Solutions globales pour les équations décrivant des écoulements insaturés en milieux poreux, avec une pression capillaire dynamique

J. Bodin[1 2], T. Clopeau[2], A. Mikelić[2]

[1] Agence Nationale pour la gestion des Déchets Radioactifs,
[2] Institut Camille Jordan (UCBL)

Plan

Présentation du modèle

Équation de Richards :

$$\partial_t \theta - \operatorname{div}\left(k\left(\theta\right)\nabla P\right) = 0,$$

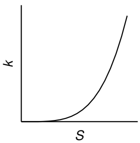
où $\theta = \phi\, S$: la fraction volumique du liquide, P : pression du liquide.
Pression capillaire (statique) :

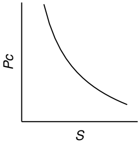
$$P_c\left(\theta\right) = P_A - P.$$

Conductivité hydraulique :

$$k\left(\theta\right) = K\,\frac{k_l^r\left(\theta\right)}{\mu}.$$

Classiquement : P_c et k_l^r fonctions univoques de θ.





Pression capillaire dynamique [1] :

$$P_A - P = P_c\left(\theta\right) - \tau\partial_t\theta. \tag{1}$$

τ : coefficient de relaxation.

Introduction de la pression capillaire dynamique (1) dans l'équation de conservation de la masse :

$$\Rightarrow \quad \partial_t \theta - \tau \,\mathrm{div}\left(k(\theta)\nabla(\partial_t\theta)\right) + \mathrm{div}\left(k(\theta)\,P_c'(\theta)\,\nabla\theta\right) = 0 \qquad (2)$$

Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$, à frontière localement lipschitzienne.

Cadre d'étude simplifier :

- milieu isolé,
- τ constant,
- gravité négligée,
- flux massique nul sur le bord du domaine Ω,
- $\theta(x, t = 0) = \theta_0(x), \quad \forall x \in \Omega$.

Objectifs

- Existence d'une solution globale pour le problème continu.
- Estimation *a priori* entropique $\Rightarrow \quad \theta \in H^1\left(0, T; H^1\left(\Omega\right)\right)$
- Principe du maximum.
- Construction et analyse d'un schéma numérique *entropique*.

Littérature

L'étude des EDPs d'ordre 3 ne sont pas très présentes dans la littérature.

- L. Pego, A. Novick-Cohen : τ et k constants [2].
- C. Cuesta, J. Hulshoff, C. van Duijn : ondes progressives (linéaire) [3] [4].

Peu de références sur les EDPs non-linéaires dégénérées d'ordre 3 [5].
$\Rightarrow$ même l'étude du problème régularisé présente un intérêt.

S. M. Hassanizadeh and W. G. Gray, "Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media," *Water Ressources Research*, vol. 29, pp. 3389–3405, October 1993.

L. Pego and A. Novick-Cohen, "Stable patterns in a viscous diffusion equation," *American Mathematical Society*, vol. 324, no. 1, 1991.

C. Cuesta, C. van Duijn, and J. Hulshof, "Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure: Travelling waves," *J. Appl. Math.*, vol. 11, pp. 381–397, 2000.

C. Cuesta and J. Hulshof, "A model problem for groundwater flow with dynamic capillary pressure: stability of travelling waves," *Nonlinear Anal.*, vol. 52, pp. 1199–1218, 2003.

A. Mikelic and H. Bruining, "Analysis of model equations for stress-enhanced diffusion in coal layer. part i : Existence of a weak solution.." 2008.

Existence d'une solution globale pour le problème régularisé

Régularisation :

$$k_\varepsilon(\theta) = k\left(\varepsilon + \theta^+\right)$$
$$P'_{c,\varepsilon}(\theta) = P'_{c,\varepsilon}\left(\varepsilon + \theta^+\right)$$
$$\text{où} \quad \theta^+(x,\ t) = \sup\left(\theta(x,\ t),\ 0\right)$$

Considérations pour le problème non dégénéré :

1. $0 < m_k \leqslant k_\varepsilon(\theta) \leqslant M_k < \infty,$ (3)
2. $0 < m_p \leqslant \left|P'_{c,\varepsilon}(\theta)\right| \leqslant M_p < \infty.$ (4)

(pb.reg) $=$ formulation variationnelle associée au modèle régularisé, θ_ε sa solution.

Méthode de Galerkin :

- $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une base de $H^1(\Omega)$,
- $V_N = \text{Vect}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\}$ l'espace de discrétisation.

$$\theta_{\varepsilon N}(x,t) := \sum_{i=1}^{N} c_i(t)\,\alpha_i(x),$$

où les coefficients $c_i(t)$ vérifient :

$$\int_\Omega \partial_t\theta_{\varepsilon N}\,\alpha_j\,dx + \int_\Omega \tau\, k_{\varepsilon N}\nabla(\partial_t\theta_{\varepsilon N})\nabla\alpha_j\,dx - \int_\Omega k_{\varepsilon N}P'_{c,\varepsilon N}\nabla\theta_{\varepsilon N}\nabla\alpha_j\,dx = 0 \quad \forall j = 1,\cdots,N \tag{5}$$

$\Rightarrow$ Problème de Cauchy :

$$\begin{cases} A(c)\,\dfrac{dc(t)}{dt} = B(c)\,c \quad \text{p.p. sur }]0,\,T[\\ c_i(0) = \displaystyle\int_\Omega \theta_0(x)\,\alpha_i(x)\,dx. \end{cases} \tag{6}$$

Pour $i, j = 1, \cdots, N$:

$$\begin{aligned}
&c\,(t) = (c_1, \cdots, c_N)^T \\
&A_{j\,i}\,(c) = \int_\Omega \alpha_i\,\alpha_j\,dx + \int_\Omega \tau\,k_{\varepsilon N} \nabla\alpha_i \nabla\alpha_j\,dx \\
&B_{j\,i}\,(c) = \int_\Omega k_{\varepsilon N} P'_{c,\varepsilon N} \nabla\alpha_i \nabla\alpha_j\,dx
\end{aligned}$$

Proposition

Il existe un $T_N > 0$ tel que le problème (6) admet une unique solution appartenant à $\mathcal{C}^1\,[0,\ T_N]$.

Preuve : $A\,(c)$ est une matrice symétrique définie positive.

Proposition

Il existe des constantes C indépendantes de T_N telles que pour tout $t \in [0, T_n]$:

$$\|\partial_t \theta_{\varepsilon N}\|_{L^2\left(0,\, t;\, L^2(\Omega)\right)} \leqslant C \qquad \|\nabla\left(\partial_t \theta_{\varepsilon N}\right)\|_{L^2\left(0,\, t;\, L^2(\Omega)^n\right)} \leqslant C$$

Preuve : $\alpha_j \rightarrow \partial_t \theta_{\varepsilon N} = \sum_{i=1}^{N} c_i'(t)\, \alpha_i(x)$ dans (5).

Conclusion

Pour tout $T > 0$, la solution du problème variationnel approché existe et appartient à $\mathcal{C}^1([0, T]\,;\, V_N)$.

Proposition

Il existe des constantes C indépendantes de N telles que :

$$\|\theta_{\varepsilon N}\|_{L^\infty\left(0,\,T;\,L^2(\Omega)\right)} \leqslant C \qquad \|\partial_t\theta_{\varepsilon N}\|_{L^2\left(0,\,T;\,L^2(\Omega)\right)} \leqslant C$$

$$\|\nabla\theta_{\varepsilon N}\|_{L^2\left(0,\,T;\,L^2(\Omega)^n\right)} \leqslant C \qquad \left\|\sqrt{k_{\varepsilon N}}\ \nabla\left(\partial_t\theta_{\varepsilon N}\right)\right\|_{L^2\left(0,\,T;\,L^2(\Omega)^n\right)} \leqslant C$$

Preuve : $\alpha_j \rightarrow \theta_{\varepsilon N} = \sum_{i=1}^{N} c_i\,(t)\ \alpha_i\,(x)$.

Théorème

*Il existe une solution faible θ_ε du problème **(pb.reg)** avec :*

$$\theta_\varepsilon \in H^1\left(0, T; H^1(\Omega)\right).$$

De plus $\theta_\varepsilon \geqslant 0$ p.p. sur $]0, T[\times\Omega$.

Remarque : estimations introduites dépendant de m_k.

Les propriétés du modèle

L'entropie mathématique $\mathcal{E}$ vérifie :

$$\mathcal{E}''(\theta) = \frac{1}{k_\varepsilon(\theta)}.$$

On appellera *variable entropique*, notée φ, la primitive de $\mathcal{E}''$:

$$\varphi = \mathcal{E}'(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\xi}{k_\varepsilon(\xi)} + C_\mathcal{E}. \tag{7}$$

Théorème

Soit θ_ε la solution du problème ***(pb.reg)****. On a alors :*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \theta_0(x) \leqslant \theta_\varepsilon(x,\, t) \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \theta_0(x), \quad p.p.\ sur\ ]0,\, T[\times\Omega$$

Majoration :

$$u^+(x,\, t) = \max\left(\theta_\varepsilon(x,\, t) - \theta_0^{\max},\, 0\right) \quad \text{avec} \quad \theta_0^{\max} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \theta_0(x)$$

Fonction test φ dans la formulation variationnelle de ***(pb.reg)*** :

$$\varphi = \int_0^{u^+} \frac{d\varphi}{k\left(\varepsilon + \varphi + \theta_0^{\max}\right)}.$$

Proposition

La solution θ_ε du problème ***(pb.reg)*** *vérifie :*

$$\|\nabla\theta_\varepsilon\|_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega))} \leqslant C \quad \text{où} \tag{8}$$

$$C = \frac{2}{\tau}\int_\Omega \mathcal{E}(\theta_0)\,dx + \int_\Omega |\nabla\theta_0(x)|^2 dx.$$

Preuve : fonction test $\rightarrow$ variable entropique φ avec $C_{\mathcal{E}} = 0$.

$$\Rightarrow \quad \partial_t\left(\int_\Omega \mathcal{E}(\theta_\varepsilon)\,dx + \frac{\tau}{2}\int_\Omega |\nabla\theta_\varepsilon|^2 dx\right) \leqslant 0 \quad \text{p.p. sur }]0,\,T[\,.$$

Proposition

Si l'on suppose qu'il existe une constante M telle que

$$\sup_{x\in[0,1]} \; k(x)\,|P_c'| \leqslant M,$$

alors on obtient les estimations, indépendamment de m_k :

$$\|\nabla\theta_\varepsilon\|_{L^\infty(0,\,T;\,L^2(\Omega))} \leqslant C$$

$$\left\|\sqrt{-P'_{c,\varepsilon}}\;\nabla\theta_\varepsilon\right\|_{L^2(0,\,T;\,L^2(\Omega))} \leqslant C$$

$$\|\theta_\varepsilon\|_{L^2(0,\,T;\,L^2(\Omega))} \leqslant C$$

$$\|\partial_t\theta_\varepsilon\|_{L^2(0,\,T;\,L^2(\Omega))} \leqslant C$$

$$\|\sqrt{k_\varepsilon}\;\nabla\left(\partial_t\theta_\varepsilon\right)\|_{L^2(0,\,T;\,L^2(\Omega))} \leqslant C$$

estimation pour $\nabla\left(\partial_t\theta_\varepsilon\right)$ dans $L^q\left((]0,T[\times\Omega)\right), q > 1$?
OUI, car

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{1}{k_\varepsilon^q\left(\theta_\varepsilon\right)} \leqslant C,$$

indépendamment de m_k.

Conclusion : On peut maintenant passer à la limite $\varepsilon \to 0$, et la limite satisfait (2).

Un schéma numérique entropique

Nouvelle variable :

$$\varphi = f(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\varphi}{k(\varphi)} \qquad \Rightarrow \qquad \theta(\varphi) = \int_0^\varphi k\left(f^{-1}(\psi)\right) d\psi.$$

Formulation variationnelle entropique de ***(pb.reg)*** :

Trouver $\varphi \in H^1\left(0, T; H^1(\Omega)\right)$ telle que :

$$\int_\Omega \partial_t \theta(\varphi)\, v\, dx - \int_\Omega k(\theta(\varphi))\, P_c'(\theta(\varphi))\, \nabla\theta(\varphi)\, \nabla v\, dx$$
$$+ \int_\Omega \tau\, k(\theta(\varphi))\, \partial_t \nabla\theta(\varphi)\, \nabla v\, dx = 0, \quad \text{p.p. sur}\,]0, T[\,, \ \forall v \in H^1(\Omega), \quad (9)$$

avec la condition initiale

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) = \int_0^{\theta_0(x)} \frac{d\varphi}{k(\varphi)} \ \in H^1(\Omega). \qquad (10)$$

(pb.entrop) = (9)-(10).

- $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une base de $H^1(\Omega)$.
- $[0, T] \rightarrow N+1$ intervalles égaux de longueur $\Delta t = T/(N+1)$.
- Définition récursive des éléments $\varphi_h^0, \cdots, \varphi_h^N$, de V_h :

$\rightarrow \varphi_h^0 =$ projeté orthogonal de φ_0 sur V_h, dans $H^1(\Omega)$.

$\rightarrow \varphi_h^n$, $n \geqslant 0$ connu, φ_h^{n+1} définit par la relation :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\theta\left(\varphi_h^{n+1}\right) - \theta\left(\varphi_h^n\right)}{\Delta t}\, v_h\, dx \\
&+ \int_\Omega \tau\, k\left(\theta\left(\varphi_h^{n+1}\right)\right) \frac{\nabla\theta\left(\varphi_h^{n+1}\right) - \nabla\theta\left(\varphi_h^n\right)}{\Delta t}\, \nabla v_h\, dx \\
&- \int_\Omega k\left(\theta\left(\varphi_h^{n+1}\right)\right) P_c'\left(\theta\left(\varphi_h^{n+1}\right)\right) \nabla\theta\left(\varphi_h^{n+1}\right) \nabla v_h\, dx = 0 \quad \forall v_h \in V_h.
\end{aligned} \tag{11}$$

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons φ_h^n, $n \geqslant 0$ connu. Le schéma numérique défini par la relation (11) admet une solution $\varphi_h^{n+1} \in V_h$.

Preuve :

-
$$\begin{aligned}(\Phi(\xi_h), v_h) = &\int_\Omega \left(\theta(\xi_h) - \theta\left(\varphi_h^n\right)\right) v_h \, dx \\ &+ \int_\Omega \tau \, k(\theta(\xi_h)) \left(\nabla\theta(\xi_h) - \nabla\theta\left(\varphi_h^n\right)\right) \nabla v_h \, dx \\ &- \Delta t \int_\Omega k(\theta(\xi_h)) P_c'(\theta(\xi_h)) \nabla\theta(\xi_h) \nabla v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \tag{12}$$

- Point fixe de Brouwer.

- **Objectif :** Solution du schéma numérique (11) converge vers la solution du problème variationnel ***(pb.entrop)*** quand $\Delta t \to 0$ et $h \to \infty$.
- **Méthode :** $h \to \infty$, puis $\Delta t \to 0$.

Proposition

Il existe des constantes C indépendantes de h telles que l'on ait les estimations :

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant N+1} \int_\Omega \left(\varphi_h^n\right)^2 dx \leqslant C, \tag{13}$$

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant N+1} \int_\Omega \left|\nabla \theta\left(\varphi_h^n\right)\right|^2 dx \leqslant C, \tag{14}$$

$$\Delta t \sum_{n=1}^{N+1} \int_\Omega \left|P_c'\left(\theta\left(\varphi_h^n\right)\right)\right| \left|\nabla \theta\left(\varphi_h^n\right)\right|^2 dx \leqslant C, \tag{15}$$

Preuve : $v_h = \varphi_h^n$ dans (11).

Théorème

Quand $h \to \infty$, la suite $\{\varphi_h^n,\ n = 0, \cdots, N+1\}_h$ de V_h^{N+2} converge fortement dans $L^2(\Omega)^{N+2}$ vers $\{\varphi^n,\ n = 0, \cdots, N+1\}$ solution du problème discret :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\theta\left(\varphi^{n+1}\right) - \theta\left(\varphi^n\right)}{\Delta t}\, v\, dx \\
&+ \int_\Omega \tau\, k\left(\theta\left(\varphi^{n+1}\right)\right) \frac{\nabla\theta\left(\varphi^{n+1}\right) - \nabla\theta\left(\varphi^n\right)}{\Delta t}\, \nabla v\, dx \\
&- \int_\Omega k\left(\theta\left(\varphi^{n+1}\right)\right) P_c'\left(\theta\left(\varphi^{n+1}\right)\right) \nabla\theta\left(\varphi^{n+1}\right) \nabla v\, dx = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)
\end{aligned} \tag{16}$$

Avec la condition initiale $\varphi^0(x) = \varphi_0(x)$.
D'autre part la convergence de la suite $\{\varphi_h^n,\ n = 0, \cdots, N+1\}_h$ de V_h^{N+2} vers $\{\varphi^n,\ n = 0, \cdots, N+1\}$ est faible dans $H^1(\Omega)^{N+2}$

Proposition

Pour $0 \leqslant n \leqslant N$, il existe des constantes C indépendantes de Δt telles que l'on ait les estimations :

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N} \int_{\Omega} \left(\frac{\theta\left(\varphi^{n+1}\right) - \theta\left(\varphi^{n}\right)}{\Delta t} \right)^2 dx \leqslant C \tag{17}$$

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\nabla\theta\left(\varphi^{n+1}\right) - \nabla\theta\left(\varphi^{n}\right)}{\Delta t} \right|^2 dx \leqslant C \tag{18}$$

Prolongement sur $[0, T]$:

- $\theta_{\Delta t}(\varphi)(t) = \theta\left(\varphi^{n+1}\right)$ si $t \in \left]n\Delta t, (n+1)\Delta t\right]$, $n = 0, \cdots, N$.
- $\widetilde{\theta}_{\Delta t}(\varphi)(t)$ une application continue de $[0, T]$ dans $H^1(\Omega)$, linéaire sur $[n\Delta t, (n+1)\Delta t]$, et égale à $\theta\left(\varphi^{n+1}\right)$ au point $(n+1)\Delta t$.

Lemme

Il existe une constante C indépendante de Δt telle que les deux fonctions définies ci-dessus vérifient

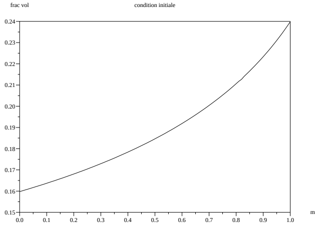
$$\left|\theta_{\Delta t}(\varphi) - \widetilde{\theta}_{\Delta t}(\varphi)\right|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \frac{(\Delta t)^2}{3}\, C$$

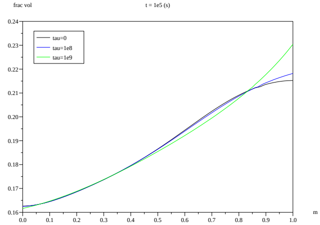
Théorème

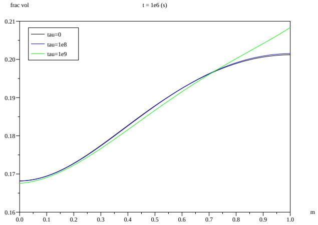
Quand $\Delta t \to 0$, les suites $\theta_{\Delta t}(\varphi)$ et $\widetilde{\theta}_{\Delta t}(\varphi)$ convergent fortement dans $L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$ vers $\theta(\varphi)$ solution du problème variationnel non dégénéré ***(pb.entrop)****, et de manière faible dans $H^1\left(0, T; H^1(\Omega)\right)$.*

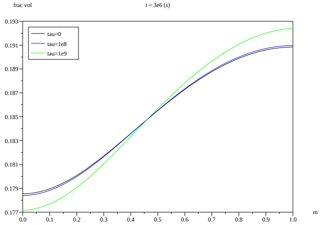
Simulations

$\Phi = 0.4$	$K = 5.11 \times 10^{-12}$ m^2
(BC) $P_d = 5 \times 10^2$ Pa	(BC) $\lambda = 2$
$S_r = 5 \times 10^{-2}$	$\mu = 1 \times 10^{-3}$ $\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}$









Conclusion et perspectives

Conclusion

Introduction du modèle de pression capillaire dynamique dans l'équation de Richards :

- existence d'une solution globale pour le problème dégénéré $(k\,(0) = 0)$,
- une régularité de la solution supérieure à la régularité qu'on obtient pour Richards,
- principe du maximum,
- schéma numérique *entropique* stable et convergent, indépendamment de la dégénérescence de k.

Perspectives

- Flux massique non nul.
- Simulations.
- Écoulements multiphasiques avec pression du gaz non constante.