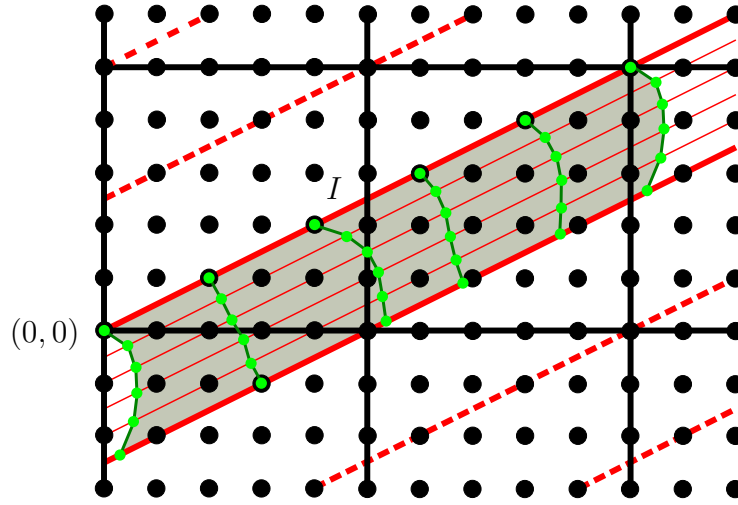


FIGURE 5.4 – Ici le tore plat est uniformément échantillonné par une grille de dimension 5×5 ($n = 5$). La partie ombragée représente un domaine fondamental délimité par deux lignes de conditions initiales I et par deux courbes intégrales $(\varphi_{k,j}(0, \cdot))$. Tout point du tore plat admet un représentant de sa classe modulo $\mathbb{Z}^2$ dans ce domaine. Les courbes intégrales sont représentées et échantillonnées en vert. Chaque point (noir) du domaine fondamental initial se trouve entre deux points (verts) échantillonnant les courbes intégrales et sur un certain segment (rouge) $L_u/5$.

5.5 Choix de l'immersion initiale f_{init}

Rappelons que d'après le chapitre 3, on doit choisir f_{init} telle que le défaut d'isométrie

$$D_{1,1} := g_1 - f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

soit à l'intérieur du cône positif $\mathcal{C}$ engendré par les trois métriques primitives $\ell_1 \otimes \ell_1$, $\ell_2 \otimes \ell_2$ et $\ell_3 \otimes \ell_3$, où

$$\ell_1 := \partial_x^*, \quad \ell_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}(\partial_x^* + 2\partial_y^*) \quad \text{et} \quad \ell_3 := \frac{1}{\sqrt{5}}(\partial_x^* - 2\partial_y^*).$$

Comme

$$D_{1,1} = \delta_1(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2} - f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}),$$

il suffit de choisir l'immersion initiale f_{init} strictement courte. Par exemple on peut choisir comme paramétrisation le tore standard f_{init} défini par :

$$\begin{cases} X(x, y) = \frac{1}{2\pi}(R + r \cos 2\pi x) \cos 2\pi y \\ Y(x, y) = \frac{1}{2\pi}(R + r \cos 2\pi x) \sin 2\pi y \\ Z(x, y) = \frac{r}{2\pi} \sin 2\pi x \end{cases}$$

avec les nombres r et R qui sont respectivement le petit et le grand rayon. La matrice associée à la première forme fondamentale $f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ de ce tore standard est donnée dans la base canonique par

$$\begin{pmatrix} r_1^2 & 0 \\ 0 & (R + r \cos 2\pi x)^2 \end{pmatrix}.$$

Un telle immersion est strictement courte si et seulement si $R + r < 1$. En pratique on choisit $r = 1/5$ et $R = 1/2$.

La figure 5.5 montre l'image de $f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ dans cône des metriques

$$Q_+ = \left\{ \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \mid EG - F^2 > 0, E > 0, G > 0 \right\} \quad (5.9)$$

et le cône $\mathcal{C}$.

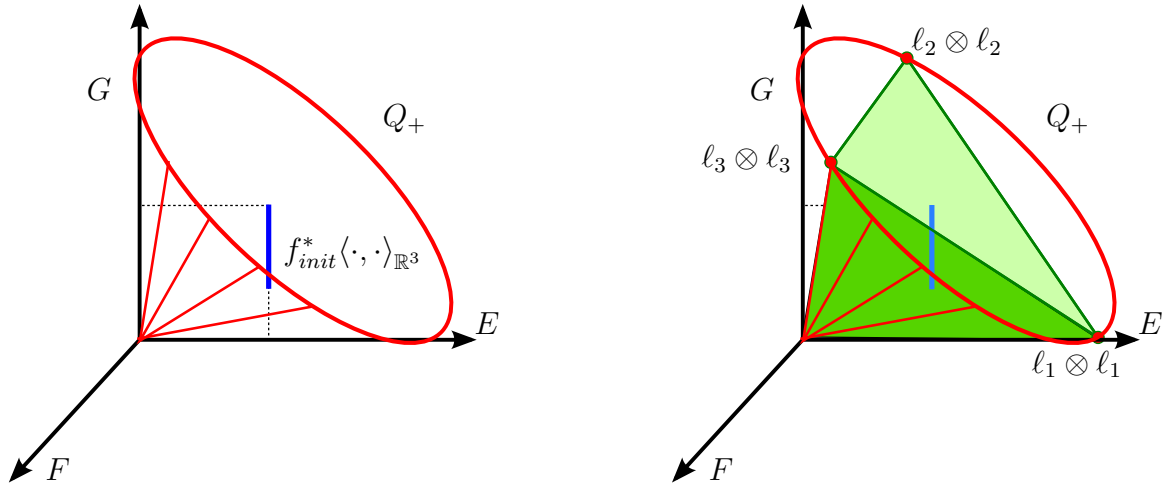


FIGURE 5.5 – (à gauche) image de $f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ dans le cône Q_+ . (à droite) le cône engendré par metriques primitives $\ell_1 \otimes \ell_1, \ell_2 \otimes \ell_2$ et $\ell_3 \otimes \ell_3$.

5.6 Choix des $N_{k,j}$ et taille de la grille

Il nous reste à choisir un nombre approprié d'oscillations $N_{k,j}$ apparaissant dans la formule (5.7). Par “appropriés” nous entendons que les conditions du *stage théorème* sont satisfaites par $f_{k,j}$ pour pouvoir appliquer la prochaine intégration convexe.

Rappelons que d'après le chapitre 3, et afin de selectionner un $N_{k,j}$ optimal, il suffit que la condition (C1) :

$$\|\mu_{k,j} - f_{k,j}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0} < (e^{-\frac{k}{10}} - e^{-\frac{k+1}{10}}) \lambda \tau \cdot \rho_{\min}(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2} - f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$$

et la condition (C2) :

$$\|df_{k,j} - df_{k,j-1}\|_{C^0} \leq \frac{K}{3} \sqrt{e^{-\frac{k}{10}} - e^{-\frac{k+1}{10}}} \sqrt{\|\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2} - f_{init}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\|_{C^0}} + \sqrt{35} \sqrt{\|\rho_i(D_i)\|_{C^0}}$$

soient satisfaites où $\mu_{k,j}$, $\rho_{\min}(\cdot)$, D_i et $\lambda \tau$ sont définis comme au chapitre 3. En particulier le produit $\lambda \tau$ est sensé être plus petit que $4/(45\sqrt{3})^2$. À ces deux conditions, il faut ajouter la condition (C3) permettant d'avoir une immersion quasi-isométrique ϵ -proche de l'immersion initiale :

$$\|f_{k,j} - f_{k,j-1}\|_{C^0} \leq \frac{\epsilon}{3 \cdot 2^k}$$

2. Dans la pratique nous avons pris $\lambda \tau = 0.16$.

On procède ainsi :

Le nombre $N_{k,j-1}$ étant supposé déjà choisi.

Nous sélectionnons par suite $N_{k,j}$ par une recherche exponentielle, à partir de $N = 2N_{k,j-1}$.

On injecte ce N dans l'expression :

$$F_{k,j} \circ \varphi_{k,j}(t, s) := f_{k,j-1}(tV(j)) + \int_{u=0}^s h(\varphi_{k,j}(t, u), N_{k,j}u) du, \quad (5.10)$$

et on vérifie si l'immersion résultante $f_{k,j}$ satisfait les conditions (C1), (C2) et (C3). Sinon, on double la valeur de N jusqu'à ce que ces conditions soient satisfaites. Nous obtenons finalement, par dichotomie, le plus petit entier N satisfaisant les trois conditions et on pose :

$$N_{k,j} := N.$$

Malheureusement, la suite $N_{k,j}$ croît très vite avec k et j , de sorte qu'il est pratiquement impossible de mettre en oeuvre cette méthode. En effet, l'intégrale (5.10) implique une fonction qui oscille $N_{k,j}$ fois et il semble raisonnable d'avoir au moins 10 échantillons par période. Cela implique que la grille régulière qui représente $f_{k,j}$ devrait contenir environ $n \times n$ échantillons avec $n \geq 10N_{k,j}$. Comme expliqué dans le paragraphe 5.7 ci-dessous, nous avons constaté expérimentalement pour les quatre premières corrugations :

$$N_{1,1} = 611, \quad N_{1,2} = 69,311, \quad N_{1,3} = 20,914,595, \quad N_{2,1} = 6,572,411,478.$$

Ces valeurs nous imposent d'utiliser une grille avec $(10 \times 6,572,411,478)^2 \approx 4.3 \cdot 10^{19}$ sommets ! Cela dépasse les capacités des ordinateurs utilisés actuellement. Comme les conditions (C1), (C2) et (C3) sont uniquement suffisantes, nous avons essayé des valeurs petites des $N_{k,j}$'s. Après quelques tentatives nous n'avons pu réaliser que trois corrugations, en partant du plongement standard initial f_{init} de la section 5.5. Cependant il était souhaitable d'appliquer quatre corrugations afin de s'approcher de la surface limite. Nous avons surmonté cette difficulté technique en appliquant d'abord une corrugation à f_{init} avec $N_{1,1} = 12$ et considérer l'immersion obtenue comme le *plongement initial*. Nous avons pu de cette façon réduire le nombre d'oscillations des quatre premières corrugations. Ainsi on a pris

$$12, \quad 80, \quad 500, \quad 9000.$$

Nous avons utilisé une grille de taille $10\,000^2$ pour les trois premières corrugations. Pour la dernière corrugation, nous avons affiné la grille de dix fois dans le sens ∂_y d'intégration et de seulement deux fois dans la direction ∂_x , conduisant à une grille avec 2 milliards d'échantillons. Le tableau suivant résume les résultats.

k	j	$N_{k,j}$	$\sup \ I - f_{k,j}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\ $	$E(\ I - f_{k,j}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}\)$	taille
0	-	-	1.32	1.21	10^8
0	1	12	1.20	1.05	10^8
1	2	80	0.99	0.84	10^8
1	3	500	0.91	0.63	10^8
1	1	9000	0.75	0.25	$2 \cdot 10^9$

la première ligne correspond au plongement standard f_{init} . Les quatrième et cinquième colonnes indiquent respectivement le maximum calculé et la moyenne du défaut isométrique. L'indice j indique la direction d'intégration. Ces calculs ont été effectués sur les immersions :

$$f_{init}, \quad f_{0,1}, \quad f_{1,2}, \quad f_{1,3}, \quad f_{1,1}.$$

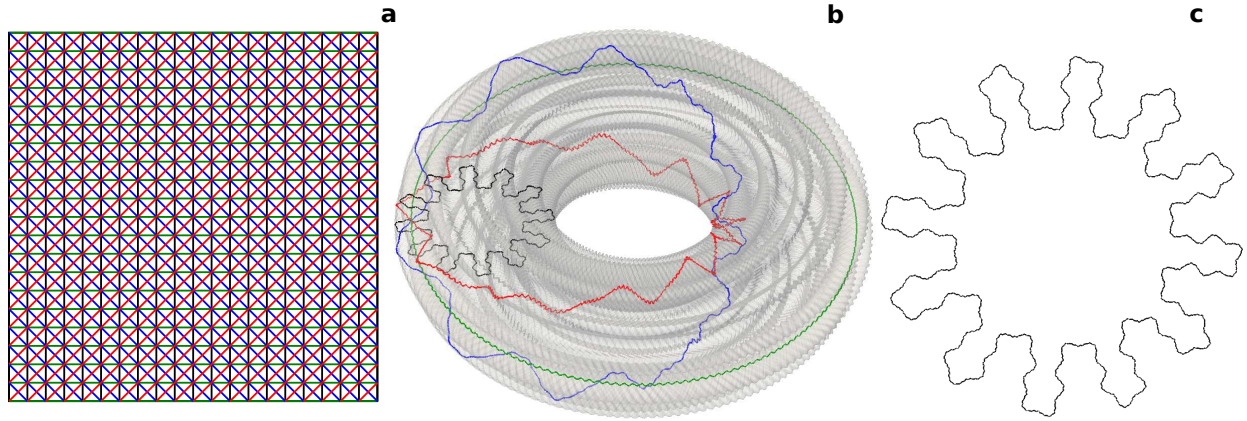


FIGURE 5.6 – Comparaison des longueurs. **a**, Un domaine fondamental du tore plat avec des méridiens, les parallèles, diagonales principales et les diagonales gauches, composées chacune de 20 courbes. **b**, Les images par $f_{1,1}$ de quatre courbes, chaque une prise dans chaque groupe. **c**, Un examen plus attentif de ces courbes laisse présager une géométrie fractale, bien que la limite est C^1 -régulière.

Nous illustrons également l'amélioration de la métrique en comparant les longueurs des de certaines courbes tracées sur le tore plat (Fig. 5.6 **a**) avec les longueurs de leurs images par la dernière immersion $f_{1,1}$. La longueur de chaque courbe diffère au moins de 10.2% par rapport à celle de son image par $f_{1,1}$. Par contraste, l'écart atteint 80% quand $f_{1,1}$ est remplacé par le tore standard f_{init} .

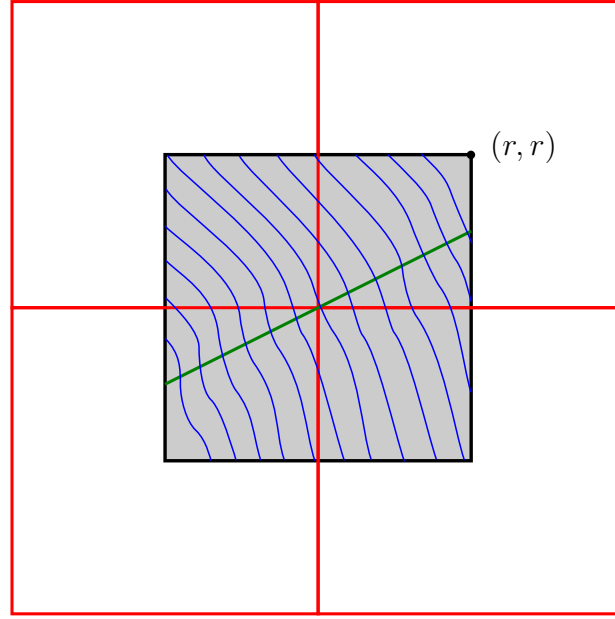


FIGURE 5.7 – immersions isométriques locales. vue schématis des lignes du flot (bleues) au voisinage de $\mathcal{N}_r$. La ligne (inclinée (verte) représente un ensemble de conditions initiales. Les carrés (rouges) représentent quatre grilles . Chacune est un domaine fondamental de $\mathbb{T}^2$.

5.7 Calcul local

Indépendamment de la génération des images des immersions quasi-isométriques du tore plat, il est intéressant d'évaluer le taux de croissance des $N_{k,j}$. En effet, un contrôle précis de ce taux donnerait une borne inférieure sur l'exposant hölderien de la $C^{1,\alpha}$ régularité de la limite de l'immersion isométrique.

Afin de calculer une limite inférieure pour les $N_{k,j}$, nous avons implémenté une version locale du programme d'immersion isométrique . Dans la version locale du programme, la grille des paramètres échantillonnés est représentée dans un voisinage carré $\mathcal{N}_r = [-r, r]^2$ du point de paramètre $(0, 0) \in \mathbb{T}^2$.

La fonction f_{init} est maintenant limité à $\mathcal{N}_r$. Nous appliquons le processus d'intégration convexe à cette restriction. Nous devons modifier légèrement le processus. En outre les courbes intégrales sont limitées à un petit domaine et ne rejoignent plus la ligne de retour de l'état initial. En particulier, il n'y a plus de recollement sur les frontières. Nous avons donc prolonger les courbes du flot sur les deux côtés de la situation initiale comme indiquée sur la Figure 5.7.

Comme on réalise plusieurs corrugations on réduit la grille à un voisinage $\mathcal{N}_{r' < r}$ de $O(0, 0)$ et on rééchantillonne de telle sorte à garder le même nombre de noeuds. On a choisi la demi-largeur r' inversement proportionnelle à $N_{k,j}$ dans le but de garder un nombre constant d'échantillons par période d'intégration . Ainsi, on a pu réaliser plus de 160 corrugations (voir Fig. 5.8). On a constaté que le nombre d'oscillations $N_{k,j}$ croît d'une manière exponentielle. Observation en accord avec Conti *et al.*

Notons, enfin que la demi-largeur de r du voisinage $\mathcal{N}_r$ décroît drastiquement ; après 165 corrugations r devient plus petit que 10^{-300} . Pour préserver une certaine exactitude on doit appliquer une remise à l'échelle du domaine et du codomaine de $f_{k,j}$. En pratique, on n'a tenu compte que de la condition (C1) pour sélectionner $N_{k,j}$.

Pour cette raison, et aussi du domaine qui se réduit éventuellement à un point, les $N_{k,j}$ calculés

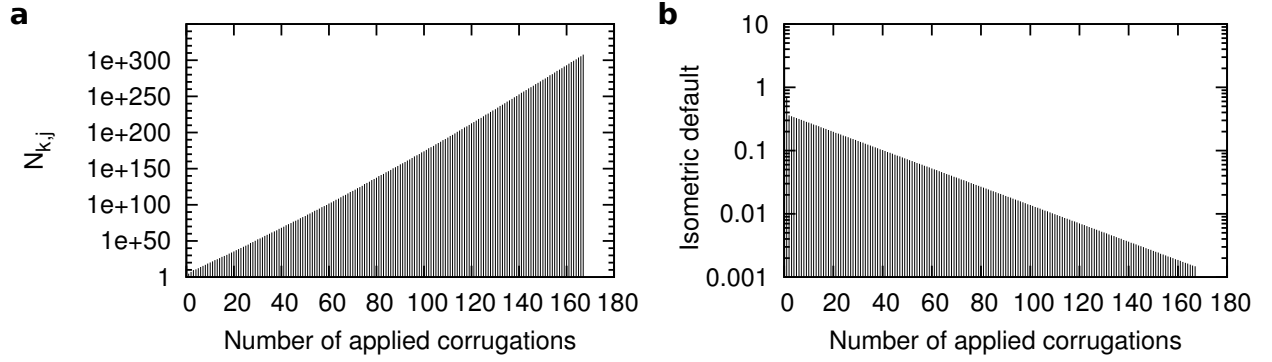


FIGURE 5.8 – Croissance exponentielle des nombres d’oscillations. **a**, Estimation numérique des fréquences des corrugations tracées en échelle logarithmique. **b**, Le défaut isométrique de $f_{k,j}$ est mesuré comme étant le maximum de la norme de Frobenius de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2} - f_{k,j}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ dans un voisinage carré approprié

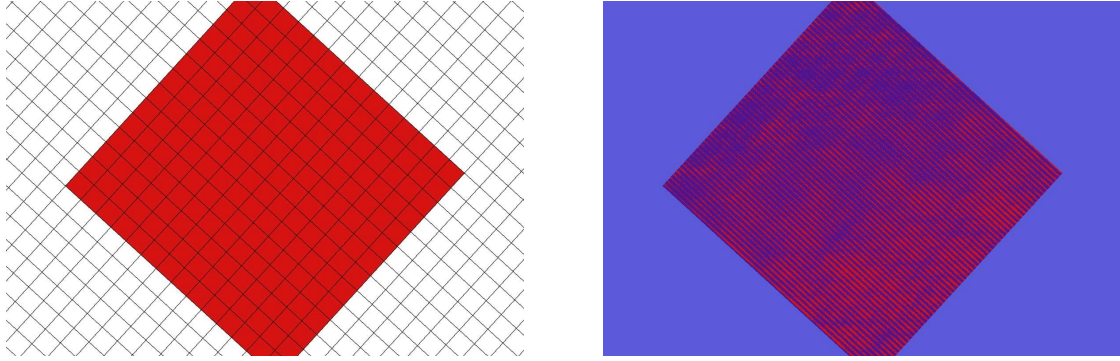


FIGURE 5.9 – Gauche, L’image du maillage sur $\mathbb{T}^2$ par l’application $f_{36,3}$ semble plate et isométrique au maillage planaire à cette échelle. La demi-longueur du domaine de $f_{36,3}$ est 9.34×10^{-219} . Le rouge correspond au morceau de surface de $f_{36,3}$ sur lequel va être construite $f_{37,1}$. **Droite**, La superposition de $f_{36,3}$ (bleue) et de $f_{37,1}$ (rouge) souligne les oscillations de $f_{37,1}$.

sont probablement sous-estimés.

Ces calculs ont été effectués sur processeurs 64 bits utilisant une double précision (64-bit) (binary floating-point numbers).

La figure 5.9 montre la superposition de $f_{36,3}$ après 118 corrugations avec $f_{37,1}$. Comme le domaine de $f_{37,1}$ est 128 fois plus petit que celui $f_{36,3}$, une partie seulement de ce dernier est visible.

Chapitre 6

Les images

Dans ce chapitre, nous présentons un ensemble d'images obtenues pour l'immersion quasi-isométrique du tore carré plat dans l'espace tridimensionnel. Le second paragraphe sera consacré à des images obtenues en effectuant des calculs locaux.

6.1 Le problème du rendu

En partant d'une immersion initiale f_0 , nous avons effectué quatre intégrations convexes respectivement dans les directions ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 et ℓ_1 , pour produire grâce au programme décrit au chapitre V les maillages associés aux immersions $f_0, f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3} := f_1$ et $f_{2,1}$.

Pour les trois premières corrugations, nous avons utilisé une grille de taille $10\,000 \times 10\,000$. Cela suffisait pour fournir une description assez précise des trois premières immersions. Nous avons pu les visualiser avec le logiciel *Yafaray*. La situation pour la quatrième corrugation est plus problématique. En effet, le nombre d'oscillations avoisine les 9000. Pour en tenir compte, nous étions obligés d'utiliser une grille de taille $20\,000 \times 100\,000$. Mais la plupart des logiciels de lancer de rayon ne peuvent traiter de telles grilles. En fait deux problèmes techniques se posent :

- les logiciels de lancer de rayon nécessitent une grande quantité de mémoire (RAM). Par exemple le rendu d'une surface échantillonnée sur une grille de $10\,000 \times 10\,000$ noeuds consomme environ 48 Go de RAM avec le logiciel *Yafaray*. En pratique la mémoire nécessaire est proportionnelle au nombre de sommets de la grille. Le rendu de la quatrième corrugation est donc impossible sous un ordinateur de 48 Go de mémoire RAM. Avec *Yafaray*, il faut compter deux heures de calcul pour un rendu similaire.
- Le calcul de rendu prend beaucoup de temps. Par exemple, avec le logiciel *Sunflow* il faut une semaine pour le rendu d'une surface échantillonnée sur une grille de $10\,000 \times 10\,000$ noeuds sous un ordinateur de 48 Go de mémoire RAM.

Pour contourner ces difficultés, une des pistes que nous avons exploré, est le découpage de l'image. Nous avons dû procéder en deux étapes. La première étape consiste à découper le maillage initial en plusieurs parties et à produire une image pour chaque partie séparément. La seconde étape consiste à combiner toutes ces parties d'images pour en produire une de la surface entière.

6.1.1 Images numériques et lancer de rayons

Images numériques

Une image numérique est composée de $m \times n$ pixels, m est la largeur de l'image et n sa hauteur. Le pixel étant l'unité de base permettant de mesurer la *définition* d'une image numérique matricielle.

Lancer de rayons : principe

Le lancer de rayons est une technique qui permet de créer une image numérique à partir d'une scène composée d'une caméra, d'un ou de plusieurs objets et d'une ou plusieurs sources de lumière. L'image est construite sur un plan entre la caméra et la scène. Rappelons que dans le lancer

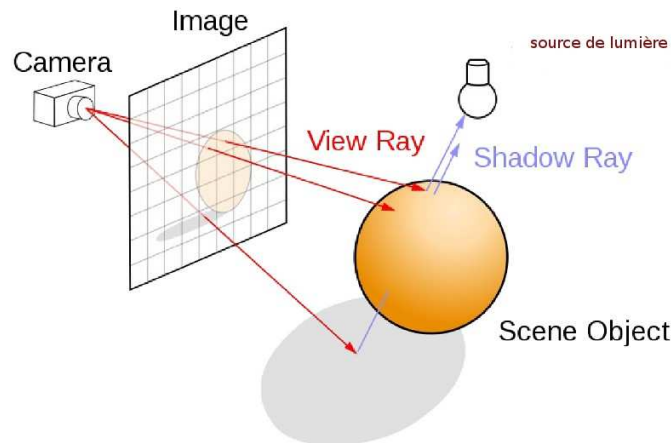


FIGURE 6.1 – Scène.(Source Wikipedia)

de rayons, on suit les rayons à l'envers, c'est-à-dire à partir de l'observateur vers les sources de lumière en lançant un ou plusieurs rayons à travers chaque pixel de l'écran sur lequel se forme l'image. Cela évite de traiter des rayons qui n'aboutiront jamais à l'observateur (caméra). Étant donné un rayon qui aboutit à l'objet, ce rayon peut être **primaire** et donc issu directement de l'observateur ou **secondaire**. Il existe trois types de rayons secondaires :

- les rayons d'éclairage qui transmettent la lumière directement d'une source lumineuse vers la surface d'un objet.
- Les rayons réfléchis qui transmettent la lumière réfléchie par un objet.
- Les rayons de transparence qui transmettent les rayons réfractés à travers un objet transparent.

On traite le rayon primaire partant de l'observateur et passant par chaque pixel de l'écran virtuel de manière à déterminer la couleur attribuée à ce pixel.

Chaque rayon issu de la caméra à travers un pixel de l'image est susceptible de rencontrer plusieurs objets. En partant depuis l'œil de l'observateur (caméra), on traverse un pixel de l'écran virtuel sur lequel est matérialisée l'image créée, puis on rentre dans la scène de manière à déterminer de quel(s) objet(s) un rayon lumineux provient, et ainsi, à déterminer ses caractéristiques chromatiques qui définissent l'intensité du pixel.

Lors du parcours d'un rayon lumineux dans une scène, deux cas sont possibles :

1. Aucun objet n'intercepte le rayon.
La couleur est celle du fond (noir ou autre).
2. Un ou plusieurs objets interceptent le rayon.
On trouve l'objet le plus proche de la source du rayon (l'observateur pour les rayons primaires, une intersection rayon-objet pour les rayons secondaires).

En fonction des caractéristiques de cet objet vis à vis de la lumière, la teinte du pixel est calculée par somme des composantes de lumière (a) diffusée, (b) réfléchie et (c) transmise par l'objet au point d'intersection.

6.1.2 Image du tore plat

Nous présentons ici quelques images obtenues avec le logiciel *Yafaray*. Les calculs ont été réalisés sur un noeud à huit coeurs ayant 48 Go de RAM.

Pour réaliser ces images nous sommes partis du tore standard paramétré par

$$f_{init} : \mathbb{E}^2 / \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3; \quad (x, y) \longmapsto (X(x, y), Y(x, y), Z(x, y))$$

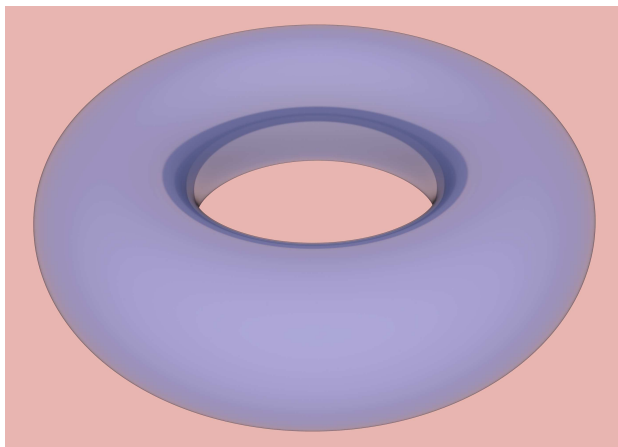
avec :

$$\begin{cases} X(x, y) = \frac{1}{2\pi}(R + r \cos 2\pi x) \cos 2\pi y \\ Y(x, y) = \frac{1}{2\pi}(R + r \cos 2\pi x) \sin 2\pi y \\ Z(x, y) = \frac{r}{2\pi} \sin 2\pi x \end{cases}$$

Le petit rayon r et le grand rayon R valent respectivement 0.2 et 0.5. Ensuite, nous avons effectué quatre corrugations :

- dans la direction dite ℓ_1 avec un nombre d'oscillation $N_1 = 12$ (figure 6.2(b))
- dans la direction dite ℓ_2 avec un nombre d'oscillation $N_2 = 80$ (figure 6.2(c))
- dans la direction dite ℓ_3 avec un nombre d'oscillation $N_3 = 500$ (figure 6.2(d))
- dans la direction dite ℓ_1 avec un nombre d'oscillation $N_4 = 9000$ (figure 6.2(e))

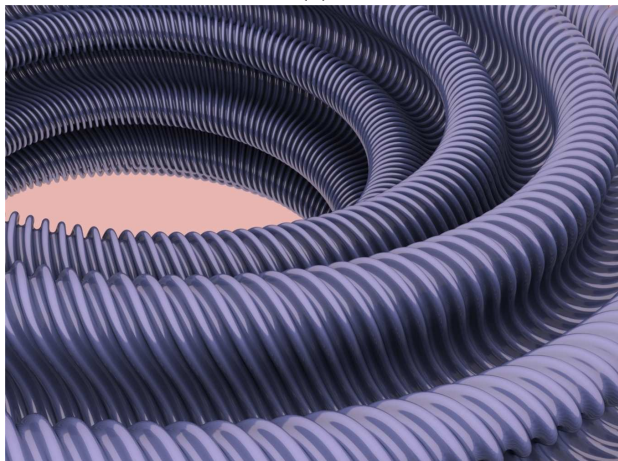
Une autre image complète de l'immersion isométrique du tore carré plat après quatre intégrations convexes est donnée par la figure 6.3.



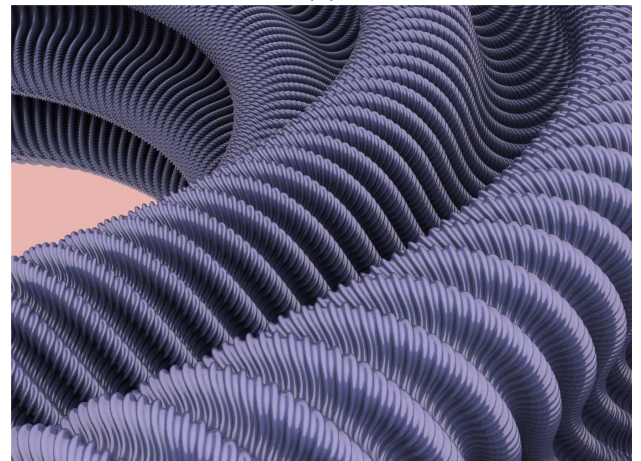
(a)



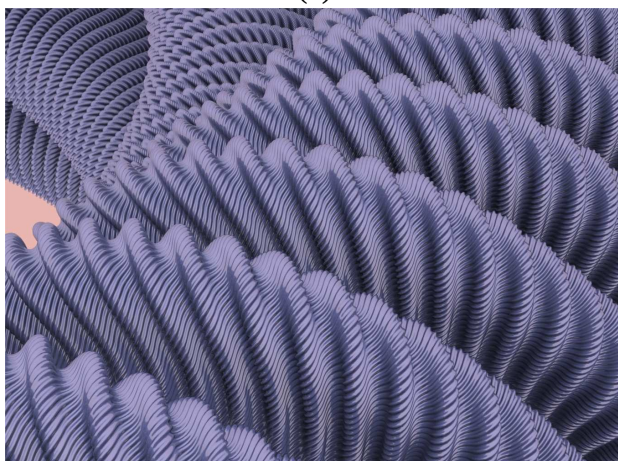
(b)



(c)



(d)



(e)

FIGURE 6.2 – Tore initial et les quatre premières corrugations.

6.2 Zoom

Dans cette dernière section, nous donnons quelques images obtenues par intégration convexe mais sur un petit domaine du tore carré. Comme expliqué au chapitre V, chaque fois le domaine est réduit de manière à avoir suffisamment de points par oscillation.

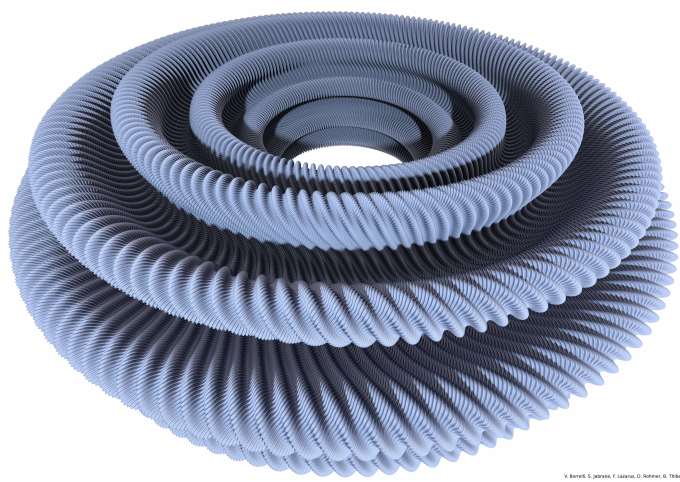


FIGURE 6.3 – *tore après quatre corrugations*

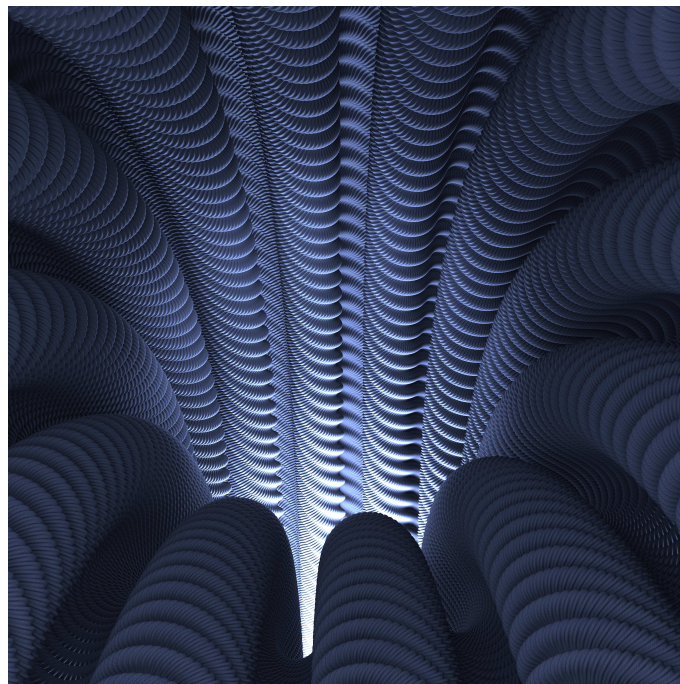


FIGURE 6.4 – *Vue intérieur du tore après quatre corrugations*

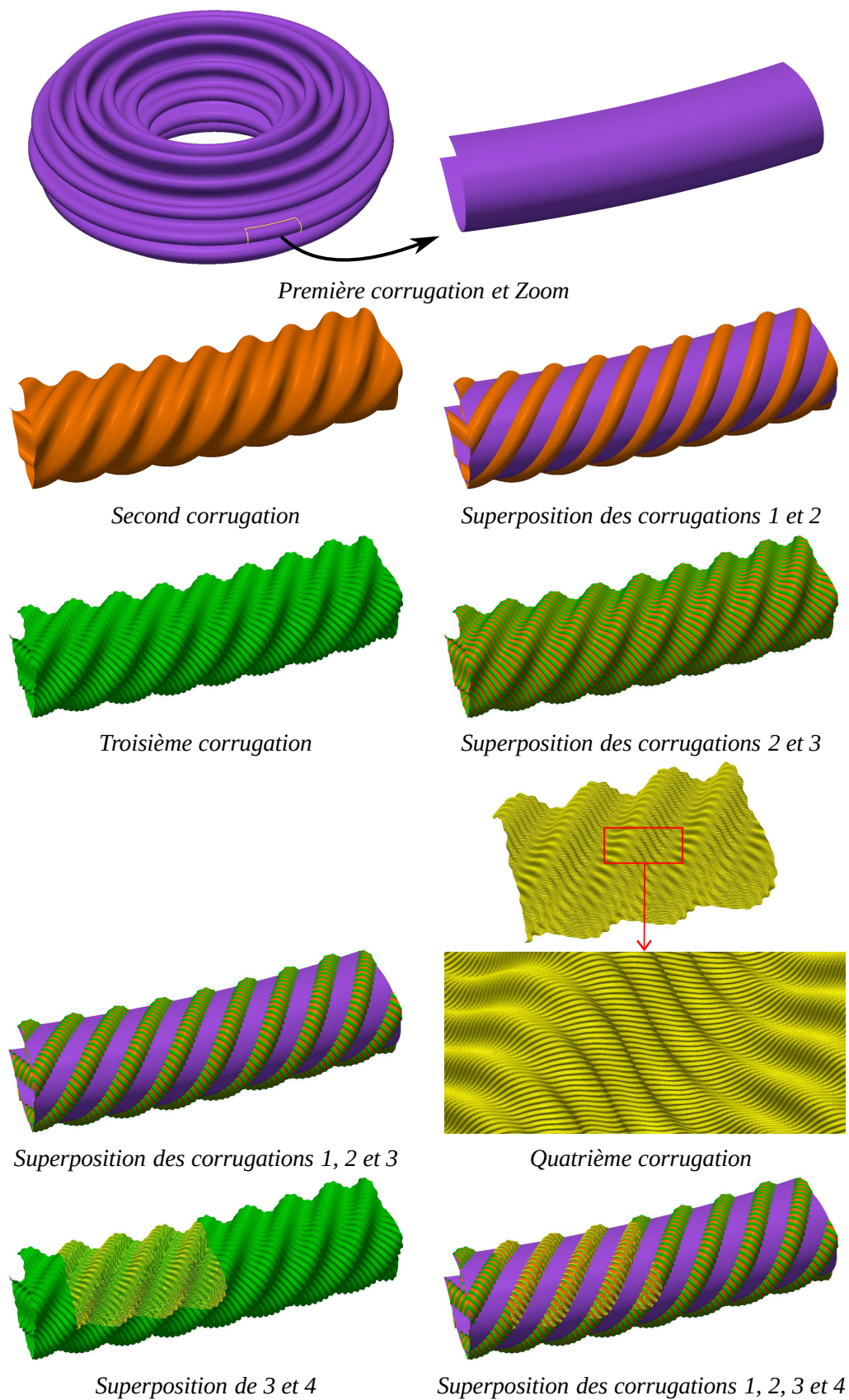


FIGURE 6.5 – Zoom sur les quatre premières corrugations et superposition

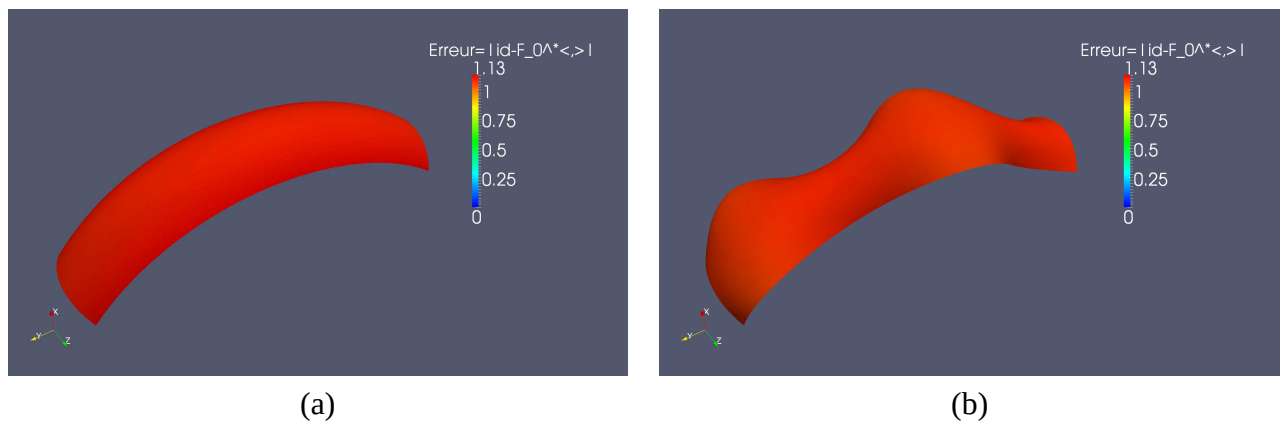


FIGURE 6.6 – *Calcul local. a : tore initial. b : première corrugation*

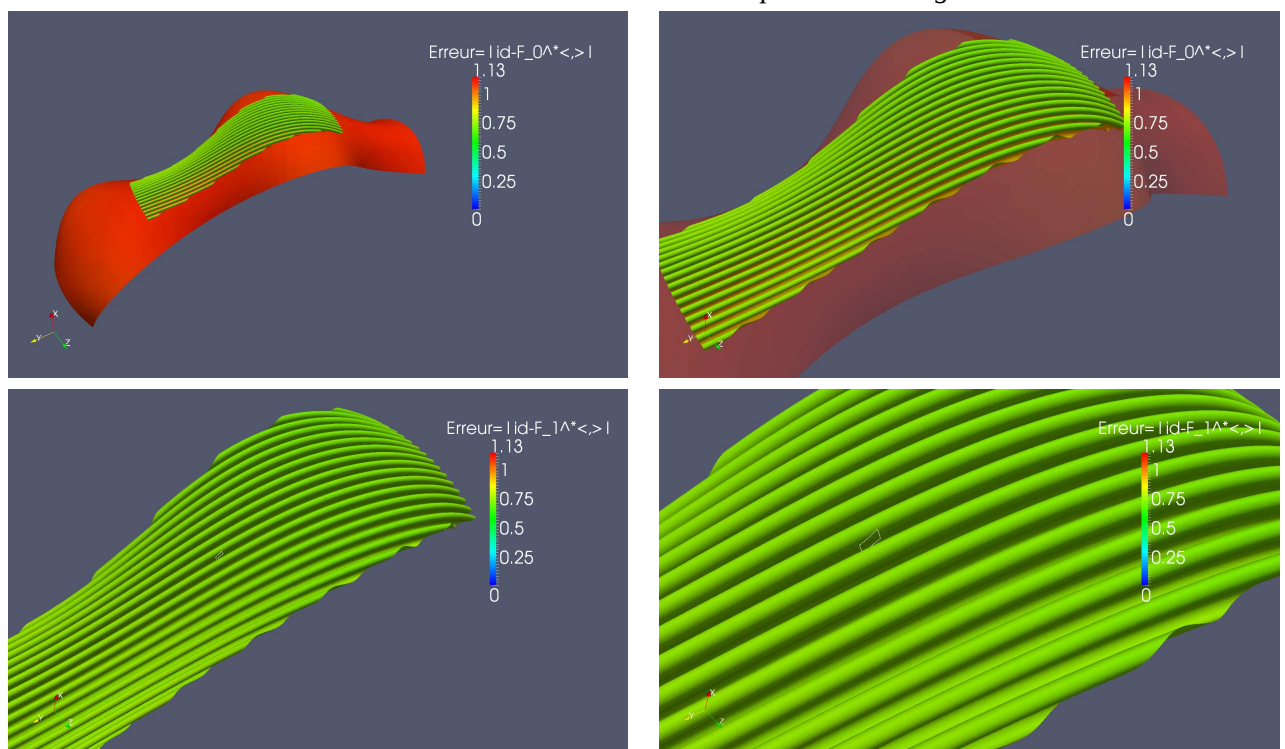


FIGURE 6.7 – *Deuxième corrugation*

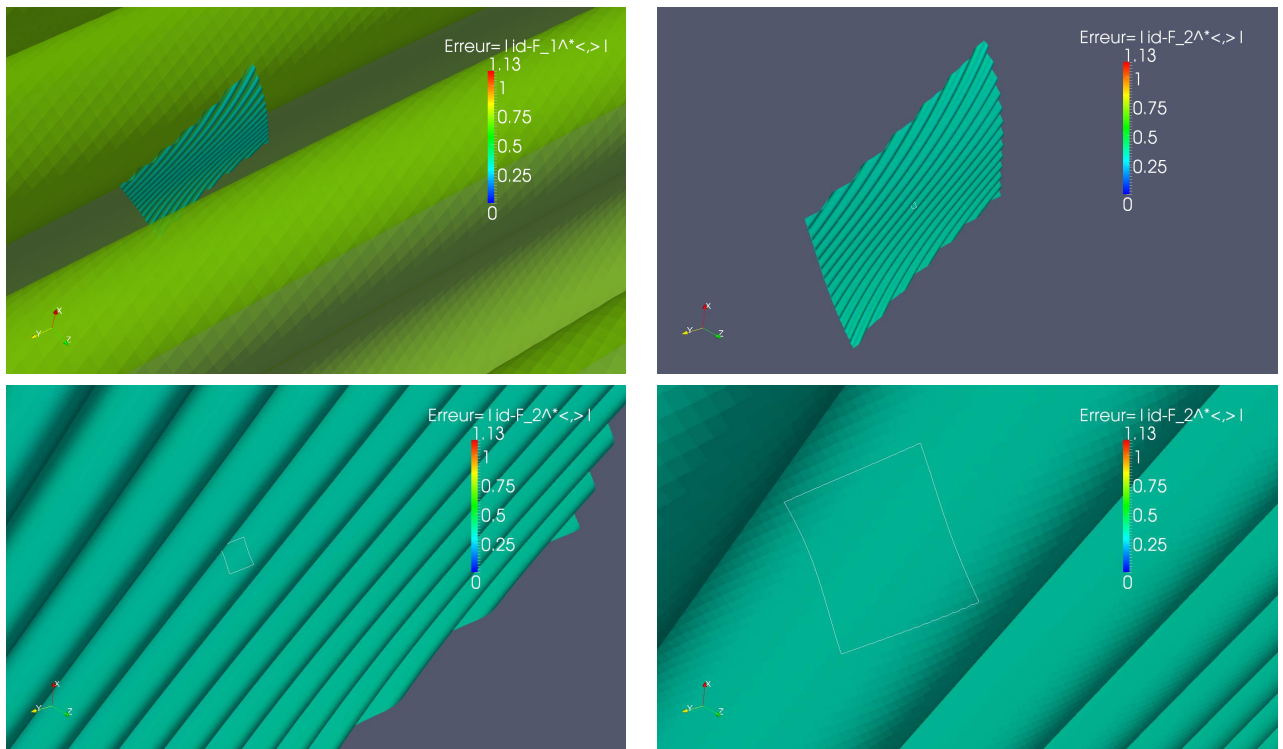


FIGURE 6.8 – Troisième corrugation

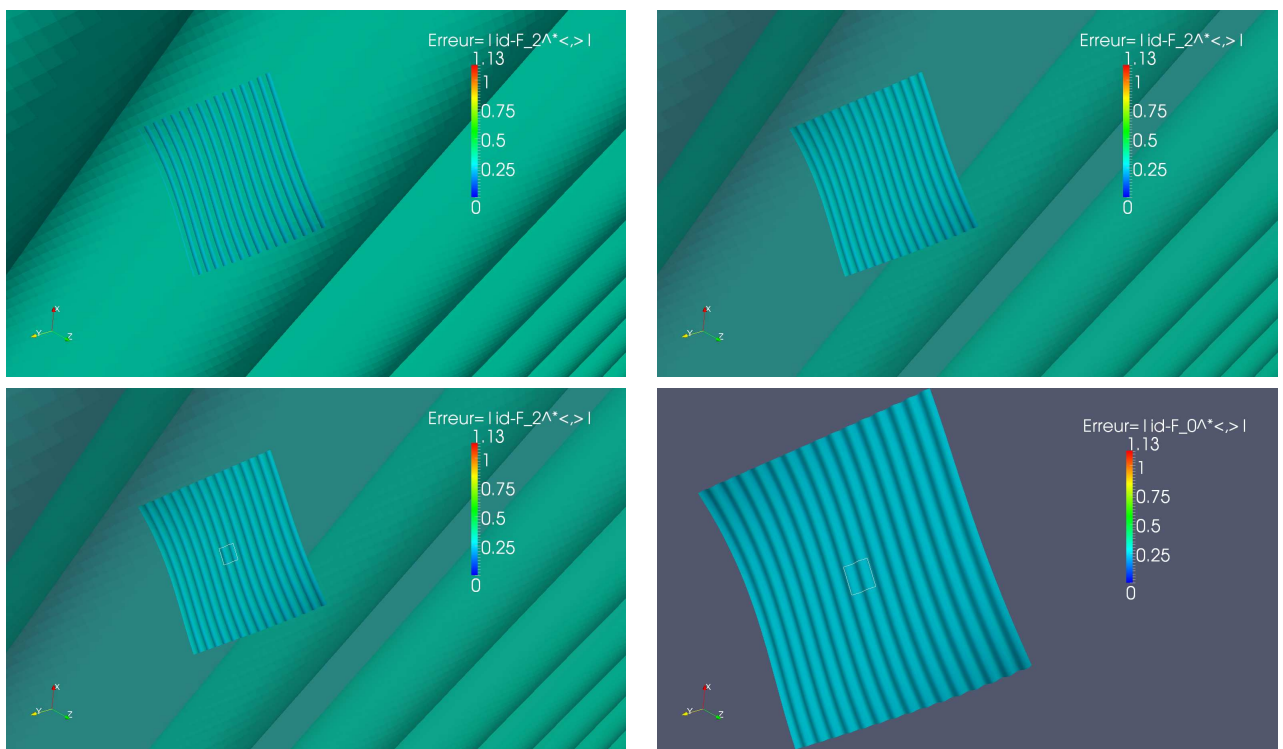
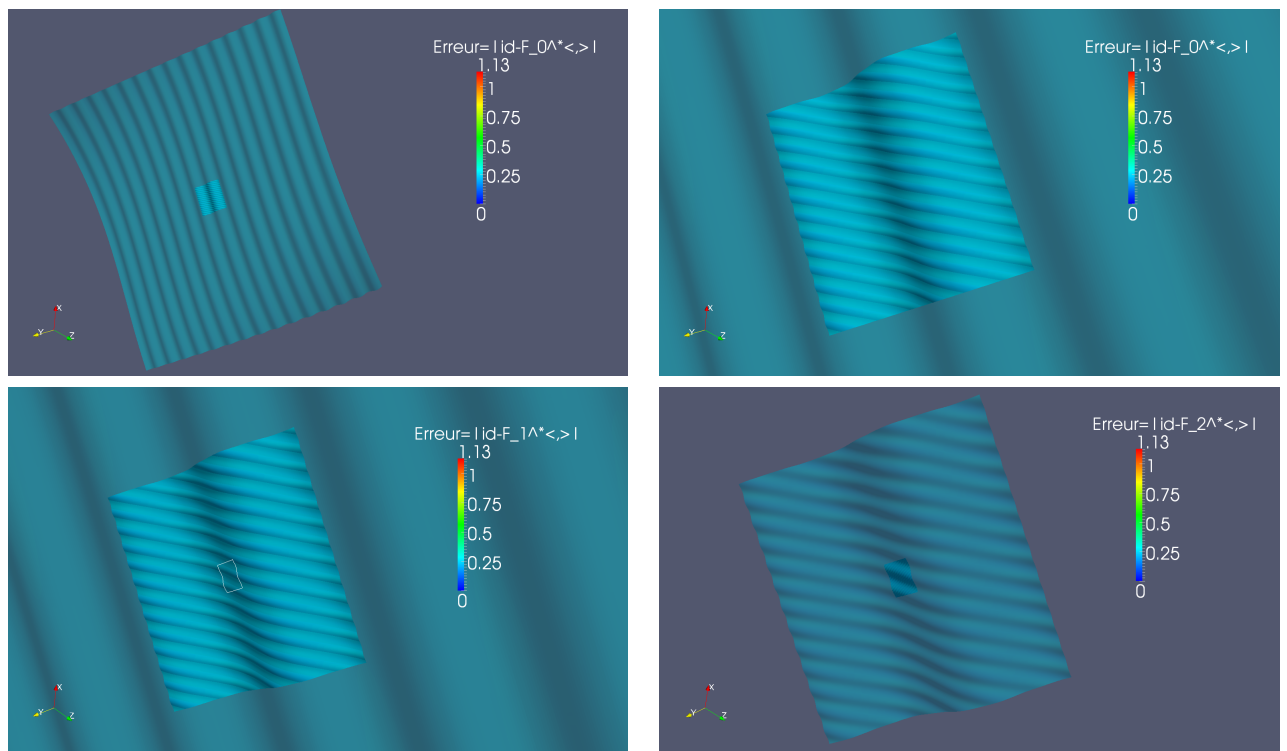


FIGURE 6.9 – Quatrième corrugation

**FIGURE 6.10** – *Cinquième corrugation*

Bibliographie

- [1] M. BERGER, *Rencontre avec un géomètre*, SMF-Publication-Gazette des Mthématiciens n° 76, Avril,1998.
- [2] ELIASHBERG, MICHACHEV, *Introduction to the h-principle*, Graduate Studies in Mathematics,. 48. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [3] M. GROMOV, *Partial Differential Relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 9. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [4] HAIRER, E., NORSETT, S. P. WANNER G, *Solving Ordinary differential Equations I. Nons-tiff Problems.*, vol.8 of springer Serie in Comput.Mathematic (Springer-Verlag,1987), second revised edition 1993 edn.
- [5] *Flat tori in three dimensional space and convex integration* - VINCENT BORRELLI, SAÏD JABRANE, FRANCIS LAZARUS ET BORIS THIBERT, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (PNAS), avril 2012.
- [6] D. SPRING, *Convex Integration Theory*, Birkhauser, 1998.
- [7] KARI ASTALA, DANIEL FARACO AND JR., LÁSZLÓ SZÉKELYHIDI, *Convex integration and the L_p theory of elliptic equations*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 7(1) :1–50 2008 ISSN : 0391-173X
- [8] RÉMY MALGOUYRES, *Algorithme pour la synthèse d'images et l'animation 3D*, Sciences sup. Dunod,Paris 2002.