Construction de lois de probabilité pour les termes sources volumiques

Olivier Le Maître

olm@iup.univ-evry.fr

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE ET D'ENERGTIQUE D'ÉVRY

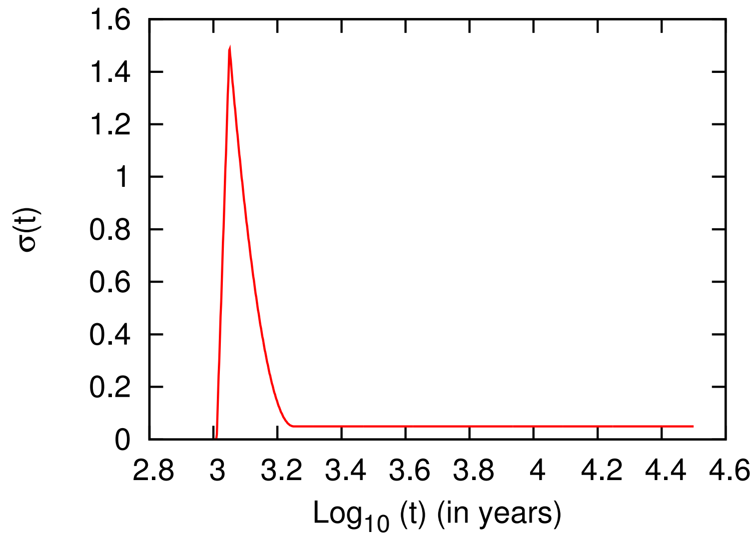
AND LIMSI-CNRS, ORSAY, FRANCE.

Information disponible :

❍ **Données du cas test :**

➪ **Taux de relachement de l'espèce**

➪ Pas d'information sur les **variabilités** de ces données.



❍ **Questions :**

➪ Comment considérer ces données ?

➪ Type de variabilité autour des moyennes ?

TAUX de RELACHEMENT MOYEN

- **Echelles de temps**
- **Ordre de grandeur**

Une approche rationnelle :

- **Approche probabiliste**.
- Basée sur l'information disponible (connue) **uniquement**.
- Recherche de la loi de probabilité la **moins informative** :

Principe du maximum d'entropie.

Approche probabiliste :

$\Sigma(t)$: processus stochastique définit sur un espace probabilisé $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mu)$, à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et indexé sur t.

Principe du maximum d'Entropie :

- **Loi de probabilité de $\Sigma(s)$** : $p_\sigma(\sigma)$.
- **Entropie - mesure d'information** :

$$S(p_\sigma) = -\int_V p_\sigma(\sigma) \log[p_\sigma(\sigma)] d\sigma.$$

- **Espace fonctionnel V** :

$$V = \{f \ : t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^+, \text{contraintes fonctionnelles}\}.$$

- **Information disponible** : donnée du taux moyen de relachement $\overline{\sigma}(t)$.

$$E[\Sigma] = \int_{\mathcal{A}} \Sigma(\omega) d\mu(\omega) = \int_V \sigma p_\sigma(\sigma) d\sigma = \overline{\sigma}.$$

Maximum d'entropie :

- **Lagrangien du problème d'optimisation** :

$$\mathcal{L}(p_\sigma, \beta_0, \beta_1) = S(p_\sigma) + (\beta_0 - 1)\left[\int_V p_\sigma(\sigma)d\sigma - 1\right] + \beta_1\left[\int_V \sigma p_\sigma(\sigma)d\sigma - \overline{\sigma}\right]$$

Posons $c_0(\sigma) = \int_V p_\sigma(\sigma)d\sigma$ et $c_1(\sigma) = \int_V \sigma p_\sigma(\sigma)d\sigma$.

- **Points stationnaire de $\mathcal{L}$** :

  - $\partial\mathcal{L}/\partial p_\sigma = 0 \Rightarrow \quad p_\sigma(\sigma) = \exp[-\beta_0 c_0(\sigma) - \beta_1 c_1(\sigma)].$
  - $\partial\mathcal{L}/\partial \beta_0 = 0 \Rightarrow \quad \int_V \exp[-\beta_0 c_0(\sigma) - \beta_1 c_1(\sigma)]d\sigma - 1 = 0.$
  - $\partial\mathcal{L}/\partial \beta_1 = 0 \Rightarrow \quad \int_V \sigma\exp[-\beta_0 c_0(\sigma) - \beta_1 c_1(\sigma)]d\sigma - \overline{\sigma} = 0.$

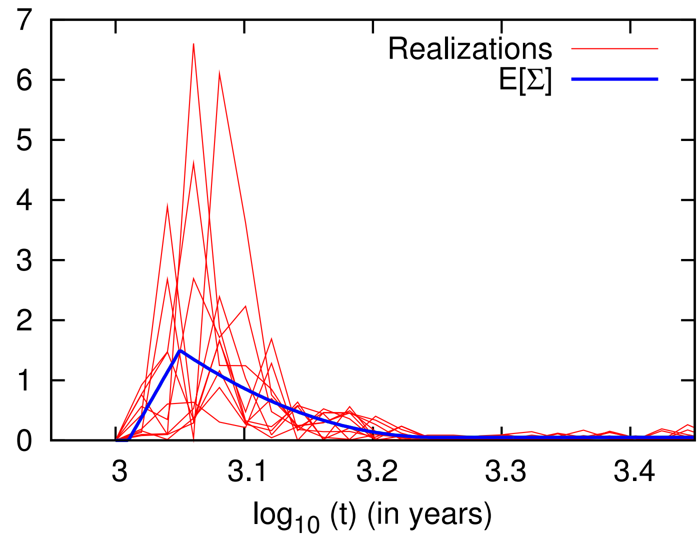
- **Passage dans un espace fonctionnel de dimension finie :**

Discrétisation de $\Sigma(t)$

Discrétisation naïve :

❍ Recherche de la **loi de probabilité jointe de Σ** en un nombre fini de points $\Sigma_i = \Sigma(t_i)$:

$$p(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \propto \prod_{i=1}^{n} \exp[-\sigma_i/\overline{\sigma}(t_i)].$$



➩ Variabilité très élevée.

❍ **Critiques** : ➩ Indépendence des $\Sigma_i \rightarrow$ corrélation nulle entre Σ_i.

➩ Processus peu régulier.

Discrétisations moins naïves :

- **Renforcer la régularitée** :
  - Travailler sur un espace fonctionnel V adapté (par ex. un seul max).
  - Imposer des corrélations entre points : pas d'information disponible.
  - Pénaliser les fluctuations à petite échelle.
- **Adapter la discrétisation**

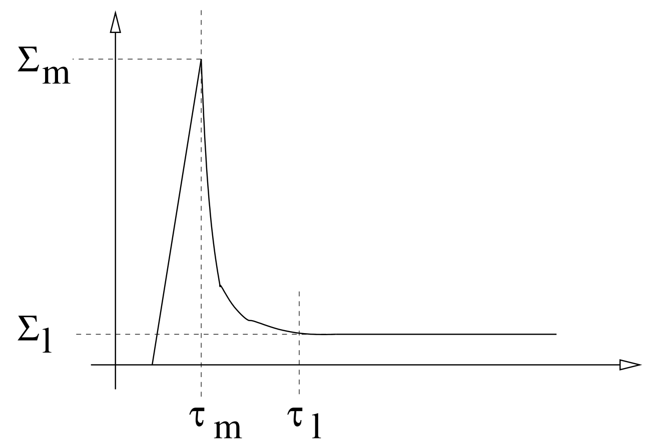
Une tentative de discrétisation adaptée :

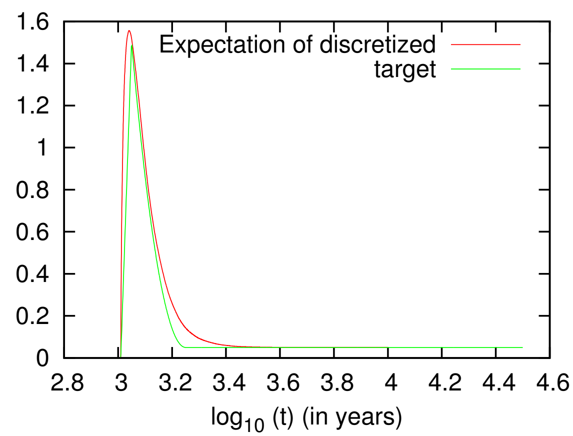
❍ **Charactéristiques principales** :

Interpolation entre les points caractéristiques.

Calcul de $p(\tau_m, \tau_l, \sigma_m \sigma_l)$:

- la moins informative
- le max moyen coïncide avec le max de $\overline{\sigma}$.





Travaux en cours :

- **Sélection des points caractéristiques des taux de relachements**
- **Contrôle de la variabilité** : introduction d'une contrainte sur la variance de la quantité totale émisse :

$$\mathrm{Var}\left[\int_0^T \Sigma(t)dt\right].$$

- Développement **d'échantillonneurs** efficaces.
- Développement en **PC** des processus discrétisés.