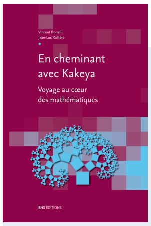

En cheminant avec Kakeya - Voyage au cœur des mathématiques
Vincent Borrelli et Jean-Luc Rullière
École normale supérieure, 2014. 158 p. isbn : 9782847884159

« Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de façon à la retourner complètement ? » Telle est la jolie question posée par le mathématicien japonais S. Kakeya au début du xx^e siècle, et qui sert ici de prétexte à une introduction au calcul différentiel et intégral, sous un format très original.
De fait, s'agissant d'un ouvrage échappant aux calibrages usuels, classes préparatoires, concours de l'agrégation ou autre annabac, il est difficile de dire avec certitude quel est son meilleur public. Je dirais cependant que le lecteur idéal est probablement un étudiant en début de cycle universitaire. Lorsqu'on a déjà été exposé aux notions de dérivée et d'intégrale, mais avec le risque de percevoir ces techniques comme des recettes de calculs avec peu de conscience de l'intuition géométrique sous-jacente, ni de l'origine historique des concepts, ce livre peut certainement faire œuvre de révélation. Cela a en tout cas été le cas pour ma fille qui s'est exclamée « mais pourquoi ne m'a-t'on pas expliqué les intégrales comme ça en Terminale ? »
La première partie du livre nous entraîne d'exemple en exemple, explorant les aires de différentes figures de plus en plus sophistiquées qui toutes permettent le retournement de l'aiguille de Kakeya, en introduisant au passage les outils mathématiques nécessaires. On établit ainsi une liste semblable à des records sportifs, en faisant monter le suspense quant à laquelle sera finalement la figure championne :

page	figure	aire
p. 13	Disque	0.78539...
p. 13	Triangle de Reuleaux	0.70477...
p. 15	Triangle équilatéral	0.57735...
p. 37	Hélice de Releaux	0.48649...
p. 37	Hélice du triangle équilatéral	0.42217...
p. 58	Triangle à paraboles	0.41296...
p. 77	Triangle à boucles	0.40475...
p. 88	Deltoïde	0.39269...
p. 97	Étoile à 11 branches	0.39140...

Le thriller se dénoue de façon surprenante dans les derniers chapitres, avec Besicovitch et ses figures en dentelle de triangles d'aire arbitrairement petite, et une plongée dans le monde des objets mathématiques d'aire nulle bien qu'ils conservent certaines propriétés des surfaces. Mais chut !, j'en ai sans doute déjà trop dit...
Pour donner une idée du style transversal du livre, voici une brève description du contenu du chapitre « Le calcul intégral », qui en une vingtaine de pages offre un feu d'artifices d'informations. On commence avec l'histoire des défis mathématiques tels qu'ils se pratiquaient aux alentours du xvii^e , avec en particulier la question proposée par Pascal de calculer l'aire sous une cycloïde. Puis on envisage une forme géométrique (triangle à paraboles) qui viendra améliorer le record du chapitre précédent concernant la question de Kakeya... Mais reste à déterminer l'aire de cette figure, et

voici le calcul intégral dûment motivé ! On est ensuite initié au partage d'Archimède, qui permet de découper un carré en trois parts d'aires égales à l'aide de morceaux de paraboles. C'est l'occasion d'introduire les fondamentaux du calcul intégral avec en particulier les sommes de Riemann, mais qui sont appelées ici les « petites et grandes palissades ». La notation $\int_a^b f$ est introduite, on notera l'absence du $f(x)dx$ qui perturberait inutilement le néophyte (il ne s'agit pas ici de proposer des exercices de changement de variables !), on apprend par contre au passage que la notation vient du S allongé tel qu'on l'écrivait avant la Révolution... On nous glisse aussi, à propos des limites lorsque la largeur des planches de nos palissades deviennent de plus en plus petites, qu'un même nombre peut admettre deux écritures décimales différentes : par exemple 0,49999... et 0,5. Après une application au problème de Kakeya, on se penche ensuite sur les intégrales généralisées, au travers de la question « peut-on peindre un mur infini avec un nombre fini de pots de peinture ? ». Et on finit avec une discussion de la somme $\sum \frac{1}{n^2}$, dont on nous dévoile qu'elle est égale à $\pi^2/6$, « mystérieuse coïncidence entre les carrés des nombres entiers et le fameux nombre π. »

Un autre aspect du livre est qu'il donne à voir ce que sont les mathématiques dans la pratique quotidienne des chercheurs. Se trouve ainsi explicité comment on peut être amené à formuler une conjecture, suite à l'étude de nombreux exemples et en regard d'évidences géométriques. Mais nous sommes aussi sensibilisés au fait qu'une conjecture, aussi raisonnablement fondée soit-elle, peut se révéler fausse ! On apprend par ailleurs qu'une question peut se révéler être mal posée : ici, Kakeya supposait implicitement l'existence d'une surface optimale, ce qui se révèle a posteriori trop optimiste. Enfin, une fois une question mathématique « résolue », on constate qu'elle engendre, par analogie ou généralisation , toute une ribambelle de nouvelles questions ouvertes : dimension fractales des exemples de mesures nulles, situation en dimension supérieure, ajout de contraintes géométriques - cas des domaines étoilés par exemple -... Ces nouvelles questions viennent de plus entrer en résonnance avec d'autres domaines des mathématiques, par exemple ici la théorie des nombres et les questions à propos de la répartition des nombres premiers, jusqu'à la fameuse hypothèse de Riemann !

En conclusion, ce livre est un petit bijou, expérience de transmission originale, qui parvient dans un format très court à jouer avec succès sur différents registres : pédagogique, historique, vulgarisation. Le grand soin apporté aux illustrations, les appartés historiques ou biographiques, les calculs menés dans des cadres à part pour ne pas couper le flux du texte, tout a été pensé et mûrement soupesé pour une grande accessibilité et un vrai plaisir de lecture. J'ai assisté à quelques-uns des innombrables déjeuners des deux auteurs au moment de la – longue ! – gestation de l'ouvrage, je vous livre mon verdict, ces deux-là sont des perfectionnistes maladifs ! Lisez donc leur livre (pour un aperçu, le fichier pdf est en libre accès sur le site de l'éditeur), faites-le acheter par vos bibliothèques, et conseillez sa lecture à vos proches, ainsi qu'à vos étudiants, juste pour le plaisir, ça ne compte pas pour l'examen final...

Stéphane Lamy
Université de Toulouse