

Page d'accueil

Page de Titre

Sommaire



Page 1 de 14

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

Un modèle asymptotique pour la simulation numérique d'un stockage de déchets nucléaires en site géologique profond *

G. Allaire, M. Briane,
R. Brizzi and Y. Capdeboscq

CMAP, UMR-CNRS 7641, Ecole Polytechnique

19 décembre 2006

**Ce travail a été soutenu par le GDR MOMAS du CNRS
co-financé par l'ANDRA, le BRGM, le CEA, et l'EDF.*

Page d'accueil

Page de Titre

Sommaire



Page 2 de 14

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

Table des matières

1	Modèle étudié	3
2	Homogénéisation	5
3	Schéma numérique	8
4	Simulation numérique	10

1. Modèle étudié

En désignant par Ω , le domaine formé par la zone de stockage et les couches géologiques l'entourant, le transport de contaminants est modélisé (en l'absence de convection) par le problème de type parabolique :

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}\{A^\varepsilon \operatorname{grad} u^\varepsilon\} + \lambda^\varepsilon u^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où $f^\varepsilon = \varepsilon^{-1} f_1(t, \frac{x}{\varepsilon})$ est un terme source à support dans les alvéoles.

Le tenseur de diffusion effective

$$A^\varepsilon = \begin{cases} A_0(x) & \text{dans les couches géologiques} \\ \frac{1}{\varepsilon} A_1(\frac{x}{\varepsilon}) & \text{dans les alvéoles des modules.} \end{cases} \quad (2)$$

Page d'accueil

Page de Titre

Sommaire



Page 4 de 14

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

De même,

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} \rho_0(x) & \text{dans les couches géologiques} \\ \rho_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{dans les alvéoles des modules} \end{cases} \quad (3)$$

et

$$\lambda^\varepsilon(x) = \begin{cases} \lambda_0(x) & \text{dans les couches géologiques} \\ \lambda_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{dans les alvéoles des modules.} \end{cases} \quad (4)$$

La concentration u d'un radionucléide est supposée nulle à l'instant initial :

$$u^\varepsilon(0, x) = 0. \quad (5)$$

2. Homogénéisation

Le modèle asymptotique obtenu par homogénéisation est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\{A_0 \operatorname{grad} u\} + \lambda_0 u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ u = s^* \quad \text{sur } \Sigma \end{array} \right. \quad (6)$$

où $\Sigma = \Omega \cup \{z = 0\}$.

Les données intervenant dans l'équation sont celles décrivant les couches géologiques. La solution vérifie les mêmes conditions aux limites sur le bord de Ω mais vérifie en plus une condition de Dirichlet sur Σ la limite ($\varepsilon \rightarrow 0$) de la zone de stockage.

Page d'accueil

Page de Titre

Sommaire



Page 6 de 14

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

Cette condition de Dirichlet s^* est définie à partir de la résolution d'un problème elliptique avec un **second membre dépendant du temps** :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\{A^* \operatorname{grad} s^*\} = \bar{f} & \text{dans } \Sigma \\ s^* = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \end{cases} \quad (7)$$

Les coefficients effectifs sont donnés par :

$$\bar{f}(t) = \int_{[0,1]^d} f_1(t, y)$$

et

$$A^* = \int_{[0,1]^{d-1} \times \mathbb{R}} \chi(y) (A_1(y) (\operatorname{Id} + \mathbb{P}(y))) dy.$$

L'expression de A^* fait intervenir le tenseur $\mathbb{P}(y)$ défini par

$$\mathbb{P}(y).e_i = \text{grad}\Phi_i \quad (i = 1, d)$$

où $(e_i)_{(i=1,d)}$ est la base canonique de \mathbb{R}^d et les Φ_i sont solutions des problèmes posés dans une cellule avec des conditions de périodicité et de Neumann :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{div}\{A_1(\text{grad}y_i + \text{grad}\Phi_i)\} = 0 \quad \text{dans } Y' \times (0,1) \\ \Phi_i \quad Y' - \text{périodique} \\ A_1(y', +1)(\text{grad}y_i + \text{grad}\Phi_i(y', +1)).e_d = 0 \quad \forall y' \in Y' \\ A_1(y', -1)(\text{grad}y_i + \text{grad}\Phi_i(y', -1)).e_d = 0 \quad \forall y' \in Y' \end{array} \right. \quad (8)$$

On obtient ainsi un découplage du problème global en problèmes posés à l'intérieur des modules de stockage et un problème posé dans les couches géologiques.

3. Schéma numérique

Le modèle asymptotique nous indique le type de couplage que l'on peut introduire dans le problème discrétilisé.

- **Dans chaque module**, on résout le problème

$$\begin{aligned} \rho_1 u_{int}(t + \delta t) - \delta t \cdot \operatorname{div}\{A_1(y) \operatorname{grad} u_{int}(t + \delta t)\} \\ + \delta t \cdot \lambda_1 u_{int}(t + \delta t) = \delta t \cdot f_1(t, y) + \rho_1 u_{int}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

avec des conditions de périodicité en y'

$$u_{int} \text{ } Y' \text{ - périodique en } y' \quad (10)$$

et de Neumann

$$A_1 \operatorname{grad} u_{int}(t + \delta t, y) \cdot \nu = N \quad (11)$$

sur les bords inférieur et supérieur du module.

Page d'accueil

Page de Titre

Sommaire



Page 9 de 14

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

La connaissance u_{int} permet d'introduire les conditions de Dirichlet

$$D = \frac{1}{|S|} \int_S u_{int}(t + \delta t, y) dy \quad (12)$$

sur les bords, inférieur et supérieur, du module pour

Le problème extérieur posé dans les couches géologiques :

$$\begin{aligned} \rho_0 u(t + \delta t) - \delta t \cdot \text{div}\{A_0(y) \text{grad } u(t + \delta t)\} + \delta t \cdot \lambda_1 u_{int}(t + \delta t) \\ = \rho_0 u(t) \end{aligned} \quad (13)$$

On peut alors calculer les conditions de Neumann que l'on introduit pour l'étape de temps suivante lors de la résolution du problème dans le module :

$$N = \frac{1}{|S|} \int_S A_1(y) \text{grad } u(t + \delta t, y) \cdot \nu dy \quad (14)$$

Page d'accueil

Page de Titre

Sommaire



Page 10 de 14

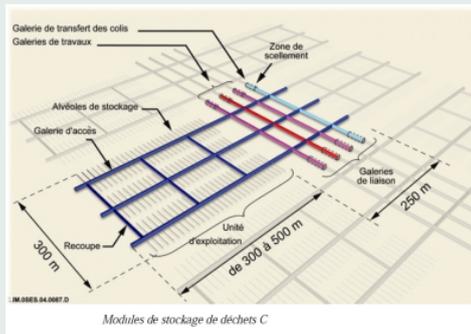
Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

4. Simulation numérique



Page d'accueil

Page de Titre

Sommaire



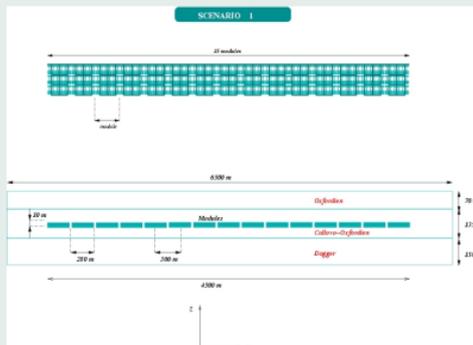
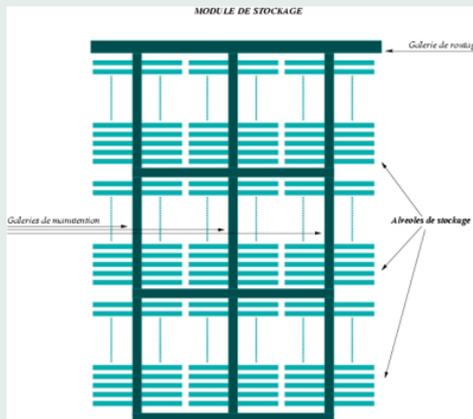
Page 11 de 14

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter



Page d'accueil

Page de Titre

Sommaire



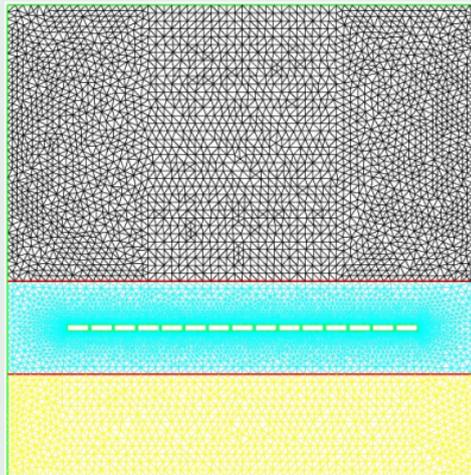
Page *12* de *14*

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter



Page d'accueil

Page de Titre

Sommaire



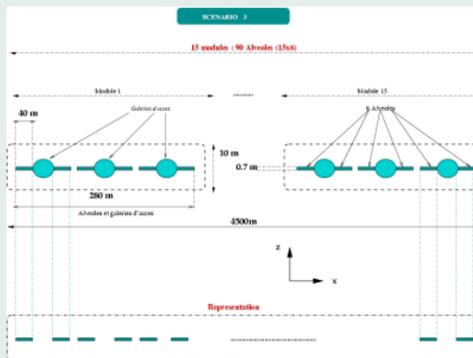
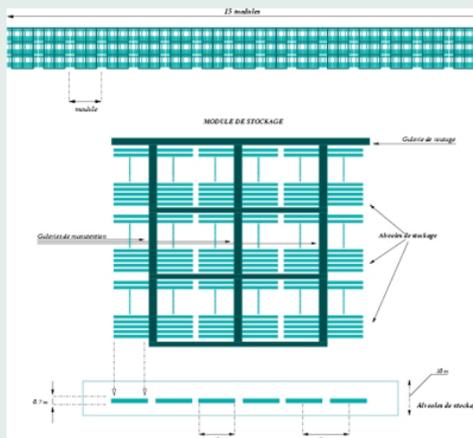
Page 13 de 14

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter



Page d'accueil

Page de Titre

Sommaire



Page 14 de 14

Retour

Plein écran

Fermer

Quitter

