

Validation numérique de  
l'homogénéisation pour un modèle  
simplifié de stockage avec sources  
aléatoires

- **Introduction**
  - Modélisation de la migration de radionucléide
  - Vers un modèle probabiliste
- **Calcul des moments**
  - Comportement aléatoire des sources : un exemple
  - Définition et calcul des premiers moments
  - Simulations numériques
- **Homogénéisation du modèle aléatoire**
  - Présentation générale
  - Résultats théoriques
  - Validation numérique

- Introduction
  - Modélisation de la migration de radionucléide
  - Vers un modèle probabiliste
- Calcul des moments
  - Comportement aléatoire des sources : un exemple
  - Définition et calcul des premiers moments
  - Simulations numériques
- Homogénéisation du modèle aléatoire
  - Présentation générale
  - Résultats théoriques
  - Validation numérique

# Introduction – modélisation

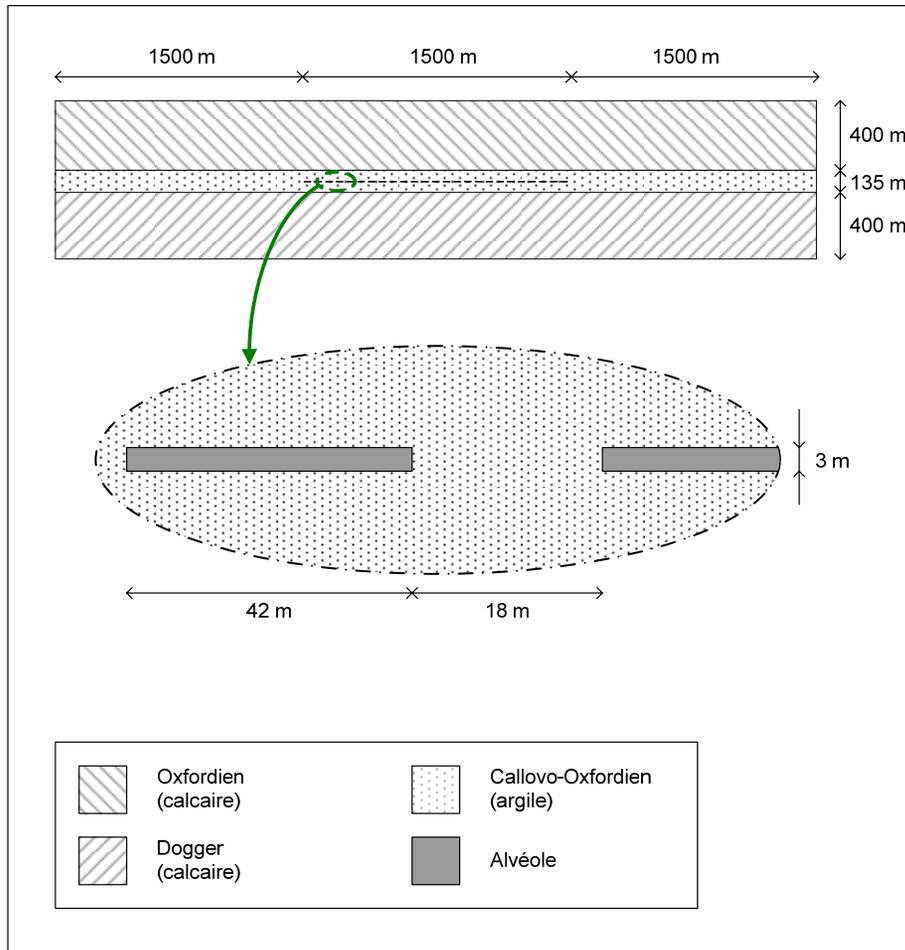
- Objectif : Valider (illustrer) les résultats de l'homogénéisation
  - Géométrie et équation simplifiées
    - ⇒ Approche valable (sauf mention contraire) dans des cas plus complexes et plus réalistes
  - Modélisation simplifiée de la migration de radionucléide en milieu poreux (1 phase saturée):

$$\omega_p R \frac{\partial C}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \overline{\overline{D}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}(C) - \vec{V} C \right) + \omega_p R \lambda C = Q$$

$$\Rightarrow \omega_p R \frac{\partial C}{\partial t} + L(C) = Q$$

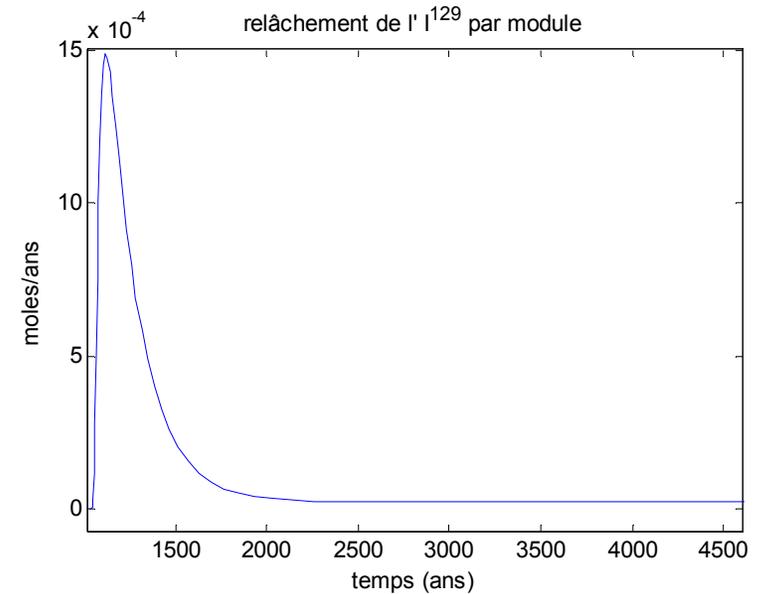
# Introduction – modélisation

Une géométrie 2D simplifiée :



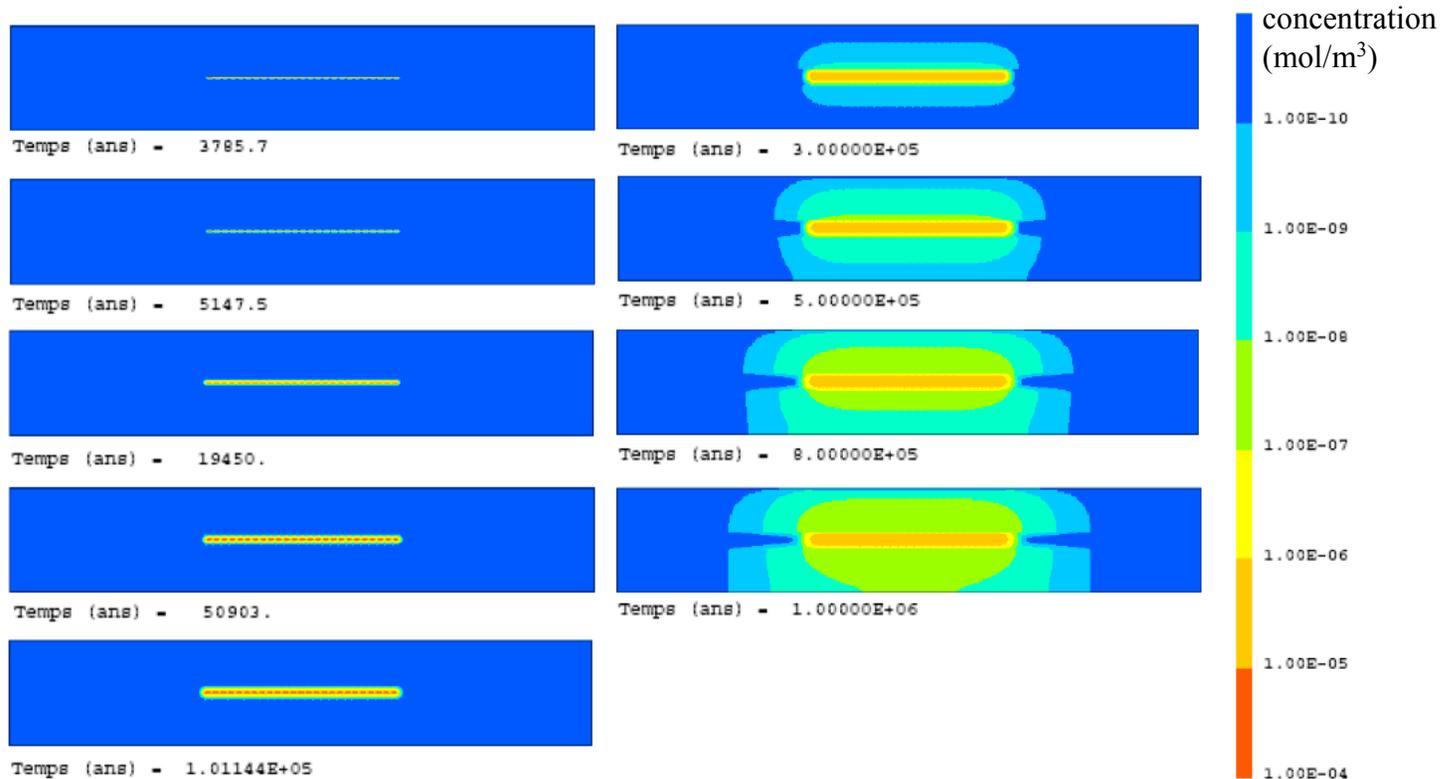
Caractéristiques de l' $I^{129}$  :

- Période radioactive  
de l' $I^{129}$  :  $15 \cdot 10^6$  ans



# Introduction – modélisation

- Un exemple de simulation :
  - rupture simultanée de tous les conteneurs
  - calculs effectués avec Castem (EFMH)



# Introduction – aspect aléatoire

- Plusieurs sources d'incertitudes :
  - Caractéristiques physiques du milieu
    - Description exhaustive impossible
  - Comportement de relâchement
    - Contenu des colis variable
    - Phénomène d'usure/rupture bien modélisé par un contexte aléatoire
- Prise en compte de l'aléa sur la fuite dans la modélisation

# Introduction – aspect aléatoire

- Modèle probabiliste :

Aléa sur le terme source :  $Q(\omega)$

⇒ la solution du problème devient aléatoire :  $C(\omega)$

$$\omega_p R \frac{\partial C(\omega)}{\partial t} - L(C(\omega)) = Q(\omega) \quad (P)$$

- On peut caractériser la solution à travers ses moments

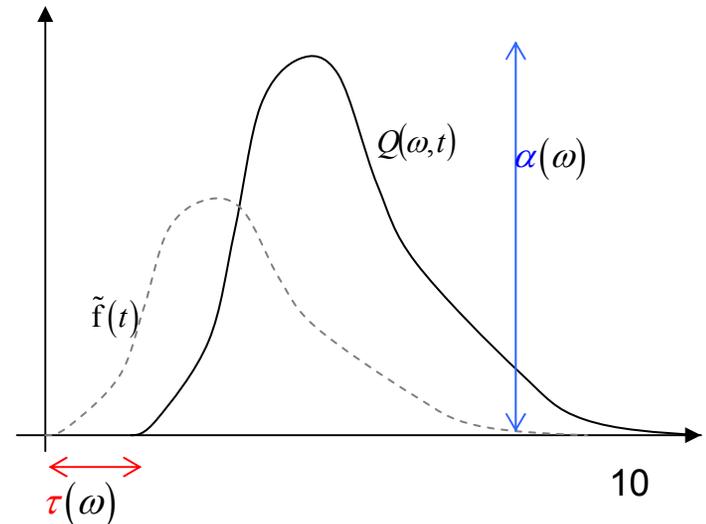
- **Introduction**
  - Modélisation de la migration de radionucléide
  - Vers un modèle probabiliste
- **Calcul des moments**
  - Comportement aléatoire des sources : un exemple
  - Définition et calcul des premiers moments
  - Simulations numériques
- **Homogénéisation du modèle aléatoire**
  - Présentation générale
  - Résultats théoriques
  - Validation numérique

# Calcul des moments - un exemple

- Un cas particulier d'aléa sur les sources  
Une courbe de relâchement typique, avec :
  - Aléa sur le temps de déclenchement
  - Aléa sur la quantité de matière relâchée
  - Indépendance entre tous les aléas

⇒ Terme source associé  
à l'alvéole  $i$  :

$$Q_i(\omega, t) = \alpha_i(\omega) \tilde{f}(t - \tau_i(\omega))$$



# Calcul des moments - un exemple

- Conséquence de la linéarité :  
la solution  $C(\omega, x, t)$  de  $(P)$  devient une superposition des  $c_i(x, t)$  solutions de

$$\omega_p R \frac{\partial c_i}{\partial t} + L(c_i) = \tilde{f} \cdot \mathbb{1}_{B_i} \quad (P_i)$$

$$\Rightarrow C(\omega, x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\omega) c_i(t - \tau_i(\omega), x)$$

# Calcul des moments

La linéarité et l'indépendance donnent l'espérance et la variance sous la forme:

$$* E[C(\cdot, x, t)] = \sum_{i=1}^N E[\alpha_i] E[c_i(t - \tau_i, x)]$$

$$* \text{Var}[C(\cdot, x, t)] = \sum_{i=1}^N E[\alpha_i^2] E[c_i(t - \tau_i, x)^2] - E[\alpha_i]^2 E[c_i(t - \tau_i, x)]^2$$

et si on connaît  $f_\tau$  la densité de probabilité des décalages  $\tau_i$ ,  
par définition:

$$E[c_i(t - \tau_i, x)] = \int c_i(s, x) f_\tau(t - s) ds$$

$$E[c_i(t - \tau_i, x)^2] = \int c_i(s, x)^2 f_\tau(t - s) ds$$

# Calcul des moments

De même, la corrélation entre différents temps et points de l'espace  $Cor(X, Y) = E[X.Y]$  se calcule ainsi:

$$\begin{aligned} Cor\left(C(\cdot, x_1, t_1), C(\cdot, x_2, t_2)\right) &= \sum_{i=1}^N E\left[\alpha_i^2\right] E\left[c_i(t_1 - \tau_i, x_1) c_i(t_2 - \tau_i, x_2)\right] \\ &+ \sum_{\substack{i, j \\ i \neq j}} E\left[\alpha_i\right] E\left[\alpha_j\right] E\left[c_i(t_1 - \tau_i, x_1)\right] E\left[c_j(t_2 - \tau_j, x_2)\right] \end{aligned}$$

Avec par définition:

$$E\left[c_i(t_1 - \tau_i, x_1) c_i(t_2 - \tau_i, x_2)\right] = \int c_i(t_1 - s, x_1) c_i(t_2 - s, x_2) f_{\tau}(s) ds$$

# Calcul des moments

Par définition, la covariance et le coefficient de corrélation se déduisent de l'espérance et de la corrélation par :

$$* \text{Cov}(X, Y) = \text{Cor}(X, Y) - E[X]E[Y]$$

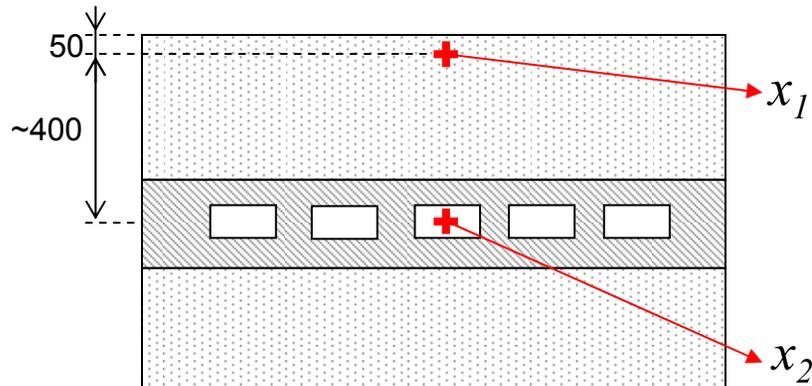
$$* \rho(C(\cdot, x_1, t), C(\cdot, x_2, s)) = \frac{\text{Cov}(C(\cdot, x_1, t), C(\cdot, x_2, s))}{\sqrt{\text{Var}[C(\cdot, x_1, t)]\text{Var}[C(\cdot, x_2, s)]}} \\ = \rho^{1,2}(t, s)$$

# Calcul des moments

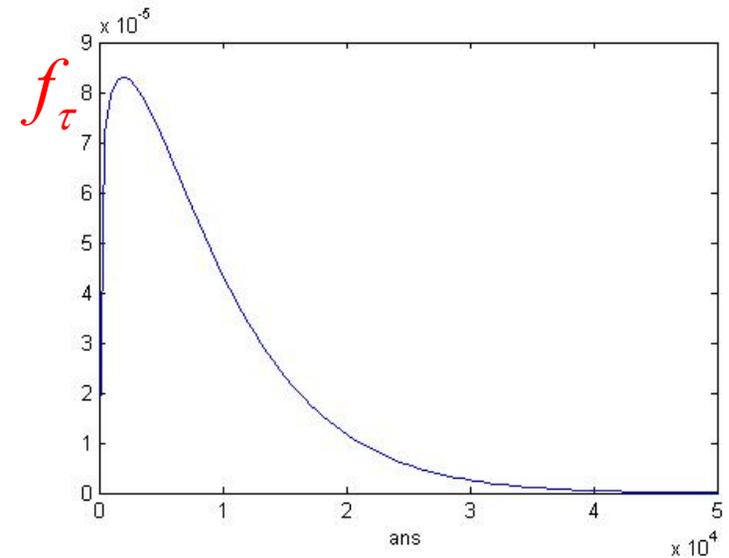
- Tous ces moments sont bien déterminés si on fixe  $E[\alpha]$  et  $\text{Var}[\alpha]$  finis et  $f_\tau$
- Leur calcul requiert la résolution de  $N$  (=nb de sources) problèmes similaires
  - ⇒ gains possibles dans la résolution numérique :
    - Construction d'une discrétisation commune
    - Préconditionnement des matrices
    - Résolution des systèmes linéaires

# Calcul des moments - simulation numérique

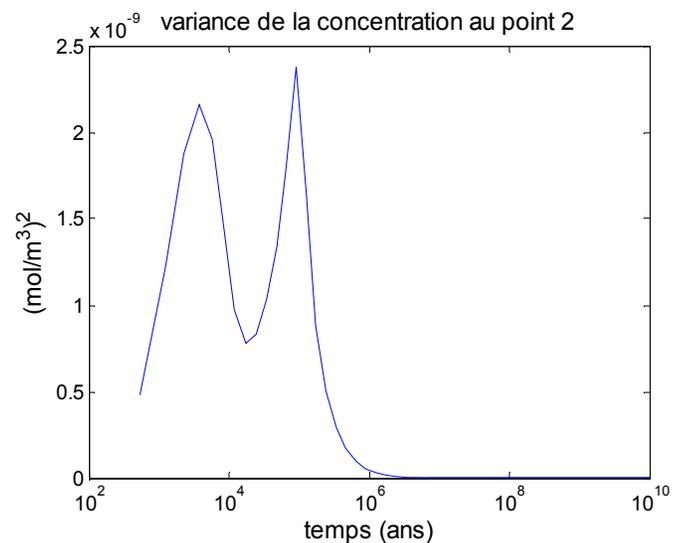
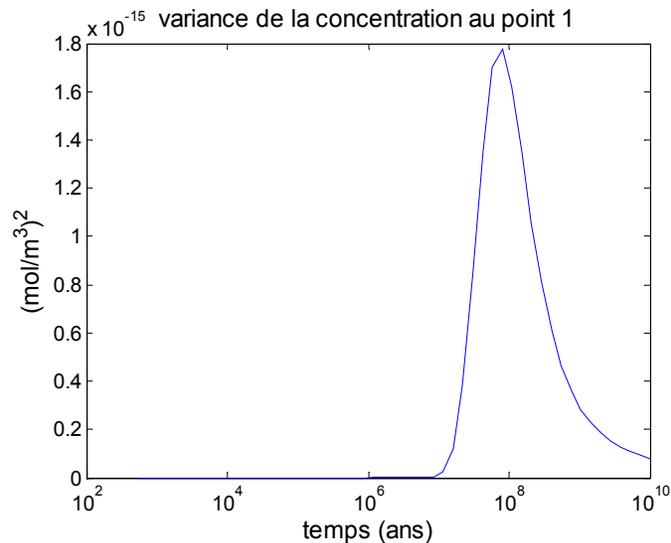
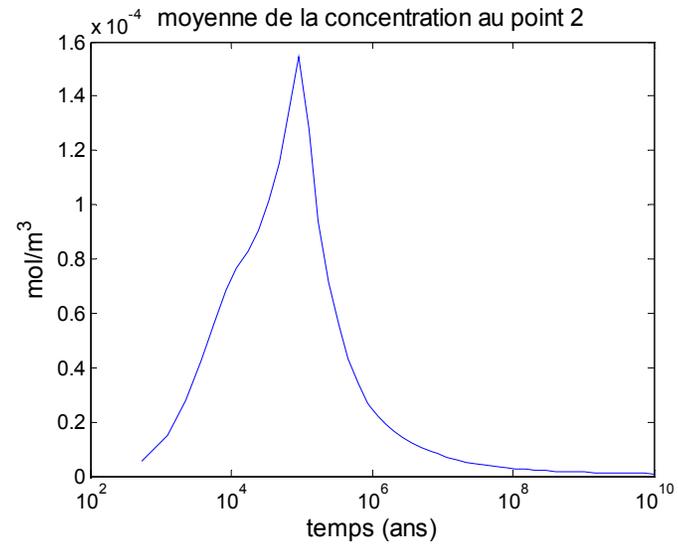
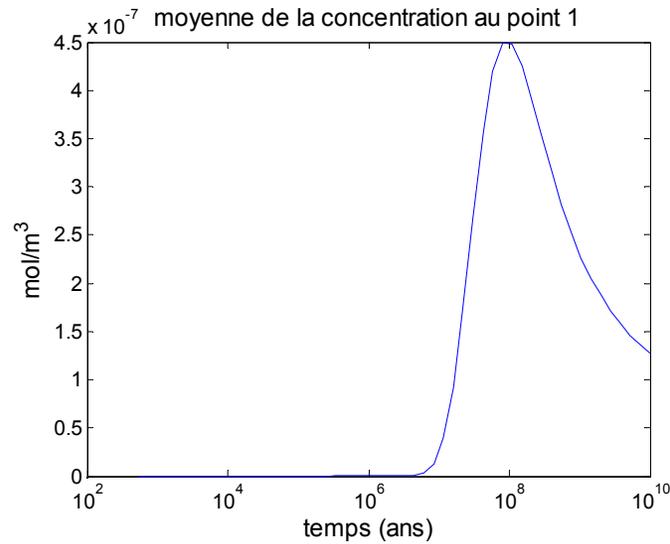
- Calcul des moments en tout temps  $(t,s)$  et en deux points  $(x_1, x_2)$  :



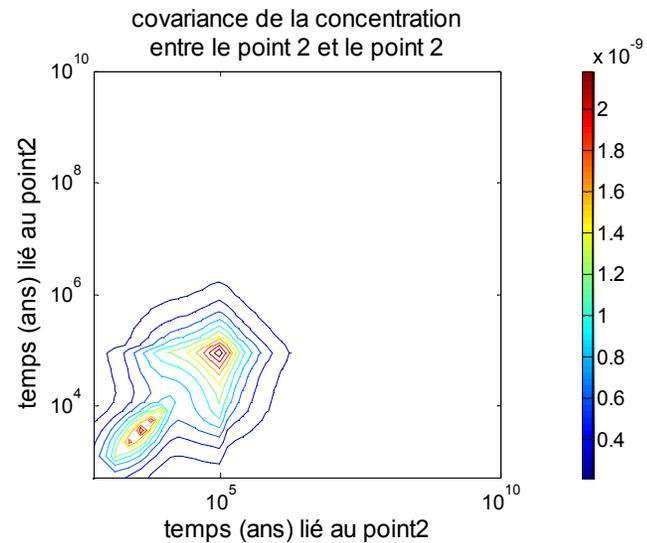
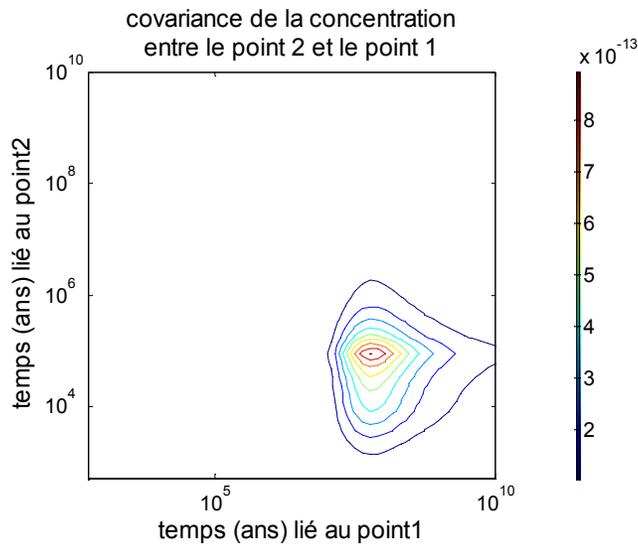
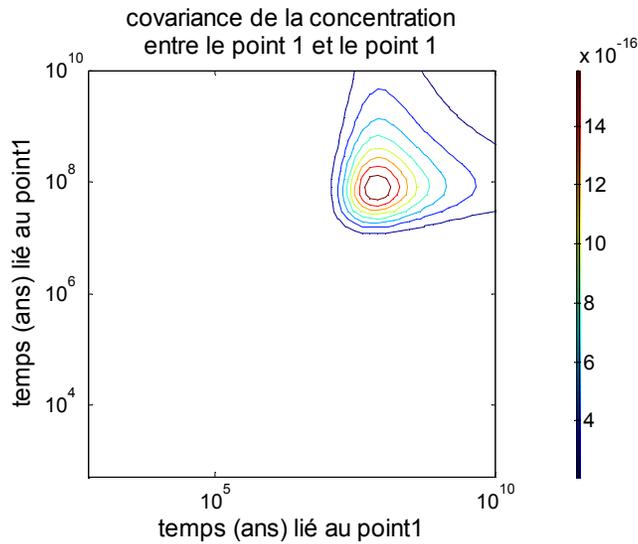
$$\begin{cases} N = 21 & E[\alpha_i] = 1 \\ & Var[\alpha_i] = 0.1 \end{cases}$$



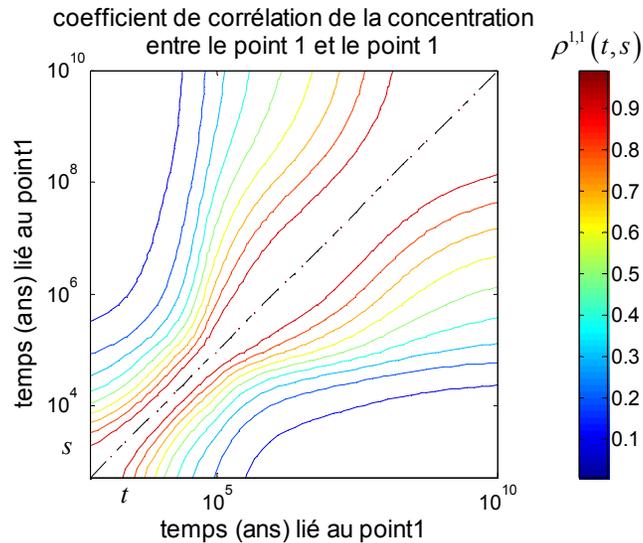
# Calcul des moments – moyenne et variance



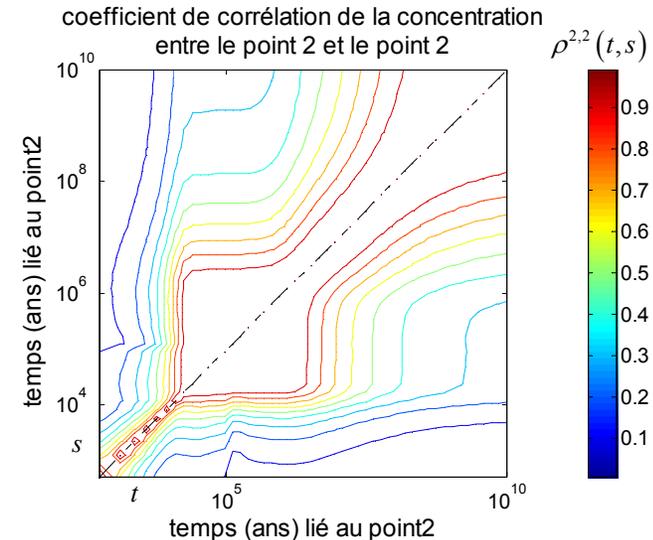
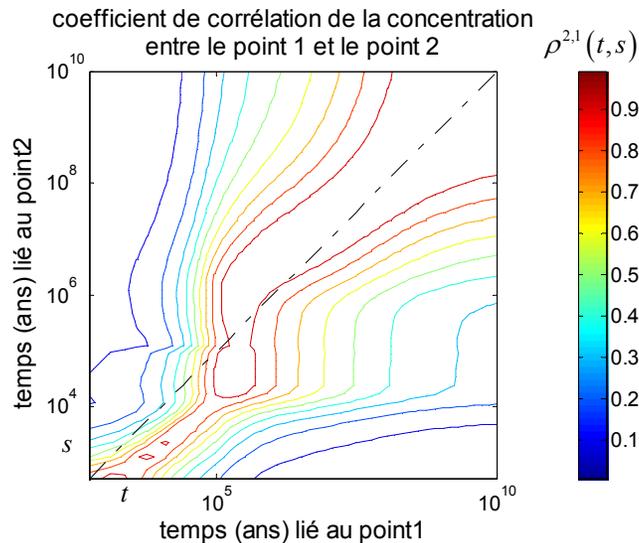
# Calcul des moments – covariance



# Calcul des moments – coefficient de corrélation



- $\rho \geq 0$  : valeurs non corrélées  
ou variant dans le même sens
- temps longs décorrélés des temps courts
- temps longs corrélés entre eux



- **Introduction**
  - Modélisation de la migration de radionucléide
  - Vers un modèle probabiliste
- **Calcul des moments**
  - Comportement aléatoire des sources : un exemple
  - Définition et calcul des premiers moments
  - Simulations numériques
- **Homogénéisation du modèle aléatoire**
  - Présentation générale
  - Résultats théoriques
  - Validation numérique

# Homogénéisation – présentation

- Difficultés de la simulation numérique :
  - grand domaine ( $\sim$ km) / petits détails (sources  $\sim$ m)  
 $\Rightarrow$  maillage très lourd et calcul coûteux
- Une solution possible : l'homogénéisation
  - construction d'un modèle global macroscopique sur un domaine homogénéisé plus simple
  - approche adaptée à l'obtention d'un modèle champ lointain à partir des renseignements champs proche

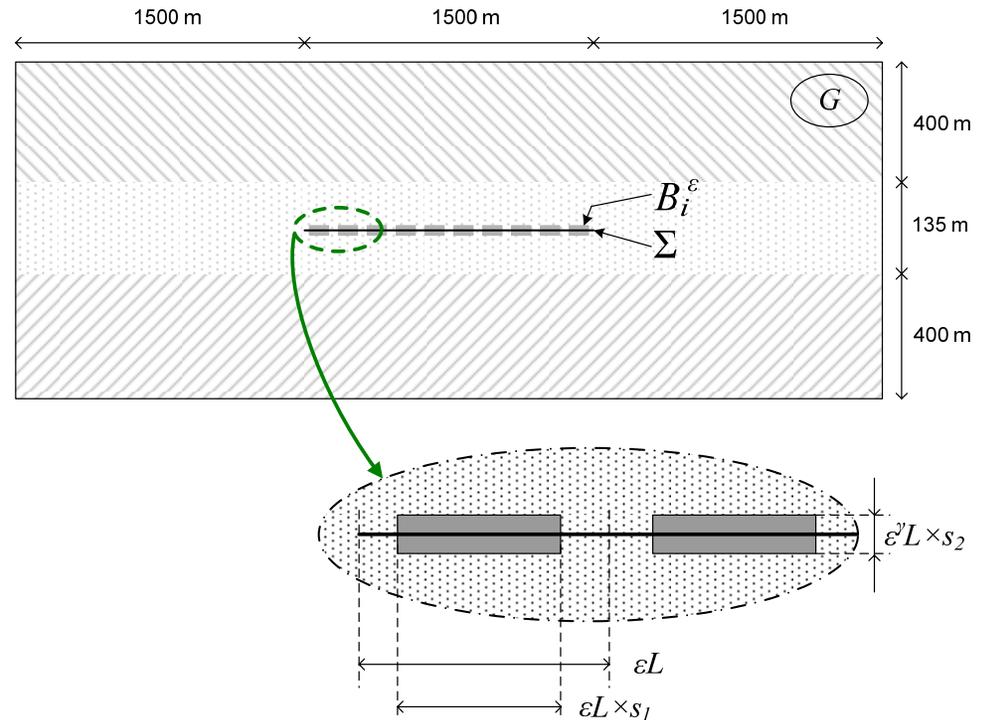
# Homogénéisation – présentation

- Éléments de base :
  - Mise en évidence de deux échelles spatiales de taille (micro/macro)
  - Détermination d'un petit paramètre  $\varepsilon$  caractérisant le rapport entre les deux échelles
  - Périodicité sur l'échelle "microscopique"  
(peut être relaxé)
- Le problème limite ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) donne le modèle global (macroscopique)

# Homogénéisation – présentation

- Cas du stockage :

- macro : site de stockage
- micro : alvéole
- petit paramètre :  $\varepsilon = 1/N$
- périodicité horizontale
- apparition d'une source "homogène" de support singulier dans le modèle global



$$Q_i^\varepsilon(\omega, t) = \mathbb{1}_{B_i^\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^\gamma} q(T_{x'/\varepsilon} \omega, t)$$

$T_{x'/\varepsilon} \omega$  processus stationnaire et ergodique

# Homogénéisation – résultats théoriques

- On considère :
  - $u^\varepsilon$  solution aléatoire du problème détaillé

$$\omega_p R \frac{\partial u^\varepsilon(\omega)}{\partial t} + L(u^\varepsilon(\omega)) = \sum_{i=1}^N Q_i^\varepsilon(\omega) \quad \text{dans } G$$

- $u^0$  solution du problème homogénéisé

$$\omega_p R \frac{\partial u^0}{\partial t} + L(u^0) = Q^0 \cdot \delta_\Sigma \quad \text{dans } G$$

$$\text{avec } Q^0(t) = s_1 s_2 E[q(\cdot, t)]$$

# Homogénéisation – résultats théoriques

- On peut montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(0, \infty; H^1(G))} = 0 \quad \text{p.s.}$$

- On a donc convergence vers un problème:
  - déterministe
  - avec une géométrie homogène plus simple
  - avec une source homogène spatialement $\Rightarrow u^0$  est une approximation simple à calculer
- On complète ce résultat avec une estimation du taux de convergence

# Homogénéisation – résultats théoriques

- Sous certaines hypothèses de mélange (+ que ergodicité), on peut montrer l'estimation d'erreur suivante :

$$E \left\| u^\varepsilon - u^0 \right\|_{L^2(0,T;H^1(G))}^2 \leq C \left( \varepsilon^2 + \varepsilon^{2\gamma} \right)$$

- Ceci permet d'estimer la qualité de l'approximation de  $u^\varepsilon$  faite par  $u^0$

# Homogénéisation – validation numérique

- On a : 
$$E \left[ \left\| u^\varepsilon - u^0 \right\|_{L^2(0,T;L^2(G))}^2 \right] = \underbrace{\int_0^T \int_G (u^0)^2 dx dt}_{I_1} - 2 \underbrace{\int_0^T \int_G E[u^\varepsilon u^0] dx dt}_{I_2} + \underbrace{\int_0^T \int_G E[(u^\varepsilon)^2] dx dt}_{I_3}.$$

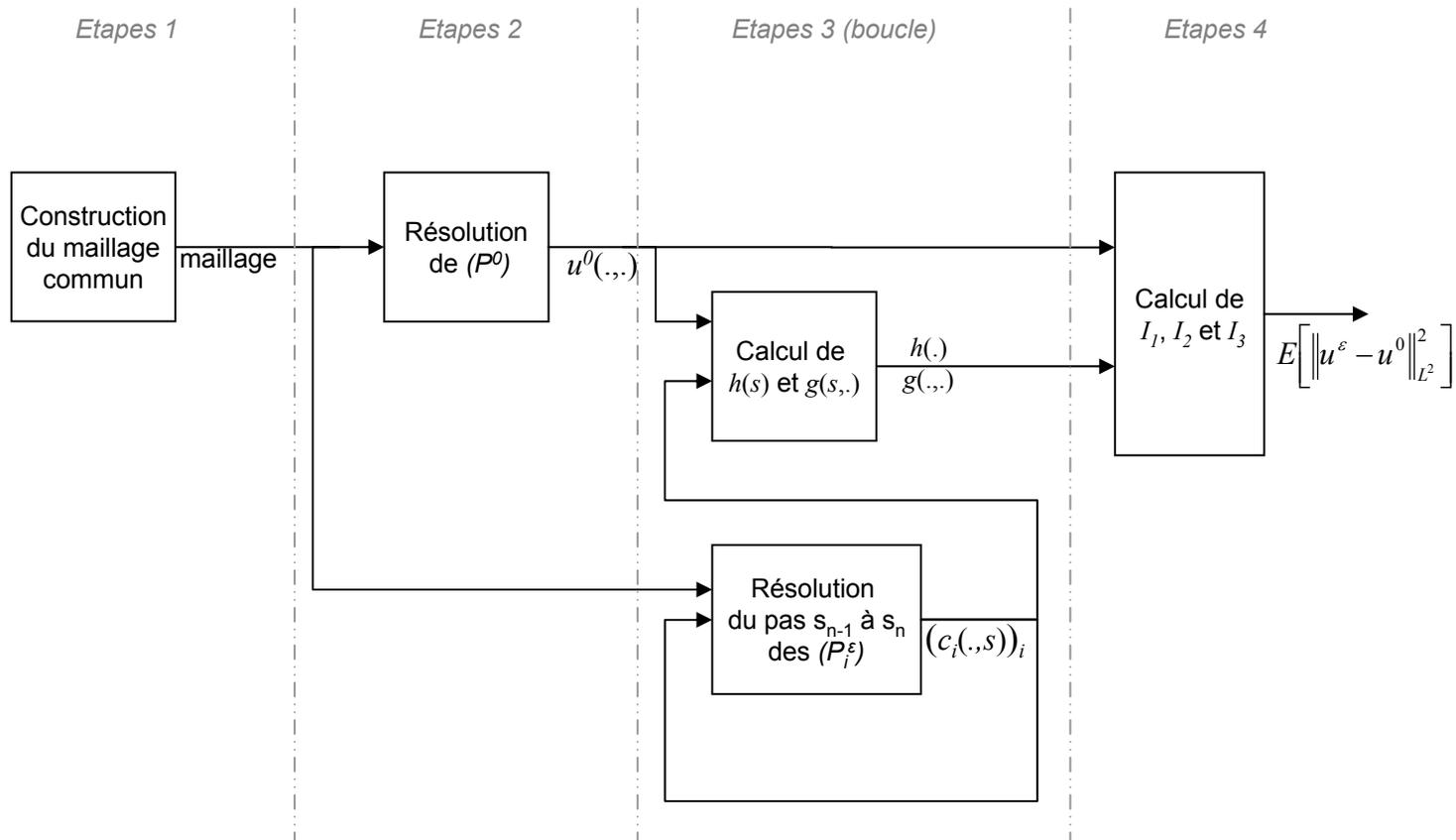
- Dans le cas où  $u^\varepsilon(\omega, x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\omega) c_i(t - \tau_i(\omega), x)$ ,  
on calcule que :

$$I_2 = \int_0^T \left( \int_0^T g(s, t) f_\tau(t - s) dt \right) ds \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^T h(s) F_\tau(s) ds$$

avec  $g(s, t) = \sum_{i=1}^N E[\alpha_i] \int_G c_i(x, s) u^0(x, t) dx$  et  $h(s) = \sum_{i=1}^N E[\alpha_i^2] \int_G c_i(x, s)^2 dx$

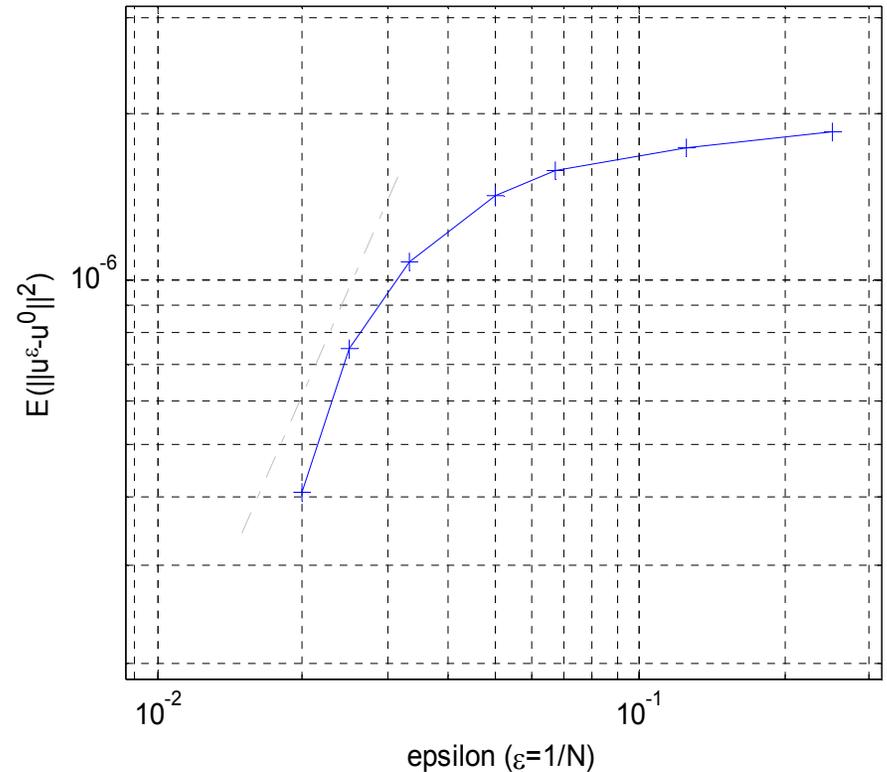
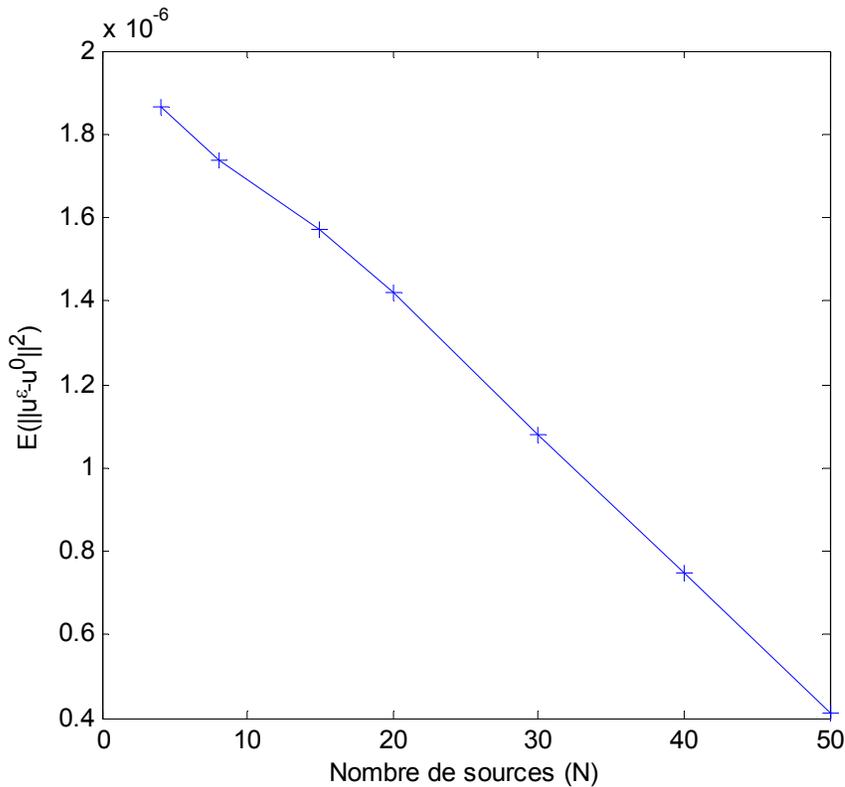
# Homogénéisation – validation numérique

- Mise en œuvre du calcul

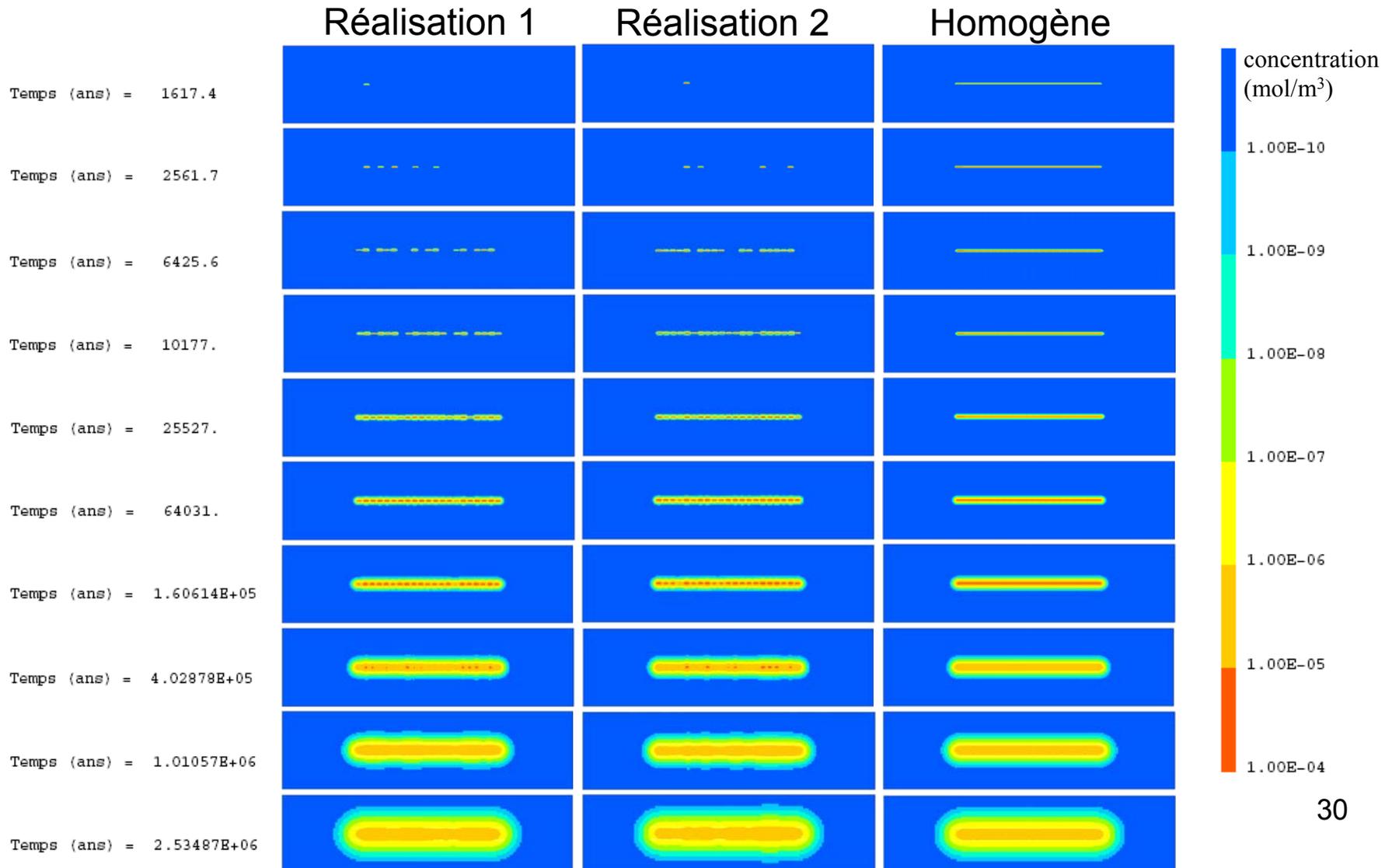


# Homogénéisation — validation numérique

- Résultats numériques



# Homogénéisation – simulation numérique



# Conclusion

- Application des techniques d'homogénéisation au problème aléatoire
- Calcul des moments dans un cas particulier
- Validation numérique de la convergence
- Perspectives :
  - Résultats numériques du cas 3D
  - Modélisation plus réaliste de l'aléa
  - Application au cas non linéaire
  - Convergence en loi