Pour le 1) $\boldsymbol{F_2}$, on peut déjà simplifier par x en haut et en bas :

$$F_2(x) = \frac{x^5 - x^4 + x - 1}{(x-1)(x^2-1)^2}.$$

Le numérateur admet 1 comme racine évidente, donc on peut mettre $x-1$ en facteur. Une division euclidienne nous donne :

$$x^5 - x^4 + x - 1 = (x-1)(x^4+1)$$

donc, en simplifiant par $x-1$ en haut et en bas, on a :

$$F_2(x) = \frac{x^4+1}{(x^2-1)^2}.$$

On cherche la partie entière (le degré en haut est le même qu'en bas), donc on effectue la division euclidienne de x^4+1 par $(x^2-1)^2 = x^4-2x^2+1$. Cela nous donne $x^4+1 = 1 \times (x^4-2x^2+1) + 2x^2$. Donc :

$$F_2(x) = 1 + \frac{2x^2}{(x^2-1)^2}.$$

On va décompose la fraction qui reste. Le dénominateur s'écrit $(x-1)^2(x+1)^2$, donc il admet deux racines doubles : 1 et -1. La décomposition s'écrit ainsi :

$$\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}.$$

Avec la méthode classique, on trouve $b = 1/2$ et $d = 1/2$. Puis, en prenant $x = 0$, on trouve que $0 = -a + 1/2 + c + 1/2$, donc $a = 1 + c$. Et enfin, en faisant tendre x vers l'infini, on trouve $0 = a + c$. Donc $a = 1/2$ et $c = -1/2$. D'où

$$F_2(x) = 1 + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} - \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{(x+1)^2}.$$

Pour le 2) $\boldsymbol{F_4}$, la décomposition est presque complète :

$$F_4(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)^2}.$$

Le dénominateur a deux racines réelles simples (1 et -1) et un facteur irréductible de degré 2 qui est de multiplicité 2 (il apparaît deux fois). Donc la décomposition de F_4 est :

$$F_4(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} + \frac{ex+f}{(x^2+1)^2}.$$

Avec la méthode classique, on trouve $a = 1/8$ et $b = -1/8$.

Maintenant, si on fait x tend vers $+\infty$, on trouve que $0 = 1/8 - 1/8 + c$, donc $c = 0$.

Si on multiplie tout par $(x^2+1)^2$ et que l'on fait $x = i$, on trouve que $1/(i-1)(i+1) = ei + f$, donc $-1/2 = ei + f$, donc $e = 0$ et $f = -1/2$.

Et enfin, avec $x = 0$, on trouve que $-1 = -1/8 - 1/8 + d - 1/2$, et donc $d = -1/4$. Ainsi :

$$F_4(x) = \frac{1/8}{x-1} - \frac{1/8}{x+1} - \frac{1/4}{x^2+1} - \frac{1/2}{(x^2+1)^2}.$$