Sous-groupe MOMAS :

Méthodes Mathématiques et numériques pour les écoulements diphasiques avec dissolution en milieu poreux

Projet Université - EDF

Objectifs :

Problèmes d'écoulements à deux phases pour le stockage de déchets radioactifs ;

Volumes finis sur maillages quelconques ;

Limite du modèle eau-gaz quand la viscosité du gaz tend vers zéro

Les membres

- Ophélie Angelini, Doctorante CIFRE, EDF R&D
- Jean-Baptiste Apoung-Kamga, Maître de Conférence, Mathématiques, Orsay
- Konstantin Brenner, Stagiaire de Master 2, Mathématiques, Orsay
- Clément Chavant, Responsable Scientifique, EDF R&D
- Eric Chénier, Maître de Conférences, Université de Marne-la-Vallée
- Robert Eymard, Professeur, Université de Marne-la-Vallée
- Sylvie Granet, Ingénieur, EDF R&D
- Marie Henry, Maître de Conférence, Université de Provence
- Raphaèle Herbin, Professeur, Université de Provence
- Danielle Hilhorst, Directeur de Recherche au CNRS, Mathématiques, Orsay
- Amel Sboui, Chercheur Post-Doctoral, EDF R&D
- Martin Vohralík, Maître de Conférences, Université Paris 6

Volumes finis sur maillages quelconques et écoulements diphasiques

Les projets auxquels je participe ...

Volumes finis sur maillages quelconques

La méthode des volumes finis sur maillages quelconques permet de discrétiser des termes de diffusion comportant des tenseurs inhomogènes et anisotropes. Cette méthode, qui s'appuie sur une formulation variationnelle, a été développée par Eymard, Herbin et Gallouët. On peut discrétiser tous les autres termes à l'aide de la méthode des volumes finis standard.

But : Appliquer la méthode des volumes finis sur maillages quelconques aux problèmes d'écoulements diphasiques.

Aujourd'hui : La méthode des volumes finis sur maillages quelconques pour une équation de convection-diffusion.

En préparation : La méthode des volumes finis sur maillages quelconques pour une équation de convection-réaction-diffusion parabolique dégénérée.

Ophélie Angelini, Konstantin Brenner, Robert Eymard, Danielle Hilhorst.

On discrétise le problème aux limites (Stage de Master 2 de Konstantin Brenner).

$$\partial_t u - \nabla(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x})\nabla u) + \nabla(\mathbf{V}u) = f(\mathbf{x},t) \quad (\mathbf{x},t) \in Q_T, \tag{1}$$

avec la condition aux limites de Dirichlet homogène

$$u(\mathbf{x},t) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in (0,T), \tag{2}$$

et la condition initiale

$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{3}$$

où $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ et où $Q_T = \Omega \times (0,T)$,

On suppose que les fonctions données $\mathbf{\Lambda}$,$\mathbf{V}$, f, u_0 sont suffisamment régulières, que $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice définie positive, et que de plus $div\ \mathbf{V} \geq 0$.

Notre idée est la suivante : il s'agit de discrétiser le terme de diffusion à l'aide de la méthode des volumes sur maillages quelconques tandis que tous les autres termes sont discrétisés par la méthode des volumes finis standard.
Les hypothèses sur le maillage sont peu restrictives, puisque l'hypothèse d'orthogonalité n'est pas nécessaire. On donne un ensemble de volumes de contrôle, et on associe à chacun d'eux un point intérieur.

On associe au maillage les espaces discrets

$$
\begin{aligned}
X_{\mathcal{D}} &= \{((v_K)_{K\in\mathcal{M}}, (v_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}}), v_K \in \mathbb{R}, v_\sigma \in \mathbb{R}\},\\
X_{\mathcal{D},0} &= \{v \in X_{\mathcal{D}} \text{ such that } (v_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}} = 0\}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

De plus pour une fonction φ suffisamment régulière on définit $P_h\varphi \in X_D$ de la façon suivante

$$
\begin{aligned}
(P_h\varphi)_K &= \varphi(\mathbf{x}_K) \quad \text{for all} \quad K \in \mathcal{M},\\
(P_h\varphi)_\sigma &= \varphi(\mathbf{x}_\sigma). \quad \text{for all} \quad \sigma \in \mathcal{E}
\end{aligned} \tag{5}
$$

(i) La condition initiale pour le schéma est donnée par

$$u_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K u_0(\mathbf{x}) \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad K \in \mathcal{M}.$$

(ii) Le schéma de discrétisation est implicite en temps

$$m(K)(u_K^n - u_K^{n-1}) + k \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}(u^n) + k \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} V_{K,\sigma} \bar{u}_\sigma^n = km(K) f_K^n$$

pour tout $K \in \mathcal{M}$, où $k = t^{n+1} - t^n$ and $u^n, u^{n-1} \in X_{\mathcal{D},0}$. $\bar{u}_\sigma^n$ est la valeur amont.

(iii) Comme pour la méthode des volumes finis standard le flux discret doit satisfaire une condition de conservation locale

$$F_{K,\sigma}(u^n) + F_{L,\sigma}(u^n) = 0 \tag{6}$$

pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ tel que $\mathcal{M}_\sigma = \{K, L\}$.

(iv) Et l'on impose de plus la condition de Dirichlet discrète $u_\sigma^n = 0$ for all $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$.

Définition de la solution approchée Soit $u^n \in X_{\mathcal{D},0}$, $n = 1 \ldots N$, la solution du problème approché, avec $k = T/N$. On dit que la fonction constante par morceaux $u_{h,k}$ est solution approchée du problème continu de convection-diffusion si

$$u_{h,k}(\mathbf{x}, 0) = \Pi_{\mathcal{M}} u^0(\mathbf{x}) \qquad \text{pour } x \in \Omega$$

$$u_{h,k}(\mathbf{x}, t) = \Pi_{\mathcal{M}} u^n(\mathbf{x}) \qquad \text{pour } x \in \Omega, t \in (t_{n-1}, t_n] \quad \text{n=1...N.}$$

Nous définissons aussi son gradient approché par

$$\nabla_h u_{h,k}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathcal{D}} u^n(\mathbf{x}) \qquad \text{for } x \in \Omega, t \in (t_{n-1}, t_n] \quad \text{n=1...N.}$$

Résultat de convergence

Théorème Soit $\mathcal{F}$ une famille de discrétisations. On suppose que le maillage est suffisament régulier. Soit $\{u_{h,k}\}$ une famille de solutions approchées correspondant à $\mathcal{F}$. Alors il existe une fonction $u \in L^2(Q_T)$ telle que $u_{h,k} \to u$ dans $L^2(Q_T)$ quand $h, k \to 0$. De plus $u^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et $\nabla_h u_{h,k}$ converge faiblement dans $L^2(Q_T)^d$ vers ∇u quand $h, k \to 0$ et u coïncide avec la solution du problème continu.

Nous prenons un tenseur de diffusion scalaire

$$\Lambda = \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et que le champ de vitesses est constant

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (v_1, v_2).$$

Une solution exacte est donnée par

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{200\delta t + 1} e^{-50 \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{V} \cdot t|^2}{200\delta t + 1}}$$

Il s'agit d'une fonction dont le maximum est atteint autour du point $(\mathbf{x_0})$,qui est transportée par le champ convectif $\mathbf{V}$ tout en diffusant.

Premiers tests numériques

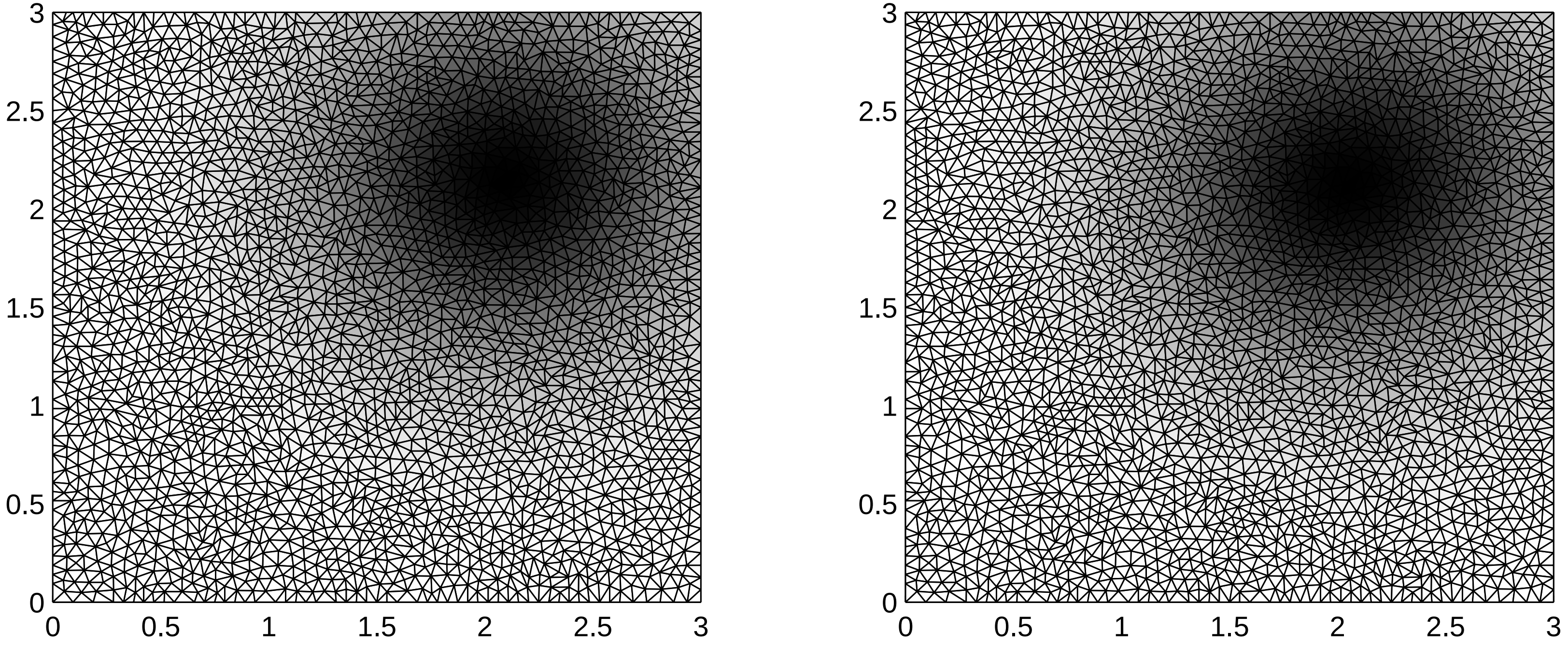

Fig. 1 – Solution exacte (à gauche) et solution approchée (à droite) sur un maillage triangulaire avec $\delta = 0.1$ à $t = 2$

.

Nous nous proposons d'étudier la limite singulière d'un écoulement diphasique quand la mobilité de l'air μ tend vers l'infini. Il s'agit d'un travail en collaboration avec Robert Eymard, Marie Henry et Raphaèle Herbin. Plus pécisément, on a le problème

$$(\mathcal{S}^\mu)\left\{\begin{array}{ll} u_t = div\Big(k_w(u)\nabla p\Big) + f^\mu(c)\bar{s} - f^\mu(u)\underline{s} & \text{dans } Q_T \\ (1-u)_t = div\Big(\mu k_a(u)\nabla(p + p_c(u))\Big) & \\ \qquad\qquad +(1-f_\mu(c))\bar{s} - (1-f_\mu(u)\underline{s}) & \text{dans } Q_T \\ \nabla p.n = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) \\ \nabla(p+p_c(u)).n = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega \end{array}\right.$$

où $Q_T := \Omega\times(0,T)$ et où

$$f^\mu(s) = \frac{k_w(s)}{M_\mu(s)}, \text{ with } M_\mu(s) = k_w(s) + \mu k_a(s).$$

u est la saturation de l'eau ;
p est la pression de l'eau ;
$k_w, \mu k_a$ sont les mobilité de l'eau et de l'autre phase ;
p_c la pression capillaire.

On recherche la limite singulière de la solution (u^μ, p^μ) du problème (S^μ) quand $\mu \to \infty$.
On fait les hypothèses techniques suivantes :

(H_1) Ω est un domaine régulier borné de R^N, où la dimension d'espace N est arbitraire,

(H_2) $u_m \in (0,1), u_m \leq c(x,t) \leq 1, u_m \leq u_0(x) \leq 1,$

(H_3) $\bar{s} \geq 0, \quad \underline{s} \geq 0$ et $\int_\Omega (\bar{s}(x) - \underline{s}(x))dx = 0,$

(H_4) $k'_w \geq 0, \quad k_w(0) = 0, \quad k_w(1) = 1$ et $k_w(u_m) > 0,$

(H_5) $k'_a \leq 0, \quad k_a(1) = 0, \quad k_a(0) = 1$ et $k_a(s) > 0$ pour tout $s \in [0,1),$

(H_6) $p'_c < 0$ et $\sup_{s\in[0,1)}(-k_a(s)p'_c(s)) < +\infty.$

Une formulation équivalente du problème (S^μ)

Il est difficile de trouver des bornes pour la fonction u sous la formulation présente, ce qui nous amène à considérer également une forme équivalente qui s'appuie sur la pression globale, que l'on définit par

$$\mathcal{P} := p + \mathcal{L}^\mu(u) = p + \int_0^u \mu \frac{k_a(\tau)}{M^\mu(\tau)} p_c'(\tau) d\tau.$$

On ajoute les deux équations, et on réécrit la première équation sous la forme assez standard d'une équation de diffusion non linéaire pour obtenir le système

$$(\mathcal{S}^\mu) \begin{cases} u_t = \Delta\psi^\mu(u) + div(f^\mu(u) M^\mu(u) \nabla\mathcal{P}) + f^\mu(c)\bar{s} - f^\mu(u)\underline{s} & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ div(M^\mu(u)\nabla\mathcal{P}) + \bar{s} - \underline{s} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \nabla\mathcal{P}.n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ \nabla\psi^\mu(u).n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ \int_\Omega \mathcal{P}^\mu(x,t)dx = \int_\Omega \mathcal{L}^\mu(u) & t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Encore une autre formulation équivalente

Avant de poursuivre, substituons l'équation elliptique dans la première équation. On obtient

$$
(\mathcal{S}^\mu)\begin{cases}
u_t = \Delta\psi^\mu(u) + \nabla f^\mu(u).M^\mu(u)\nabla\mathcal{P} + (f^\mu(c) - f^\mu(u))\bar{s} & \text{dans } \Omega\times(0,T)\\
div(M^\mu(u)\nabla\mathcal{P}) + \bar{s} - \underline{s} = 0 & \text{dans } \Omega\times(0,T)\\
\nabla\mathcal{P}.n = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T)\\
\nabla\psi^\mu(u).n = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times(0,T)\\
\int_\Omega \mathcal{P}^\mu(x,t)dx = \int_\Omega \mathcal{L}^\mu(u) & t\in(0,T)\\
u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega
\end{cases}
$$

Application formelle du principe du maximum

On pose

$$L(u) = u_t - \Delta\psi^\mu(u) - \nabla f^\mu(u).M^\mu(u)\nabla\mathcal{P} - (f^\mu(c) - f^\mu(u))\bar{s}$$

Il est standard que

$$L(u_m) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u_m \leq u,$$

et que

$$L(1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \leq 1,$$

si bien que

$$u_m \leq u \leq 1,$$

et vous pouvez remarquer que ces bornes ne dépendent pas de μ.

Ce qu'on devrait faire maintenant

(i) Faire une régularisation parabolique de la première équation ;

(ii) Appliquer une méthode de point fixe pour montrer l'existence d'une solution du problème régularisé ;

(iii) Obtenir des estimations a priori supplémentaires indépendantes du paramètre de régularisation et de μ ;

(iv) Faire tendre vers zéro le paramètre de régularisation ;

(v) Puis faire tendre μ vers l'infini.

On définit la fonction discontinue χ par

$$\chi(s) := \begin{cases} 0 & \text{si } s \in [0,1) \\ 1 & \text{if } s = 1 \end{cases},$$

ainsi que le graphe

$$H(s) := \begin{cases} 0 & \text{si } s \in [0,1) \\ [0,1] & \text{si } s = 1 \end{cases}.$$

Théorème de convergence. Sous les hypothèses $(H_1) - (H_6)$, il existe $(u, p, \hat{f})$ et une sous-suite (u^{μ_n}, p^{μ_n}) de solutions du Problème (S^{μ_n}) telle que

$$\begin{aligned} & u \in L^\infty(Q_T), \quad \text{with } 0 \le u \le 1, \\ & \hat{f} \in L^\infty(Q_T), \quad \text{with } 0 \le \hat{f} \le 1, \\ & p \in L^2(0,T; H^1(\Omega)), \\ & k_a(u)\nabla p_c(u) \in L^2(\Omega \times (0,T)) \end{aligned}$$

et

$$u^{\mu_n} \to u \text{ dans } L^2(Q_T)$$
$$p^{\mu_n} \rightharpoonup p \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

De plus

$$\int_0^T \int_\Omega u v_t dxdt = \int_0^T \int_\Omega k_w(u)\nabla p.\nabla v dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Big(\chi(c)\bar{s} - \hat{f}\underline{s}\Big) v dxdt$$
$$- \int_\Omega u_0(x)v(x,0)dx = 0, \tag{7}$$

pour tout $v \in \{w \in C^{2,1}(\overline{Q}_T), w(.,T) = 0 \text{ in } \Omega\}$ où $\hat{f}(x,t) \in H(u(x,t))$ pour $(x,t) \in Q_T$. On a de plus

$$\int_0^T \int_\Omega k_a(u)\Big[\nabla p + \nabla p_c(u)\Big]^2 dxdt = 0 \tag{8}$$

et

$$\int_\Omega p(x,t)dx = 0 \quad \text{pour presque tout } t \in (0,T). \tag{9}$$

Formellement, u satisfait le problème limite

$$(\mathcal{S}^{\mu}) \begin{cases} u_t = div\Big(k_w(u)\nabla p\Big) + \chi(c)\bar{s} - \hat{f}\underline{s} & \text{dans } Q_T \\ \nabla u.n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

où

$$\chi(s) := \begin{cases} 0 & \text{si } s \in [0,1) \\ 1 & \text{if } s = 1 \end{cases},$$

et où

$\hat{f}(x,t) \in H(u(x,t))$ pour $(x,t) \in Q_T$.

Encore à faire : interpréter ce problème comme la forme généralisée d'un problème de Richards.