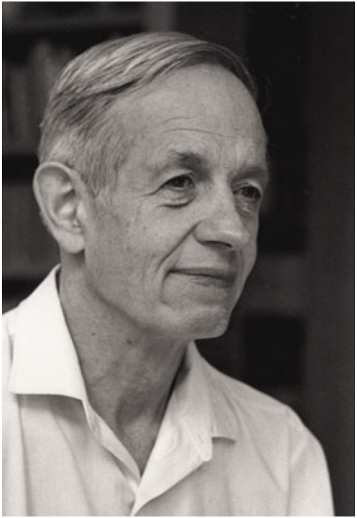
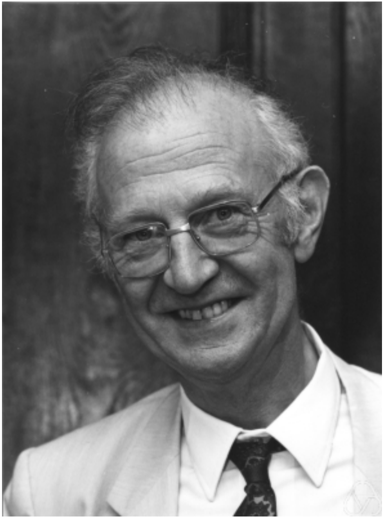
CM7 : Le théorème de Nash-Kuiper





John Nash et Nicolaas Kuiper

Applications isométriques

Définition.– Une application $f : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$ est une *isométrie* si $f^*\langle ., . \rangle = g$.

Les applications isométriques conservent la longueur des courbes.

Applications isométriques

Définition.– Une application $f : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$ est une *isométrie* si $f^*\langle .,. \rangle = g$.

Les applications isométriques conservent la longueur des courbes.

En coordonnées locales $x = (x_1, ..., x_n)$:

$$1 \leq i \leq j \leq n, \qquad \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \rangle = g_{ij}(x)$$

Applications isométriques

Définition.– Une application $f : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$ est une *isométrie* si $f^*\langle ., . \rangle = g$.

Les applications isométriques conservent la longueur des courbes.

En coordonnées locales $x = (x_1, ..., x_n)$:

$$1 \leq i \leq j \leq n, \qquad \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \rangle = g_{ij}(x)$$

La dimension de Janet :

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Le théorème de Nash-Kuiper

Définition.– Une application $f:(M^n,g)\xrightarrow{C^1}\mathbb{E}^q$ est dite *strictement courte* si $f^*\langle .,.\rangle < g$.

Le théorème de Nash-Kuiper

Définition.– Une application $f : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$ est dite *strictement courte* si $f^*\langle .,. \rangle < g$.

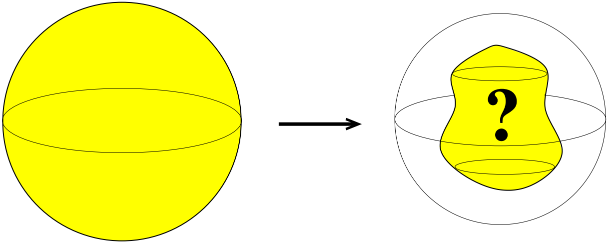
Théorème (1954-55-86).– *Soient M^n une variété riemannienne compacte et $f_0 : (M^n, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$ un plongement strictement court. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un plongement C^1 isométrique*

$$f : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$$

tel que

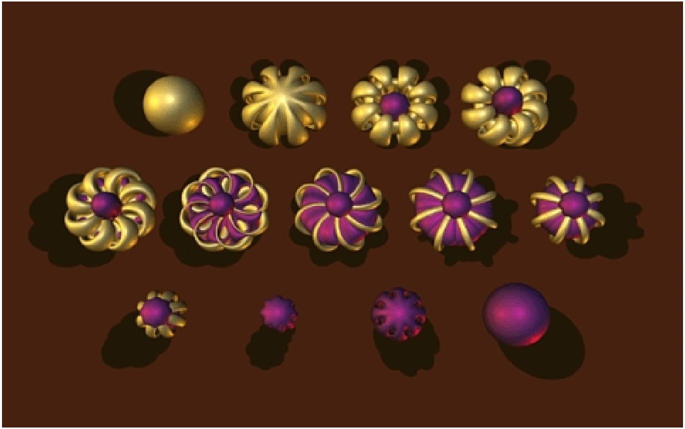
$$\|f - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon.$$

Sphères réduites



Existence de sphères réduites.– *Soit* $0 < r < 1$. *Il existe un plongement* C^1*-isométrique de la sphère unité de* $\mathbb{E}^3$ *dans une boule de rayon* r.

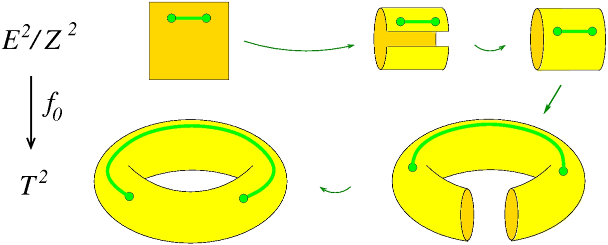
Retournements de sphère isométriques



Retournements de sphère isométriques.– *La sphère* $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$ *peut être retournée au moyen d'une homotopie régulière d'immersions* C^1 *isométriques.*

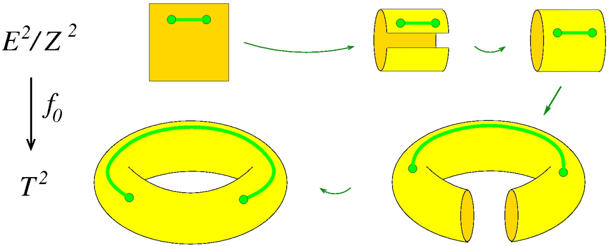
Tore plat

Définition.– On appelle *tore plat* tout quotient $\mathbb{E}^2/\Lambda$ d'un espace euclidien par un réseau $\Lambda \subset \mathbb{E}^2$.



Tore plat

Définition.– On appelle *tore plat* tout quotient $\mathbb{E}^2/\Lambda$ d'un espace euclidien par un réseau $\Lambda \subset \mathbb{E}^2$.



Tore plat.– *Tout tore plat $\mathbb{E}^2/\Lambda$ se plonge de façon C^1-isométrique dans $\mathbb{E}^3$.*

Programme de la séance

Le but.– Démontrer le théorème de Nash-Kuiper à partir de la machinerie de l'intégration convexe de Gromov.

L'ingrédient principal.– Le théorème de Gromov sur les relations amples :

Soit $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ *une relation differentielle ouverte et ample. Alors* $\mathcal{R}$ *satisfait au h-principe paramétrique i. e.*

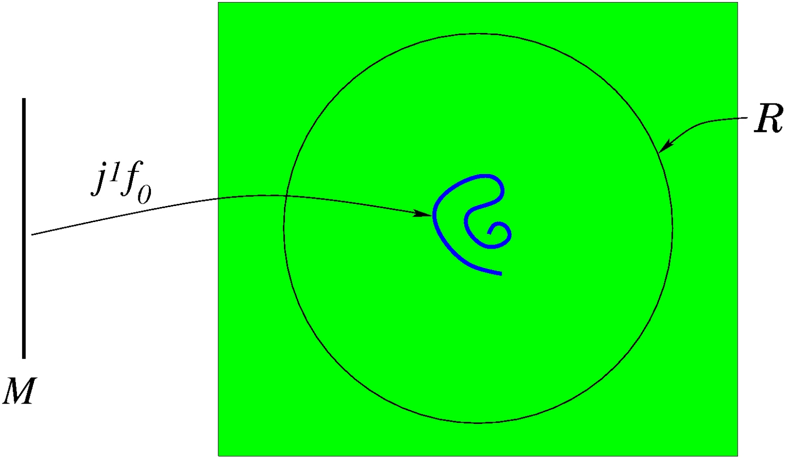
$$J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

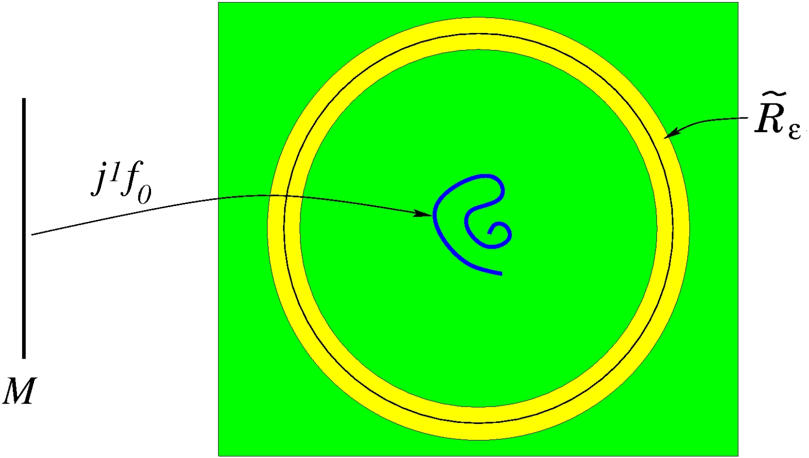
Les obstacles.–

- La relation des immersions isométriques n'est pas ample
- La relation des immersions isométriques est fermée

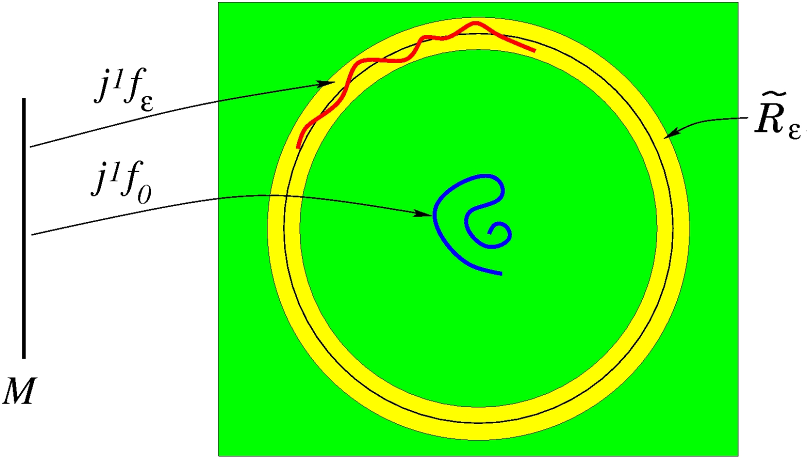
Une idée naïve : épaissir la relation différentielle



Une idée naïve : épaissir la relation différentielle



Une idée naïve : épaissir la relation différentielle



Une idée naïve : épaissir la relation différentielle

Question.– La limite (si elle existe)

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} f_\epsilon$$

est-elle une application isométrique ?

Une idée naïve : épaissir la relation différentielle

Question.– La limite (si elle existe)

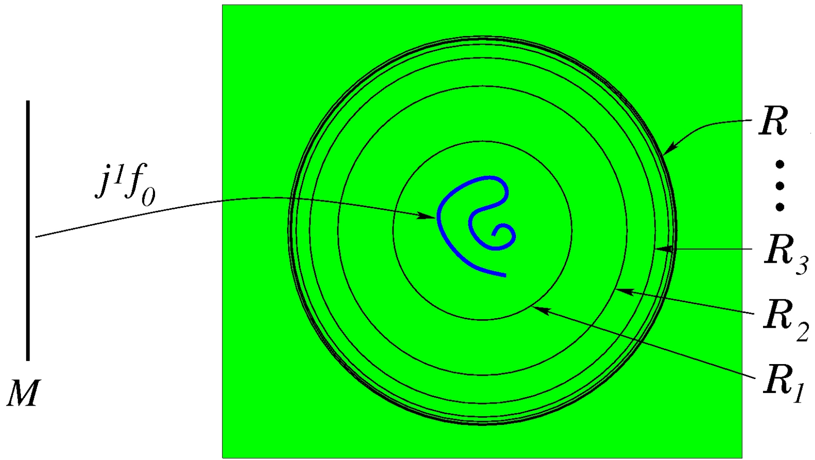
$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} f_\epsilon$$

est-elle une application isométrique ?

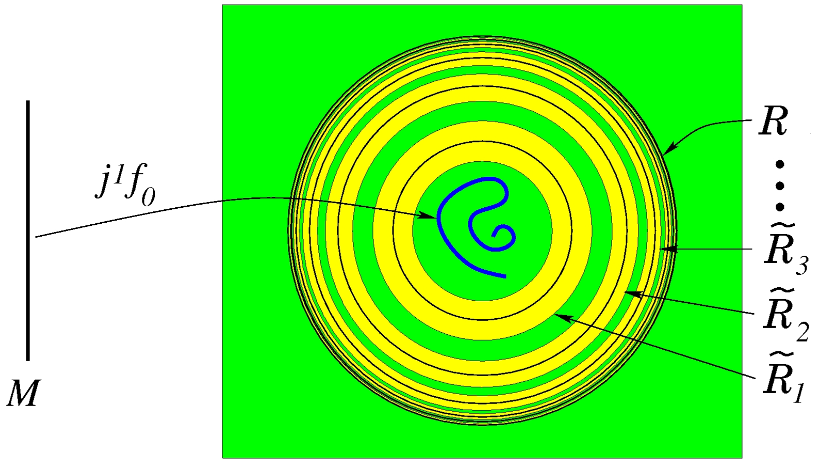
Réponse.– Non

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} f_\epsilon = f_0.$$

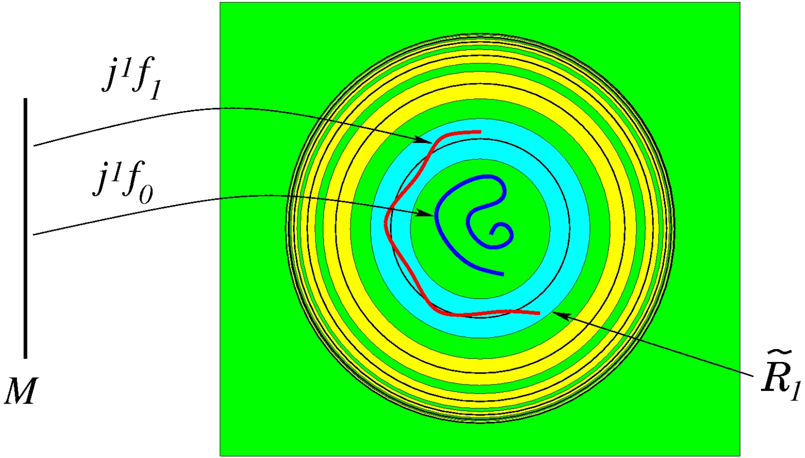
L'approche de Nash



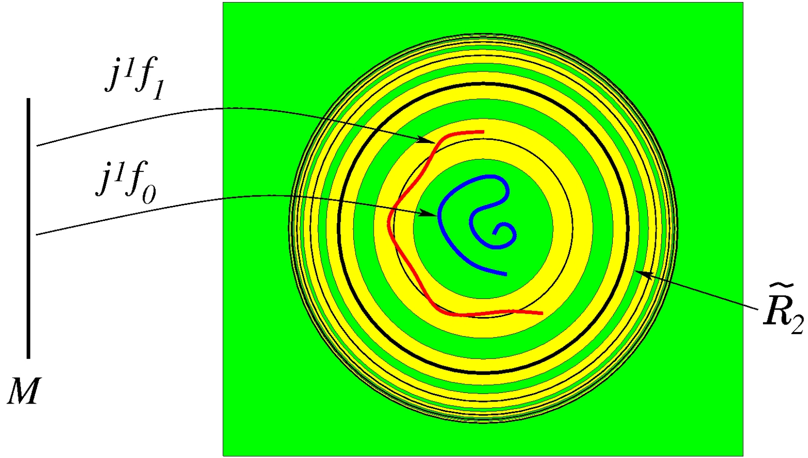
L’approche de Nash



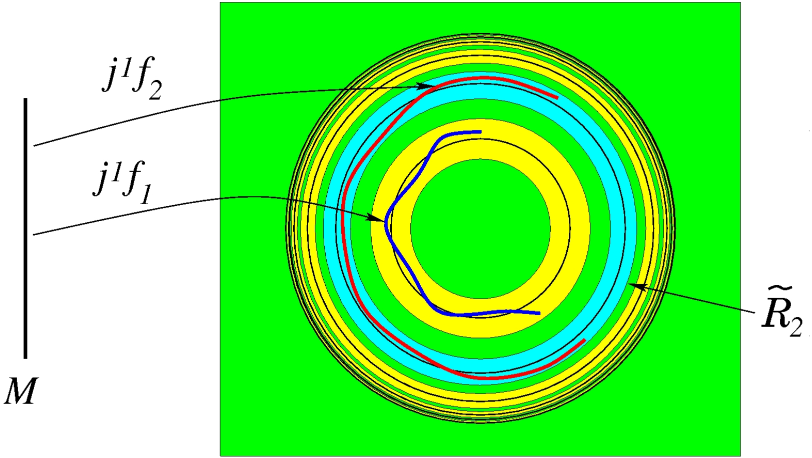
L'approche de Nash



L'approche de Nash



L'approche de Nash



L'approche de Nash

Question.– La limite (si elle existe)

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} f_k$$

est-elle une application isométrique ?

L'approche de Nash

Question.– La limite (si elle existe)

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} f_k$$

est-elle une application isométrique ?

Réponse.– Si l'on choisit convenablement les paramètres des intégrations convexes successives, la suite (f_k) converge au sens C^1 vers une application f_∞ C^1-isométrique.

L'approche de Nash

Question.– La limite (si elle existe)

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} f_k$$

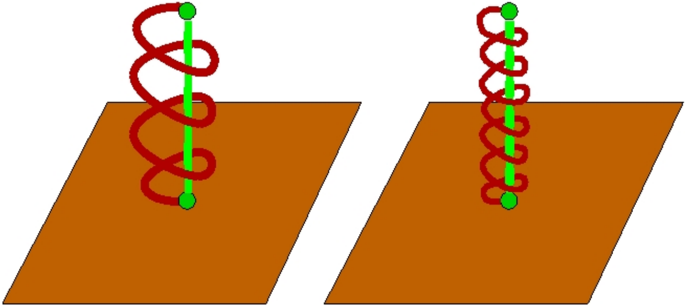
est-elle une application isométrique ?

Réponse.– Si l'on choisit convenablement les paramètres des intégrations convexes successives, la suite (f_k) converge au sens C^1 vers une application f_∞ C^1-isométrique.

Voyons pourquoi !

Convergence au sens C^0

En effet, la différence $\|f_k - f_{k-1}\|_{C^0}$ est contrôlée par les nombres d'oscillation de différentes intégrations convexes.

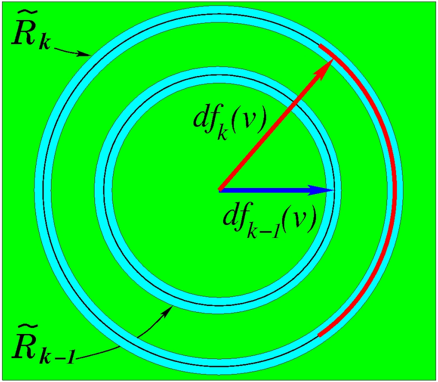


On pose

$$f_\infty = \lim_{k \to +\infty} f_k.$$

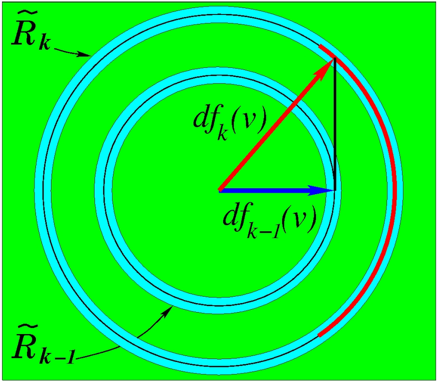
Convergence au sens C^1

En effet, la différence $\|df_k - df_{k-1}\|_{C^0}$ est contrôlée par la distance entre les relations différentielles successives.



Convergence au sens C^1

En effet, la différence $\|df_k - df_{k-1}\|_{C^0}$ est contrôlée par la distance entre les relations différentielles successives.



$$\|df_k - df_{k-1}\|_{C^0} \leq C^{te}\sqrt{dist(\widetilde{\mathcal{R}}_{k-1}, \widetilde{\mathcal{R}}_k)}$$

H-principe pour les immersions isométriques

Théorème (Nash-Kuiper 54-55, Gromov 86). – *Soient* (M^m, g) *une variété riemannienne quelconque et* $\mathbb{E}^q = (\mathbb{R}^q, \langle .,. \rangle)$ *un espace euclidien tel que* $q > m$. *Alors, la relation différentielle des immersions isométriques* $\mathcal{I}_{iso}$ *de* M^m *dans* $\mathbb{E}^q$ *satisfait au h-principe paramétrique.*

De plus, si $f_0 : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$ *est un plongement strictement court (i. e.* $f^*\langle .,. \rangle < g$*) alors pour tout* $\epsilon : M^m \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *il existe un plongement* C^1 *isométrique* $f : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$ *tel que*

$$\forall x \in M^m, \quad \|f(x) - f_0(x)\| \leq \epsilon(x).$$

Cette dernière propriété s'appelle la C^0*-densité*.