Université Claude Bernard Lyon 1

Direction de la Recherche et des Etudes Doctorales

Service des Etudes Doctorales

Bâtiment l'Atrium
43, Bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE cedex

N° ORDRE : 54-2010

AVIS DE PRESENTATION DES TRAVAUX EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME D'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Monsieur BRANDOLESE Lorenzo
présentera ses travaux intitulés :

« Propriétés qualitatives de solutions de quelques équations paraboliques semi-linéaires »

pour l'obtention
du Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches

le 8 décembre 2010 à 14h00

à

Université Claude Bernard Lyon 1
Domaine Scientifique de la Doua
Salle Fokko Du Cloux
Bâtiment Braconnier (1er étage)
21 avenue Claude Bernard
69622 - Villeurbanne cedex

Composition du jury

- **Monsieur CANNONE Marco, Professeur des Universités, Université Paris Est, Marne-La-Vallée**
- **Madame GALLAGHER Isabelle, Professeur des Universités, Université Paris VII**
- **Monsieur IFTIMIE Dragos, Professeur des Universités, Université Lyon 1**
- **Monsieur MEYER Yves, Professeur émérite, Ecole Normale Supérieure, Cachan**
- **Monsieur SAUT Jean-Claude, Professeur des Universités, Université Paris XI**
- **Monsieur SERRE Denis, Professeur des Universités, Ecole Normale Supérieure, Lyon**

Université Claude Bernard Lyon 1

Direction de la Recherche et des Etudes Doctorales

Service des Etudes Doctorales

Bâtiment l'Atrium
43, Bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE cedex

N° ORDRE : 54-2010

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES
PROCES VERBAL

de la présentation effectuée par
Monsieur BRANDOLESE Lorenzo
Né le 1er juin 1973 à Milan - Italie
N° d'inscription : 11009778

Titre : « **Propriétés qualitatives de solutions de quelques équations paraboliques semi-linéaires** »

☒ donnant droit

à la délivrance de l'Habilitation

☐ ne donnant pas droit

Président du jury : Jean-Claude SAUT

Lyon, le 8 décembre 2010
Fait et signé en séance par les membres du jury **(1)**

M. CANNONE Marco Professeur des Universités	Mme GALLAGHER Isabelle Professeur des Universités Rapporteur	M. IFTIMIE Dragos Professeur des Universités
M. MEYER Yves Professeur émérite	M. SAUT Jean-Claude Professeur des Universités Le Président	M. SERRE Denis Professeur des Universités

VU
Le Président de l'Université
Claude Bernard

L. COLLET

(1) Mentionner en face de leur nom :
- Le Président
- les Rapporteurs (2 extérieurs à l'Université)

Université Claude Bernard Lyon 1

Direction de la Recherche et des Etudes Doctorales

Service des Etudes Doctorales

Bâtiment l'Atrium
43, Bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE cedex

RAPPORT D'APRES SOUTENANCE
relatif à l'Habilitation à Diriger des Recherches présentée par
Monsieur BRANDOLESE Lorenzo
Le 8 décembre 2010

Monsieur Lorenzo Brandolese a fait un exposé remarquable, clair et vivant des principaux résultats de son mémoire.

Ses contributions, riches et très novatrices, concernent la dynamique d'équations classiques de la mécanique des fluides. Ses méthodes ont d'ailleurs été reprises par d'autres spécialistes du domaine

Il s'agit à l'évidence d'une excellente Habilitation à diriger des Recherches.

Faire signer en séance par tous les membres du jury

M. CANNONE Marco

Mme GALLAGHER Isabelle

M. IFTIMIE Dragos

M. MEYER Yves

M. SAUT Jean-Claude

M. SERRE Denis

Institute of Mathematics of the AS CR, v.v.i.
Žitná 25, 115 67 Praha 1
Czech Republic

REPORT ON THE HABILITATION THESIS BY LORENZO BRANDOLESE

The main topic of the Habilitation Thesis by Lorenzo Brandolese concerns problems arising in mathematical fluid mechanics. Chapter 1 is devoted to the asymptotic behavior of solutions to the standard Navier-Stokes system describing the motion of an incompressible viscous fluid. In Chapter 2, more complex models are considered, including the equations of magnetohydrodynamics and the so-called Boussinesq approximation. Chapter 3 deals with stationary problems and stability of their solutions. Chapter 4 is devoted to self-similar solutions to the Navier-Stokes system, while Chapter 5 deals with related models of chemotaxis. Finally, Chapter 6 concerns more general topics including author's contribution to the wavelet theory and Sobolev multipliers.

The Thesis is nicely written, each topic is clearly introduced and illustrated by author's relevant papers. It is rather impressive that a mere survey of author's results is 70 pages long. In other words, the complete list of author's scientific papers and other materials clearly exceeds what is usually expected at this level.

Chapter 1 reviews author's work on the asymptotic behavior of solutions to the incompressible Navier-Stokes system. One of the main issues addressed are the decay properties of solutions defined on the whole physical space R^3. An exact description of the asymptotic velocity profile is obtained and its asymptotic properties for large times are discussed. Moreover, the rate of decay of solutions for various kinds of initial data is studied. A particular emphasis is put on the question of the propagation speed of various velocity disturbances. The role of symmetry of the data on the decay properties of solutions is emphasized and optimality of the obtained results illustrated. Results presented in this chapter significantly contribute to understanding the fluid motion in large (unbounded) domains.

Chapter 2 develops the theory toward more complex fluid models. It is interesting to see that for certain fluid systems, in particular those including heat propagation in an incompressible fluid and its influence on the motion (Oberbeck-Boussinesq approximation), the total energy of solutions goes to infinity with growing time. Other possible applications to the Camassa-Holm equations are proposed. Similarly to Chapter 1, the problems are studied on large domains, typically on the whole Euclidean space R^3, where the powerful mathematical tools based on Fourier analysis can be used.

In Chapter 3, the stationary problems are studied, driven by an external force, and their stability is investigated. The problem is again considered on the whole space R^3. A very interesting result claims that a large class of solutions to a driven *non-stationary* Navier-Stokes system stabilizes to an equilibrium for large time provided the latter is small in a certain sense. The result applies, in particular, to solutions that are not necessarily small initially. The basic idea is a decomposition of the velocity field into a square integrable part and a part that is small in certain critical space.

Chapter 4 is devoted to the so-called self-similar solutions. These solutions arise as a result of scaling leaving the underlying system of equations invariant. Self-similar profiles play a significant role in the study of long-time behavior as well as possible *blow-up* phenomena and appearences of singularities. For a given initial velocity profile in the Navier-Stokes system, (asymptotically) homogeneous of degree -1 and sufficiently small, a self-similar solution emanating from this profile is constructed and a formula relating the solution to the data is obtained for $|x| \to \infty$. Similar methods are applied to self-similar solutions to problems with "anomalous" (non-standard) diffusion.

Chapter 5 is devoted to equations describing chemotaxis, in particular, the Keller-Segel system. The first part of the chapter concerns the so-called parabolic-elliptic limit, with a singular parameter vanishing in one of the equations. A new method is developed based on careful analysis of the problem in the frequency space (Fourier analysis). The second part is devoted to blow-up phenomena - loss of regularity of solutions to the problem in certain norms in a finite time.

Chapter 6 consists of two parts: (i) a new characterization of a family of homogeneous Besov spaces is given based on an atomic decomposition and the general properties of Poisson kernel; (ii) applications of homogeneous realized Sobolev spaces to the Navier-Stokes system.

The present Thesis is of exceptional quality. The results are deep and provide a valuable insight in the behavior of solutions to problems arising in mathematical fluid mechanics. At the same time, author's contribution to the general theory of partial differential equations based on analysis of problems in the frequency spaces (Fourier analysis) marked significantly the development of the theory and will become a valuable tool for future studies. The techniques and methods are highly non-trivial and the new ideas developed by the author are deep but, at the same time, very elegant and clearly explained in the text. Having finished reading Lorenzo Brandolese's Thesis, I must confess I was impressed by the broad spectrum of topics he can handle by his methods and techniques as well as the level of generality that makes them applicable to a vast area of differential equations. Such a level of profound knowledge of the topic as well as the broad range of author's interests are certainly of exceptional value.

As witnessed in his work, Brandolese's expertise, talent, and innovative contributions have made him one of the leading researchers in the field of partial differential equations applied to fluid mechanics. He continues to make outstanding contributions that drive the current advances in this area. Lorenzo Brandolese has clearly risen to the top of his research field and I have no hesitation in offering him my strongest support for obtaining the degree of *Diriger des Recherches.*

In Prague, 29 October 2010

Eduard Feireisl
Institute of Mathematics
Academy of Sciences of the Czech Republic

ISABELLE GALLAGHER
Université Paris Diderot (Paris 7)
UFR de Mathématiques
175 rue du Chevaleret
75013 Paris, France
Tél : 01 57 27 92 93

Rapport sur le projet d'habilitation de Lorenzo Brandolese « Propriétés qualitatives de solutions de quelques équations paraboliques semi-linéaires »

Le mémoire d'habilitation présenté par Lorenzo Brandolese rassemble la plupart des travaux qu'il a effectués depuis le début de ses recherches en mathématiques, formant une quinzaine d'articles dont un peu plus de la moitié en collaboration, et tous parus ou à paraître dans de très bonnes revues à comité de lecture. Le fil directeur de ces travaux est l'analyse asymptotique des solutions d'équations aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires, en grand temps ou bien à l'infini en espace. L'équation à laquelle il a consacré le plus de recherches est l'équation de Navier-Stokes, et nous détaillerons plus bas ses contributions les plus importantes. Il a également adapté ses méthodes à d'autres systèmes de la mécanique des fluides, comme la MHD ou le système de Boussinesq. Un chapitre de son mémoire est consacré à une problématique un peu différente, issue de la biologie, que nous décrirons en fin de rapport. Enfin il est à noter que Lorenzo Brandolese a été amené, au cours de ses recherches, à étudier des questions d'analyse harmonique intéressantes en elles-mêmes, et le dernier chapitre de son mémoire est ainsi dévolu à la présentation de ces résultats.

Nous allons décrire les travaux de Lorenzo Brandolese en trois parties : les équations de Navier-Stokes et d'autres modèles apparentés ; quelques questions d'analyse harmonique ; un problème de chémotaxie.

Equations de Navier-Stokes et autres modèles de la mécanique des fluides.

Une grande partie des travaux de Lorenzo Brandolese porte sur l'étude de diverses propriétés qualitatives des solutions d'équations de la mécanique des fluides, avec un intérêt particulier pour les équations de Navier-Stokes. Ainsi il s'est intéressé dès sa thèse au lien entre décroissance en temps et en espace des solutions de ces équations (ainsi par la suite que des équations de la MHD et les équations de Boussinesq). Il s'est aussi posé la question de la stabilité des écoulements stationnaires, et enfin a étudié des propriétés d'autosimilarité.

Concernant le **comportement asymptotique** en espace des solutions des équations de Navier-Stokes, Lorenzo Brandolese avait obtenu dans sa thèse des conditions nécessaires et suffisantes surprenantes sur les données (des conditions de symétrie a priori inattendues), garantissant des solutions "localisées". À la suite de ce travail, il a cherché à approfondir ces relations entre symétrie et comportement asymptotique. Il a ainsi caractérisé, pour tout sous-groupe du groupe orthogonal, le taux de décroissance (optimal) des solutions invariantes par ce sous-groupe. Avec F. Vigneron, il a également cherché à décrire analytiquement la diffusion dans un fluide, en démontrant en particulier une borne inférieure sur le champ de vitesses en chaque point et à chaque instant, associé à une donnée initiale localisée. Le principe de la démonstration de cette borne inférieure (et en fait de résultats plus précis) est un développement asymptotique précis de la solution (vitesse et pression). Cette analyse leur permet également de donner des résultats de décroissance en temps des solutions, dans des espaces de Lebesgue à poids en espace (pour des données localisées) ; il s'agit là encore de résultats essentiellement optimaux.

Il a naturellement cherché à étendre ces méthodes à **d'autres modèles de la mécanique des fluides**, par exemple à la MHD avec F. Vigneron. Le résultat principal de l'analyse (obtenu par point fixe dans des espaces à poids) indique que le champ magnétique persiste dans sa localisation en espace au cours de l'évolution, alors que le champ de vitesses subit essentiellement les mêmes restrictions que pour Navier-Stokes (du moins pour un champ magnétique suffisamment localisé, sinon la localisation en vitesses est détériorée, jusqu'à être complètement perdue). Avec M. Schonbek il a étudié un système de Boussinesq, et démontré entre autres résultats que l'énergie du champ de vitesses peut exploser en grand temps, en établissant une minoration optimale de cette norme (même si la donnée initiale est petite dans un espace invariant d'échelle). Ce résultat est physiquement très intéressant puisqu'il montre que cette approximation de Boussinesq n'est pas pertinente en grand temps. La méthode de démonstration repose sur la recherche de profils explicites pour la solution.

Un travail présenté dans le mémoire et qui a particulièrement retenu mon attention est un article récent, paru à *Indiana Univ. Math.* en 2009. Dans ce travail, Lorenzo Brandolese s'attaque à la question de la possible **existence de singularités en temps fini** pour le flot de Navier-Stokes. Son approche est la suivante : il construit des solutions régulières telles que le flot se concentre, à un instant donné, autour d'un point. Cette concentration n'est pas assez forte pour produire une réelle explosion, mais indique un phénomène inattendu : une donnée initiale localisée près de l'origine peut "diffuser" instantanément (en un sens rendu précis par Lorenzo Brandolese) puis, après un certain temps, reconcentrer en 0. Ce phénomène peut se produire arbitrairement souvent dans l'écoulement. Comme dans les résultats précédents sur Navier-Stokes, les méthodes de démonstration sont constructives : la solution est cherchée de manière quasi-explicite.

Un autre travail, plus ancien, que j'ai trouvé également particulièrement intéressant est l'étude de la **localisation en espace du tourbillon** (le rotationnel du champ de vitesses). Lorenzo Brandolese montre que si le tourbillon initial est localisé autour d'une suite de points, alors cette propriété reste vraie, localement en temps, pour la solution. Cette propriété, convenablement aménagée, peut d'ailleurs être étendue au champ de vitesses. L'idée derrière ce type d'étude est de s'approcher de résultats de stabilité de structures cohérentes. Ce n'est bien sûr qu'une première étape vers ce type de résultat, mais il s'agit encore d'une étude originale et très pertinente.

Dans un cadre un peu différent, Lorenzo Brandolese s'est intéressé tout récemment, en collaboration avec C. Bjorland, D. Iftimie et M. Schonbek, à la stabilité des solutions stationnaires des équations de Navier-Stokes. Ils montrent en particulier que si la force (indépendante du temps) est assez petite, alors toute solution globale, même associée à une grande donnée initiale, tend vers le profil stationnaire en grand temps. La petitesse de la force est mesurée dans un espace invariant d'échelle, qui contient en particulier des masses de Dirac (et ainsi les solutions axisymétriques de Landau sont autorisées par l'analyse). C'est un article très bien rédigé, qui généralise (de manière significative) un précédent résultat de Iftimie, Planchon et moi-même dans le cas en particulier où la solution stationnaire est nulle, et sans force extérieure stationnaire.

La dernière thématique étudiée par Lorenzo Brandolese, concernant la mécanique des fluides, concerne **l'autosimilarité** dans les équations de Navier-Stokes (un article paru dans *ARMA* en 2009) ou pour une équation de transport avec un terme de diffusion non local, en collaboration avec G. Karch. J'ai surtout étudié l'article sur les équations de Navier-Stokes, dans lequel Lorenzo Brandolese cherche à généraliser les théorèmes célèbres de Cannone, Meyer et Planchon d'existence globale de solutions auto-similaires associées à une petite donnée initiale dans $\mathbb{R}^d$: ils montrent que le profil associé à ces solutions peut s'écrire comme le flot de la chaleur au temps un appliqué à la donnée initiale, perturbé par un terme en $|x|^{-2}$. L'un des résultats qu'il obtient est que le profil est en fait égal à la donnée initiale perturbée par un terme en $|x|^{-3}$ en dimension trois, et par un terme en $|x|^{-3}\log|x|$ en dimension deux (résultat optimal). Ce type d'asymptotique est obtenu en corollaire de résultats beaucoup plus généraux et plus complets, dans le cas d'une donnée initiale ayant un comportement homogène à l'infini seulement, et le développement de la solution est également plus précis que celui décrit ci-dessus. Il s'agit d'un très beau résultat, dont la démonstration nécessite d'identifier des propriétés remarquables sur le produit de convolution et sur le noyau de convolution du terme bilinéaire de Navier-Stokes.

Toutes ces **études qualitatives** forment un ensemble très cohérent et complet. L'un des aspects les plus séduisants de ces travaux est la pertinence des questions posées, ainsi que leur grande originalité : Lorenzo Brandolese montre par là un très bon goût dans le choix des questions qu'il se pose, et dans la manière de les aborder. Les résultats qu'il obtient sont pour la plupart inattendus, et très souvent extrêmement précis voire optimaux.

Quelques questions d'analyse harmonique.

Au cours de ses travaux en mécanique des fluides, Lorenzo Brandolese a été amené à se poser des questions d'**analyse harmonique** "pure". Comme l'une de ses qualités est de chercher toujours à approfondir le plus possible ses résultats et à en comprendre le les implications les plus fines, il a ainsi consacré deux articles de recherche à l'approfondissement de ces analyses : le premier, qui a suivi des résultats de sa thèse, est dévolu à l'étude des fonctions dont les séries de coefficients d'ondelettes sont (infiniment, en un sens à préciser) creuses. Cela lui permet en particulier de caractériser l'appartenance à un espace de Besov en termes de décompositions atomiques, avec des fonctions de base faiblement localisées. Ce type de résultat a des implications par exemple pour l'approximation d'EDP non linéaires (comme Lorenzo Brandolese l'a mis en évidence dans son étude sur la localisation du tourbillon évoquée plus haut).

Son second travail d'analyse harmonique, effectué peu après sa thèse, concerne la généralisation d'un travail de Furioli et Terraneo sur l'analyse d'une vaste classe d'équations d'évolution non locales, dont Navier-Stokes est un exemple. Il démontre l'existence et l'unicité locale de solutions telles que la solution, son gradient et son laplacien appartiennent à des espaces à poids convenables (avec des taux optimaux). Il obtient une démonstration plus simple que celle de Furioli et Terraneo en utilisant des techniques de multiplicateurs, à la Bourdaud.

Ces deux travaux sont particulièrement élégants et montrent encore le très bon goût de Lorenzo Brandolese dans le choix des questions qu'il cherche à approfondir.

Un problème de chémotaxie.

Deux travaux en collaboration avec P. Biler, l'un de 2006 et l'autre de 2009 sont dévolus à l'analyse d'un système issu de la biologie, qui a de claires analogies avec le système de Navier-Stokes : il s'agit de deux équations couplées, soit parabolique-parabolique, soit parabolique-elliptique. Dans les deux cas la non linéarité de l'équation parabolique est non locale. Je suis moins famileère avec ces deux contributions de Lorenzo Brandolese – à vrai dire j'ignorais qu'il travaillait sur ces questions avant de recevoir son manuscrit. N'ayant pas eu le temps d'approfondir ces travaux je ne pourrai pas les commenter précisément, mais leur lecture superficielle m'a permis néanmoins de voir qu'encore une fois il s'agit de travaux très bien rédigés, et pertinents autant mathématiquement que d'un point de vue physique. Dans le travail le plus ancien, Lorenzo Brandolese démontre l'explosion en temps fini des solutions du système parabolique-elliptique ou du système parabolique-parabolique pour une donnée initiale régulière, dont la transformée de Fourier est positive ; la démonstration repose sur une méthode introduite par Montgomery-Smith pour une équation scalaire proche de Navier-Stokes. Le travail plus récent concerne le passage à la limite du système parabolique-parabolique au système parabolique-elliptique (celle limite correspond au cas où l'on insère un petit paramètre multiplicatif devant la dérivée en temps de la seconde équation parabolique). En utilisant les espaces uniformément locaux introduits par Lemarié dans le cadre des équations de Navier-Stokes, ils démontrent la convergence du premier système vers le second, au moins pour des données suffisamment petites.

Conclusion

Comme je l'ai indiqué à plusieurs reprises dans ce rapport, on est frappé à la lecture du manuscrit de Lorenzo Brandolese par l'originalité de ses travaux : les questions qu'il aborde sont toujours pertinentes et le plus souvent non standard, et pour les traiter il a souvent dû faire appel à des idées originales et constructives. Il cherche systématiquement à décrire de la manière la plus précise possible les objets qu'il étudie, et tous ses articles sont rédigés de manière très agréable et claire, même si les aspects techniques ne sont pas occultés. Il en est de même de son mémoire d'habilitation, très argéable à lire et donc chaque chapitre se conclut par une série de questions ouvertes intéressantes à étudier. Lorenzo Brandolese est donc un spécialiste incontestable des problèmes asymptotiques en mécanique des fluides, et des propriétés qualitatives des solutions. Il a su depuis sa thèse créer et entretenir des collaborations fructueuses aussi bien en France qu'en Europe et aux Etats-Unis, et il ne fait nul doute qu'il mérite de soutenir une habilitation à diriger les recherches.

Fait à Paris, le 15 novembre 2010.

Isabelle Gallagher.

Report on the habilitation thesis

"Qualitative properties of solutions to some semilinear parabolic equations"

authored by Lorenzo Brandolese.

As is well-known various important non-equilibrium phenomena in natural sciences are described by Partial Differential Equations(PDEs) of evolution type. If phenomena are diffusive or viscous, the PDEs are of parabolic type. In principle, if we are able to solve PDEs, our understanding of phenomena is significantly increasing. However, usually the phenomenon is nonlinear so that the PDEs is nonlinear. It is generally unexpected that the solution is written explicitly for nonlinear PDEs even if the nonlinearity is weak say semilinear. So it is hard to know behavior of solutions whose existence are well-established. From applied point of view understanding behavior of solutions is a key issue to understand original phenomenon. Even if an explicit representation formula for a solution is available, the behaviors of a solution are often not clear.

The thesis under review focuses asymptotic behavior of the solutions of semilinear parabolic PDEs arising from various fields of sciences including typically Fluid Mechanics and Mathematical Biology. Typical questions include large-time behavior of solutions for example energy dissipation. Such questions are important but not easy to resolve since our knowledge of solutions is often just its existence which itself is nontrivial at all. To answer such questions it is necessary to develop a new method as well as a careful understanding of structures of the original PDEs.

The thesis under review applies several techniques of harmonic analysis to solve such problems and often develop a new techniques as well as extracting a key structure of the equations. Actually, there are several interesting harmonic analysis results in the thesis other than results strictly related to asymptotic behavior of solutions of PDEs. Since there are so many interesting results in various field in the thesis, it is impossible to explain all key results. So in this report, instead of exhausting all key results, the reviewer points out a few examples of results (familiar to him) to describe a key nature of research done in this thesis.

One of the key fields the author studies is related to the nonstationary Navier-Stokes equations. The system is a fundamental system to describe motion of viscous incompressible fluid. Its unknown is the velocity field u as well as pressure field. This system is semilinear and parabolic. The global-in-time existence of a smooth solution for large initial data is a famous open problem. However, it should be pointed out that if one asks behavior of a solution, our understanding was very incomplete even for solutions whose existence are guaranteed. For example, when the fluid is initially rest outside a bounded set, the large-time behavior and behavior at space infinity of the velocity field u is a key topic of behavior of solutions. This problem can be rephrased in the way that how fast the motion propagate in a fluid.

This thesis yields several significant contribution on this question. In the paper published in J. Math. Pures Appl. 88(2007) coauthored by F. Vigneron the author established an important asymptotic formula for the velocity field in the parabolic region $|x| >> \sqrt{t}$, where t is the time variable and x is the spatial variable in d-dimensional Euclidean space. For smooth solutions the velocity fields u(x, t) asymptotically looks like space-time integral (up to time t) of the external force with multiplication of the Hessian K of the fundamental solution of the Laplacian in the parabolic region. If this term vanishes, the authors derive an interesting asymptotic formula. Namely, u(x, t) asymptotically looks like the space-time integral of tensors of u with `multiplication' of gradient of K. These formulas themselves are very interesting because at space infinity the velocity field behaves like a potential field. Moreover, behavior of u at all points near space infinity is described by the mean of the space-time of the velocity.

The proof contains several new ideas. In nonlinear analysis it is usually already difficult to have some coarse estimates. So establishing such an asymptotic expansion needs new ideas with a lot of technicalities. The thesis develops a sort of asymptotic separation of variables. It says that the velocity looks like a linear combination of functions of separate variables, multiple of a function of x and a function of t. Since the Navier-Stokes system is a nonlocal equation from the point of velocity field, a fine analysis of kernel of singular integral operators are necessary to achieve its goal.

The asymptotic formula has a wide application. For example if there is no external force, the velocity field u(x, t) is pointwise estimated from above and below by a constant multiple of $(1 / |x|)^{d+1}t$ for the parabolic region. The constant appeared in the estimate from below can be zero but under a suitable non-symmetry assumption on the initial data the constant can be taken positive. Starting with the work of T. Miyakawa (2000), many researchers derive several pointwise upper bound estimates but lower bound is quite new. It seems that the above asymptotic formula is key to derive such a nice result.

A systematic construction of solutions having fast spatial decay was given by the paper published in Mathematische Annalen 329(2004) which originated by author's PhD thesis published in Cont. Optm. Cal. Var. 8(2002) coauthored by Y. Meyer. According to T. Miyakawa (2000) if the initial velocity u decays like $O(1 / |x|^{d+1})$, then it is preserved. In PhD thesis the author gives an explicit initial data in three dimensional space having a symmetry that it decays faster than Miyakawa's rate. Such flow may be called "well-localized" flow. In the paper of Mathematische Annalen the author found a systematic way to construct "well-localized" flow by considering a flow invariant under a discrete subgroup of the three dimensional orthogonal group. This contribution is important not only to provide a systematic way of well-localized flow with explicit decay rate but also give a fairly explicit example of flows.

The energy dissipation problem for the Navier-Stokes equations is another key issue since J. Leray's seminal work in (1934). His question was whether the energy $\|u\|_2^2(t)$ (the squre of spatially L^2 norm of the velocity) tends to zero as time t tends to infinity. This is affirmatively answered by K.

Masuda and T. Kato in dependently in 1980s. The question is whether there is a solution having a faster decay rate. Starting from work by M. Schonbek, there are several works on this direction. In the paper published in Rev. Mat. Iberoamericana 20(2004), the author found examples having a symmetry which decays faster than ever known rate. More precisely $\|u\|_2^2(t)$ can decay faster than $1 / t^{(d+2)/2}$ for a large class of initial data having symmetry. This is a very nice application of PhD thesis and the Mathematische Annalen paper. It is rather surprise that the author proved that kinetic energy of the Boussinesq system is growing with growth rate in t. This is done in the paper which is going to be published in Trans. Amer. Math. Soc. The key point of this work is an application of the paper published in J. Math. Pures Appl. 88(2007), which is a very important paper of the author.

Among huge list of publications the reviewer also pointed out about forward self-similar solutions of the Navier-Stokes equations. Like many physical models the Navier-Stokes equations have a scaling invariance. Precisely speaking, if u(x, t) solves the equation so does au(ax, a^2t) for a>0. If u is invariant under this scaling transformation, u is called a (forward) self-similar when u is defined for all x and t>0.

A conventional way to construct a self-similar solution is to solve an elliptic PDEs for the profile function U since a self-similar solution is of the form $u(x, t)=U(x / \sqrt{t}) / \sqrt{t}$. A new method was introduced by Y. Giga and T. Miyakawa (1989). Instead of solving the elliptic equation, one solves the equation starting with homogeneous initial data. However, conventional space like L^p space does not include homogeneous function like $1 / |x|$. Thus we need to work with less popular spaces like Morrey spaces, Lorentz spaces and Besov spaces. Their idea was popularized by M. Cannone, Y. Meyer and F. Planchon (1993-1994). In fact, they constructed forward self-similar solutions starting with suitably small initial data u_0 of homogeneous degree -1. In his paper published in J. Evol. Equ. 8(2008) coauthored with G. Karch they derive an explicit formula for the profile function of self-similar solutions. This is another interesting contribution related to the Navier-Stokes equations.

For the Navier-Stokes equations the author constructed an interesting solution. At the beginning the velocity u is poorly localized but at some time it is concentrated then it spread out and repeating this procedure. This rather surprising result was published in Indiana Univ. Math J. 58(2009).

There are several nice work other than works explained above. It includes equations of chemotaxis and other systems of interacting particles as well as convection-diffusion equations with anomalous diffusion, equations of magneto-hydrodynamics. There are few harmonic analysis paper on wavelet bases and approximation theory, molecule of the Hardy spaces and pointwise multiplier of Sobolev spaces and atomic decomposition of the vorticity. Although there are no direct relation to other works but it is related to the author's study of the Navier-Stokes equations which is interesting by itself.

In summary the thesis under review is quite original. It is a very seminal thesis. It develops several key tools to analyse asymptotic behaviors of solutions of semilinear parabolic equations with high level application of harmonic analysis.

The reviewer concludes that the thesis under review should receive a highest grade.

Yoshikazu Giga
Professor of Mathematics
University of Tokyo