

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

Habilitation à Diriger des Recherches

spécialité : **mathématiques**

Propriétés qualitatives de solutions de quelques équations paraboliques semi-linéaires

Lorenzo Brandolese

– JURY –

M. Marco Cannone	(Examineur)
M. Eduard Feireisl	(Rapporteur)
Mme. Isabelle Gallagher	(Rapporteur)
M. Yoshikazu Giga	(Rapporteur)
M. Dragoş Iftimie	(Examineur)
M. Yves Meyer	(Examineur)
M. Jean-Claude Saut	(Examineur)
M. Denis Serre	(Examineur)

Soutenu le 8 décembre 2010

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	v
1 Comportement asymptotique pour Navier–Stokes	1
1.1 Le rôle de la symétrie dans le comportement asymptotique	3
1.1.1 Un critère de localisation	3
1.1.2 Le problème de la dissipation de l'énergie des solutions faibles	5
1.1.3 Groupes d'isométries et comportement asymptotique	7
1.2 À quelle vitesse le mouvement se propage-t-il ?	10
1.3 Applications au comportement en temps long	12
1.4 Effets de concentration-diffusion dans un écoulement	14
1.5 Développements et perspectives	16
1.5.1 Quelques questions ouvertes sur le comportement à de grandes distances	16
1.5.2 Écoulements dans les domaines extérieurs	17
1.5.3 Fluides incompressibles de densité variable	18
1.5.4 Le programme de Richard B. Pelz sur la recherche de singularités	18
2 Autres modèles en mécanique des fluides	21
2.1 Les équations de la magnéto-hydrodynamique	21
2.1.1 Introduction au modèle	21
2.1.2 Résultats principaux	22
2.2 Le système de Boussinesq	24
2.2.1 Introduction au modèle	24
2.2.2 Résultats principaux	25
2.3 Décomposition atomique d'un écoulement	27
2.4 Développements et perspectives	30
2.4.1 Préambule : les espaces de Besov	30
2.4.2 Sur le système de Boussinesq	30
2.4.3 L'équation de Camassa–Holm	31
2.4.4 Microlocalisation du tourbillon	32
3 Stabilité des écoulements stationnaires	33
3.1 Introduction	33
3.2 Résultats principaux	34
3.2.1 Conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance à L^p	34

3.2.2	Stabilité des solutions stationnaires	36
3.3	Autres effets des forces extérieures	36
3.4	Développements et perspectives	37
3.4.1	Stabilité des solutions de Landau	37
3.4.2	Sur le caractère bien posé de (SNS)	38
4	Autosimilarité	41
4.1	Introduction	41
4.2	Propriétés fines de solutions autosimilaires de Navier–Stokes	43
4.2.1	Méthodes utilisées	44
4.3	Une équation de convection avec diffusion non standard	45
4.3.1	Introduction	45
4.3.2	Résultats principaux	46
4.4	Développements et perspectives	48
4.4.1	Le système quasi-géostrophique	48
4.4.2	Sur une équation de convection avec diffusion non-standard	49
5	Chémotaxie et le modèle de Keller–Segel	51
5.1	Introduction	51
5.2	Résultats principaux	52
5.2.1	La limite parabolique-elliptique pour $\tau \rightarrow 0$ des solutions de (PP)	52
5.2.2	Explosion en temps fini de solutions à valeurs complexes	55
5.3	Perspectives et développements	56
5.3.1	Sur le modèle parabolique-parabolique	56
5.3.2	Sur les méthodes itératives d’explosion	56
6	Approximation non-linéaire et multiplicateurs	59
6.1	Noyaux de Poisson et séries creuses d’ondelettes	59
6.2	Multiplicateurs et espaces de molécules	62
	Liste des travaux présentés	65
	Autres travaux	67
	Bibliographie	69

Remerciements

C'est avec beaucoup de respect et d'admiration que j'exprime ma gratitude envers Yves Meyer, pour m'avoir initié à la recherche en dirigeant ma thèse, avec la plus grande disponibilité et son enthousiasme communicatif. Chaque minute passée à discuter avec lui m'a été précieuse.

Je suis profondément reconnaissant envers Eduard Feireisl, Isabelle Gallagher et Yoshikazu Giga, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de mon habilitation, ainsi qu'aux autres membres du jury : Marco Cannone, Dragoş Iftimie, Yves Meyer, Jean-Claude Saut et Denis Serre. La lecture de leurs travaux a toujours été une source d'inspiration pour moi.

Je remercie également mes collaborateurs : Hyeong-Ohk Bae, Piotr Biler, Clayton Bjorland, Dragoş Iftimie, Bum Ja Jin, Grzegorz Karch, Yves Meyer, Maria E. Schonbek, et François Vigneron. Une partie non négligeable de ce travail est aussi la leur.

Ce mémoire d'habilitation a été préparé à l'université Lyon 1, dans l'ambiance agréable et l'environnement stimulant de l'Institut Camille Jordan. Je voudrais remercier les nombreux collègues et amis que j'ai dans l'Institut, pour les discussions enrichissantes que j'ai eues avec eux, ou simplement pour les moments de détente.

Le support de ma famille ne m'a jamais fait défaut pendant toutes ces années. Et je n'aurais pas pu accomplir ce travail sans le soutien de ma femme, Solange. Je tiens à lui exprimer tout mon amour.

Introduction

Ce mémoire constitue un travail de synthèse de nos travaux dans le domaine des équations aux dérivées partielles, notamment les équations non-linéaires de type parabolique. Les modèles traités ici sont issus principalement de la mécanique des fluides, de la géophysique, ou des biomathématiques ; dans d'autres cas les motivations viennent de la théorie des probabilités. On touchera ici aux questions centrales de l'existence, de l'unicité, ou de l'explosion en temps fini des solutions, qui occupent une place importante dans nos travaux, ainsi qu'à leur comportement asymptotique.

C'est précisément l'étude de propriétés fines sur le comportement en temps long, ou sur le comportement à l'infini en variable d'espace sous de différentes perspectives (dissipation de l'énergie, croissance ou décroissance temporelle, profils asymptotiques, autosimilarité, diffusion spatiale, questions de localisation, etc.) qui représente notre contribution la plus importante.

Les équations de Navier–Stokes constituent un défi remarquable pour toutes ces questions : en effet, il est rare que des techniques ou idées standards apportent des avancées vraiment significatives dans ce modèle. C'est pourquoi ces équations occupent une place privilégiée dans nos travaux.

Le premier chapitre est donc consacré au système de Navier–Stokes, et le deuxième à d'autres modèles de la mécanique des fluides incompressibles (magnéto–hydrodynamique, système de Boussinesq, etc.) qui sont des généralisations assez naturelles de celui-ci. On insistera notamment sur l'étude de propriétés qualitatives des solutions qui sont spécifiques à chacun de ces modèles. Dans le troisième chapitre nous abordons le problème de la stabilité des écoulements stationnaires. Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de l'autosimilarité : nous aurons alors l'opportunité de revenir sur les équations de Navier–Stokes, mais aussi d'introduire d'autres systèmes, et d'étudier une équation non-locale de convection avec diffusion non-standard. Dans le cinquième chapitre nous nous intéressons à deux modèles bien connus en chimiotactisme : nous y présentons nos travaux sur la convergence du système parabolique-parabolique de Keller–Segel vers le système parabolique–elliptique, ainsi qu'un théorème d'explosion.

Dans le dernier chapitre nous illustrons les résultats de deux articles, dans lesquels nous apportons une contribution à l'analyse fonctionnelle et harmonique, sur des questions liées à la théorie des multiplicateurs dans les espaces de Sobolev, à la théorie de l'approximation et aux bases d'ondelettes. Ces deux contributions à l'Analyse, a priori assez indépendantes du reste de notre production, n'en sont pas complètement déconnectées.

En effet de différentes techniques d'analyse harmonique apparaissent souvent dans nos démonstrations : l'analyse de Fourier classique d'abord (la méthode de *Fourier splitting* par exemple), qui conduit à des résultats souvent optimaux dans l'étude du comportement en temps long des solutions ; l'analyse de Littlewood–Paley est un outil puissant pour prouver des résultats d'existence ou d'unicité ; les espaces de Besov permettent non seulement de mesurer avec précision la régularité des solutions, mais ils peuvent également nous renseigner sur leur caractère oscillant. Nous avons aussi été amenés à développer certains aspects de la théorie des espaces à poids afin de résoudre un problème de localisation en magnéto-hydrodynamique.

De plus, la plupart des modèles que nous avons étudiés ont une nature non locale : la perturbation d'une quantité dans une région de l'espace a des répercussions importantes sur le comportement du système entier, même à de grandes distances. Nous abordons l'étude de ces modèles en les réécrivant sous une forme pseudo-différentielle. Les applications de la théorie des intégrales singulières sont, alors, souvent décisives dans notre travail.

Les sections 1.1.1 et 1.1.2 présentent des résultats directement issus de la thèse. Le chapitre 6 est lui aussi étroitement lié à la thèse, bien que les théorèmes qu'ils y sont présentés aient été réélaborés assez en profondeur. Le reste du chapitre 1 et les chapitres 2 à 5 contiennent nos résultats plus récents. Ces chapitres se terminent par une section illustrant des perspectives, ainsi que quelques pistes pour des recherches futures.

Chapitre 1

Comportement asymptotique pour les équations de Navier–Stokes

Dans cette section on s'intéresse au système de Navier–Stokes, qui modélise le mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Dans le cas d'un fluide de densité constante, remplissant l'espace \mathbb{R}^d tout entier, et en l'absence de force extérieure, le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u = \nu \Delta u - \nabla p \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u|_{t=0}(x) = u_0(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0. \quad (\text{NS})$$

Ici $d \geq 2$ est un entier. Les inconnues du problème sont le champ de vitesse $u = (u_1, \dots, u_d)$ et le champ scalaire de pression p . La viscosité $\nu > 0$ sera systématiquement fixée égale à 1. On peut toujours se ramener à ce cas après un changement d'échelle convenable dans les inconnues.

Les résultats fondamentaux sur ce système remontent aux années trente avec J. Leray : pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on sait démontrer l'existence de solutions faibles globales $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1)$. Leur unicité n'est connue qu'en dimension $d = 2$ et l'on sait, dans ce cas, que la solution ne peut développer de singularité en temps fini.

En dimension $d = 3$ (ou supérieure) la situation est plus ouverte : la régularité des solutions faibles n'est garantie que sous des hypothèses a priori supplémentaires, comme par exemple les conditions d'intégrabilité de Serrin [180], ou celle plus récente de Escauriaza, Seregin et Šverák [82, 83] : $u \in L^\infty((0, T), L^3(\mathbb{R}^3))$. On sait aussi démontrer la régularité en imposant des restrictions sur le tourbillon $\omega = \text{rot } u$, comme celle de Beale, Kato et Majda [10], ou celle de Constantin et Fefferman [66], de nature plus géométrique. Certaines de ces conditions assureraient la régularité aussi dans le cas des équations d'Euler ($\nu = 0$).

En l'absence de ce type de conditions, on sait seulement qu'une solution faible de (NS) ne peut avoir trop de singularités : on dispose en effet de bornes sur la dimension d'Hausdorff de l'ensemble des singularités d'une solution, [46]. Dans la pratique, on ne sait construire de solution globale partout régulière que sous certaines restrictions : notamment dans le cas de données initiales petites (les résultats classiques sont ceux de Leray [138] et Kato et Fujita [126]) ou très oscillantes (voir par exemple Cannone [49] et Koch et Tataru [129]), ou pour certaines données ayant une structure assez particulière (voir, par exemple, Chemin et Gallagher [63]).

Une difficulté sérieuse vient de ce que les quantités que l'on sait contrôler globalement (comme par exemple $\|u(t)\|_2$) sont sur-critiques par rapport aux changements d'échelles de l'équation. Rappelons ici que si $u(x, t)$ et $p(x, t)$ est une solution, alors $\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ et $\lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$ est une solution du système avec donnée $\lambda u_0(\lambda x)$. Dans le cadre des espaces L^p ,

la norme qui respecte le changement d'échelle de u_0 est donc la norme $L^d(\mathbb{R}^d)$.

On peut réécrire le système (NS) sous forme intégrale. Pour cela on note $e^{t\Delta}$ le semi-groupe de la chaleur, et par \mathbb{P} le projecteur (de Leray–Hopf) sur le champ de vecteurs de divergence nulle, défini par

$$\mathbb{P}f = f - \nabla\Delta^{-1}(\operatorname{div} f).$$

On a alors, au moins formellement (rappelons qu'ici et par la suite, $\nu = 1$)

$$\begin{cases} u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\operatorname{div}(u \otimes u)(s) ds, \\ \operatorname{div} u_0 = 0. \end{cases} \quad (\text{NS}') \tag{NS'}$$

et les solutions de (NS') sont souvent appelées *mild*.

Fabes, John et Rivière [84] ont démontré que pour $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $d < p \leq \infty$ le système (NS') possède une unique solution mild dans $L^q((0, T), L^p)$ pour $d/p + 2/q < 1$ et un certain $T > 0$. Ces solutions sont régulières. De plus, pour $2 \leq p < \infty$ et $2 \leq q \leq \infty$, u est une solution faible de (NS) si et seulement si u est une solution mild. Le temps de vie peut être minoré par

$$T \geq \left(c(1 - d/p)^{2(1-1/p)} \|u_0\|_p^{-2} \right)^{p/(p-d)},$$

et il peut être pris indépendant de p quand u_0 appartient à L^p pour des différentes valeurs de p . On dispose de nombreux résultats aussi dans le cas limite $p = d$. En utilisant une méthode différente (utilisée auparavant par F. Weissler [185] pour l'équation de la chaleur), pour $u_0 \in L^d(\mathbb{R}^d)$, Kato a construit une solution $u \in C([0, T], L^d(\mathbb{R}^d))$, qui est en fait globale ($T = \infty$) au moins si $\|u_0\|_d$ est suffisamment petite. L'unicité de cette solution est due à Furioli, Lemarié-Rieusset et Terraneo [137].

Dans l'autre cas limite, $p = \infty$, l'unicité des solutions faibles peut être obtenue en imposant des restrictions naturelles sur la pression (voir [103, 123, 134]). Dans le cas de la dimension 2, et sous la seule hypothèse $u_0 \in L^\infty$, Giga, Matsui et Sawada [104] (voir aussi [173]) ont établi l'existence globale des solutions.

Notre intérêt pour le système de Navier–Stokes remonte à la thèse. La question de départ était alors de comprendre dans quelle mesure certaines bases d'ondelettes peuvent fournir une approximation efficace des solutions. Pour cela, nous avons déterminé certaines conditions (assez restrictives) sur la donnée initiale u_0 assurant que la solution $u(\cdot, t)$ se développe en une *série creuse* d'ondelettes. Cela signifie que la suite des coefficients d'ondelettes, convenablement rénormalisées, appartient à des espaces de type ℓ^p , avec $0 < p < 1$. Ceci garantit qu'une fois réordonnées les coefficients décroissent vite vers zéro; dans une telle situation favorable, un petit nombre de termes du développement en ondelettes contient alors l'essentiel de l'information sur la solution.

Cette problématique nous avait conduit à étudier les propriétés de localisation et d'oscillations des solutions de Navier–Stokes (en effet, les ondelettes avec lesquelles on travaille sont à la fois bien localisées en variable d'espace et ont des moments nuls). Même si après la thèse nous n'avons pas poursuivi avec l'application des méthodes d'ondelettes pour analyser les équations Navier–Stokes, la découverte de phénomènes inattendus sur le comportement pour $|x| \rightarrow \infty$, nous a incité par la suite à approfondir l'étude asymptotique des solutions. Dans les sections suivantes nous allons présenter les résultats que nous avons obtenus dans cette direction ces dernières années (ceux des sections 1.1.1 et 1.1.2 remontent à la thèse).

1.1 Le rôle de la symétrie dans le comportement asymptotique

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note L_θ^∞ l'espace des fonctions (ou des champs de vecteurs) f telles que $(1 + |x|)^\theta f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Cet espace est muni de sa norme naturelle. Pour $T > 0$, on note $C_w([0, T], L_\theta^\infty)$ l'espace des fonctions continues (au sens fort) et bornées sur $]0, T]$ dans L_θ^∞ , et telles que $u(t) \rightarrow u(0)$ faiblement pour $t \rightarrow 0$.

Le point départ de ce mémoire est le théorème suivant, qui rassemble les contributions de plusieurs auteurs, [84, 124, 153, 183] et [B2].

Théorème 1. *Soit $d \geq 2$. Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que pour tout champ de vecteurs $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ de divergence nulle on peut trouver un temps $T \geq \gamma \min\{1; \|u_0\|_\infty^{-2}\}$ et une unique solution $u \in C_w([0, T], L^\infty)$ de (NS'). Si $d = 2$, ou si $d \geq 3$ et $u_0 \in L^d \cap L^\infty$ avec $\|u_0\|_d$ suffisamment petite, alors on peut prendre $T = +\infty$. De plus cette solution est régulière pour $0 < t \leq T$.*

1. Si de plus $u_0 \in L_\theta^\infty$ pour un certain $\theta \geq 0$, alors on a aussi

$$u \in C_w([0, T], L_{\theta_*}^\infty), \quad (1.1)$$

où

$$\theta_* = \min\{\theta, d + 1\}. \quad (1.2)$$

2. Il existe deux constantes $\eta, C > 0$ (ne dépendant que de la dimension d) telle que si de plus

$$\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |x| |u_0(x)| < \eta \quad (1.3)$$

alors u est globale en temps et vérifie les estimations

$$|u(x, t)| \leq C\eta(1 + |x|)^{-\theta_*} \quad \text{et} \quad |u(x, t)| \leq C\eta(1 + t)^{-\theta_*/2}. \quad (1.4)$$

Dans les cas $\theta = d$ ou $\theta = d + 1$. pour la validité des estimations (1.4) on a besoin de l'hypothèse plus précise

$$\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^d, t > 0} |e^{t\Delta} u_0| (1 + |x|)^\theta < \infty.$$

Cette dernière condition est assurée si, par exemple, on a de plus $u_0 \in L^1$ ou $(1 + |x|)u_0 \in L^1$, respectivement.

Les estimations de décroissance ponctuelle (1.4) sont dues à Miyakawa [153, 154], qui les avait obtenues sous des conditions un peu plus restrictives, non invariantes par changement d'échelle. La validité de ces estimations sous la condition invariante (1.3) est établie dans notre article [B2]. La première partie du théorème est contenue aussi dans [137, 183].

1.1.1 Un critère de localisation

[B1] L. Brandolese, Y. Meyer

On the instantaneous spreading for the Navier–Stokes system in the whole space.

Cont. Optim. Calc. Var. **8**, **88**, 273–285 (2002).

À cause de leur nature parabolique, les équations de Navier–Stokes présentent un effet de vitesse de propagation infinie : des données initiales à support compact donnent naissance à des solutions qui auront immédiatement un support non compact. D'autre part le terme de pression, qui ne peut être éliminé des équations qu'en appliquant un opérateur non local, affecte considérablement le comportement pour $|x| \rightarrow \infty$: celui-ci ne sera pas du même type que pour l'équation de la chaleur.

En 1993, S. Dobrokhothov et A. Schafarevich [77] ont soulevé la question de l'existence de solutions (u_1, u_2, u_3) des équations de Navier–Stokes bien localisées dans \mathbb{R}^3 (par exemple, rapidement décroissantes pour $|x| \rightarrow \infty$). Leur question était motivée par le fait qu'aucun exemple de champ de vitesse décroissant à l'infini plus vite que $|x|^{-4}$ (ou $|x|^{-d-1}$ en dimension $d \geq 3$) n'était connu.

La difficulté vient de ce que tout champ de vitesse bien localisé doit nécessairement vérifier un grand nombre d'identités algébriques. En collaboration avec Yves Meyer, nous avons en effet obtenu le résultat suivant. On en donne ici une version simplifiée, en renvoyant à [B1] pour l'énoncé du théorème général.

On note, pour $M \in \mathbb{R}$, $\lfloor M \rfloor$ le plus grand entier strictement inférieur à M et par $\delta_{h,k}$ ($= 0$ ou 1) le symbole de Kronecker. On emploie les notations usuelles pour les multi-indices $\alpha \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 1. *Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$ et $u \in C_w([0, T], L_{d+1}^\infty)$ la solution de (NS') obtenue dans le théorème 1. Soit $M > 0$. Alors u appartient plus précisément à $C_w([0, T], L_{d+1+M}^\infty)$ si et seulement si, pour tout $0 \leq t \leq T$ et $m = 0, \dots, \lfloor M \rfloor$, les polynômes homogènes de degré $m + 2$:*

$$\mathbb{R}^d \ni \xi \mapsto \sum_{h,k=1}^d \sum_{|\alpha|=m} \left\{ \frac{1}{\alpha!} \int x^\alpha (u_h u_k)(x, t) dx \right\} \xi^\alpha \xi_h \xi_k,$$

sont divisibles par le polynôme $\xi_1^2 + \dots + \xi_d^2$.

Notons que dans le cas $0 < M \leq 1$ la condition peut se réexprimer ainsi : pour tout $t \in [0, T]$,

$$\int u_h u_k(x, t) dx = c_t \delta_{h,k} \quad (h, k = 1, \dots, d). \quad (1.5)$$

Autrement dit, les composantes u_1, \dots, u_d du champ de vitesse sont orthogonales par rapport au produit scalaire de L^2 . De plus, l'obstruction 1.5 peut se démontrer sous des hypothèses plus générales que $u(t) \in L_{d+1+M}^\infty$, $M > 0$. Une condition comme

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \int_{R < |x| < 2R} |u(x, t)| dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.6)$$

suffit à cet effet (en particulier, ceci interdit, génériquement, $u(x, t) = o(|x|^{-d-1})$ pour $|x| \rightarrow \infty$). Voir [B1].

Les conditions d'orthogonalité (1.5) avaient été trouvées auparavant par S. Dobrokhothov et S. Shafarevich [78] en imposant des restrictions techniques sur la pression. Pour cette raison leur approche n'était pas entièrement satisfaisante : en effet, dans la pratique on essaie d'étudier les équations en mettant l'accent sur le seul champ de vitesse, en se débarrassant de la pression à l'aide du projecteur \mathbb{P} . Une condition d'orthogonalité semblable était parue aussi dans [177] dans un contexte différent : le problème de la dissipation de l'énergie $\|u(t)\|_2^2$ pour $t \rightarrow \infty$. Nous reviendrons plus loin sur les applications de la proposition 1 à ce problème.

Pour comprendre au moins formellement l'origine de la condition de divisibilité ci-dessus on peut faire appel à la relation classique entre la pression et le champ de vitesse

$$-\Delta p(x, t) = \sum_{h,k=1}^d \partial_h \partial_k (u_h u_k)(x, t).$$

En prenant la transformée de Fourier,

$$-|\xi|^2 \widehat{p}(\xi, t) = \sum_{h,k=1}^d \xi_h \xi_k \widehat{u_h u_k}(\xi, t).$$

Ensuite, on fait un développement pour $\xi \rightarrow 0$ terme-à-terme. La justification rigoureuse du passage à la limite nécessite l'obtention d'informations préalables sur la localisation de la pression, car la limite $\widehat{p}(0, t)$ n'est pas définie, a priori. Cela se fait sans difficulté dans le cadre de la proposition 1. Quand on ne dispose que d'un renseignement du type (1.6) sur u , la démonstration est plus subtile.

Bien que la proposition fournisse une condition nécessaire et suffisante, celle-ci n'est pas immédiatement exploitable pour construire des solutions fortement localisées : cette condition de divisibilité n'étant pas conservée par le flot, elle ne repose pas uniquement sur la donnée initiale, mais sur la solution elle-même.

Cependant, en dimension deux, on connaît depuis longtemps un exemple de solution telle que, pour tout $t \geq 0$, $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, et remplissant donc les conditions de la proposition 1 pour tout $M \in \mathbb{N}$. Il s'agit d'un écoulement invariant par rotations, à tourbillon radial. Le champ de vitesse est à la fois une solution des équations de Navier–Stokes et de l'équation de la chaleur $\partial_t u = \Delta u$. Un tel écoulement est dit de Beltrami. Il est “trivial” au sens qu'une fois projeté sur le champ de vecteurs de divergence nulle, la non-linéarité $u \cdot \nabla u$ est identiquement nulle. Voir [91, 177] pour plus de détails.

Les écoulements de Beltrami ne se généralisent pas à la dimension trois. En effet, les solutions axisymétriques ne décroissent pas mieux que les solutions génériques (à savoir, au plus comme $|x|^{-4}$). En dimension trois, nous avons donné dans [B1] le premier exemple de solution bien localisée. Il s'agit de la solution émanant de la donnée initiale :

$$u_0(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1(x_3^2 - x_2^2) \\ x_2(x_1^2 - x_3^2) \\ x_3(x_2^2 - x_1^2) \end{pmatrix} e^{-|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.7)$$

On peut démontrer que les conditions de la proposition 1 sont vérifiées avec $M = 1, 2$. La solution correspondante décroît alors comme $|x|^{-6}$ à l'infini. L'idée de la démonstration repose sur l'introduction d'une classe de symétries qui restent conservées au cours de l'évolution :

$$u_{0,1}(x) = u_{0,2}(\sigma x) = \dots = u_{0,n}(\sigma^{d-1}x), \quad \text{où } \sigma(x_1, \dots, x_d) = (x_d, x_1, \dots, x_{d-1}), \quad (1.8)$$

$u_{0,j}(x)$ impaire en x_j et paire en x_k , pour $k \neq j$.

Des symétries semblables, mais dans le cas d'écoulements dans le tore, avaient été exploitées auparavant par S. Kida [127], avec des motivations complètement différentes : réduire les degrés de liberté dans un écoulement afin de permettre des simulations numériques plus précises.

1.1.2 Le problème de la dissipation de l'énergie des solutions faibles

[B2] L. Brandolese,

Asymptotic behavior of the energy and pointwise estimates for solutions to the Navier–Stokes equations, Rev. Mat. Iberoamericana **20**, 223–256 (2004).

L'article fondateur de Jean Leray paru à Acta Mathematica en 1934 et contenant la définition et la construction des solutions faibles se termine par cette question sur leur énergie cinétique $W(t) = \|u(t)\|_2^2$:

“J'ignore si $W(t)$ tend nécessairement vers 0 quant t augmente indéfiniment”.

Ce problème posé par Leray a été résolu par l'affirmatif indépendamment par K. Masuda et T. Kato en 1984 (voir [124, 145]). Les premiers taux explicites de décroissance ont été calculés peu de temps après par Maria E. Schonbek [176], grâce à une application de sa méthode de *Fourier splitting*. Ses résultats ont été étendus par de nombreux auteurs. Nous ne rappelons ici que l'article de M. Wiegner en 1987 qui fournit les taux de décroissance optimaux

sous les hypothèses minimales. Le résultat de Wiegner [186] peut se résumer ainsi : soit $0 \leq \alpha \leq (d+2)/2$. Pour une solution faible u de (NS) on a $\|u(t)\|_2^2 \leq C(1+t)^{-\alpha}$ si la solution $e^{t\Delta}u_0$ de l'équation de la chaleur vérifie le même type d'estimation : $\|e^{t\Delta}u_0\|_2^2 \leq C'(1+t)^{-\alpha}$. Pour $0 \leq \alpha < (d+2)/2$ cette condition est aussi nécessaire.

À la lecture du résultat de Wiegner, une question se pose naturellement : existe-t-il des solutions $u \neq 0$ telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{(d+2)/2} \|u(t)\|_2^2 = 0 ? \quad (1.9)$$

L'exposant $-(d+2)/2$ est en effet critique pour la dissipation d'énergie : même si la donnée initiale est dans la classe de Schwartz, elle possède un nombre infini de moment nuls et elle est "petite", génériquement $\|u(t)\|_2^2$ ne va pas décroître plus vite que $t^{-(d+2)/2}$. Ce fait a été remarqué pour la première fois par M. Schonbek dans [177], où l'on discute du problème de la *minoration* de l'énergie pour t grand.

Dans ce même article, publié dans *J. Amer. Math. Soc.* en 1991, A. Majda et M. Schonbek observent que les écoulements bidimensionnels à tourbillon radial permettent d'obtenir facilement des solutions exponentiellement décroissantes en norme $L^2(\mathbb{R}^2)$. Ces écoulements de Beltrami fortement dissipatifs ont été généralisés aux dimensions $d = 4, 6, \dots$, par M. Schonbek, T. Schonbek et E. Süli, [178]. Cependant ces travaux avaient laissé ouverte la question (1.9), notamment dans le cas de la dimension trois.

Dans la note [B17], et ensuite dans [B2], nous avons répondu affirmativement à cette question, quelle que soit la dimension. Pour cela on s'est appuyé sur les analogies profondes entre le comportement à l'infini en variable d'espace et en variable temporelle. En particulier, les solutions possédant une localisation spatiale sur-critique considérées dans la section précédente sont de bons candidats pour être des solutions fortement dissipatives.

Voici un énoncé plus précis. Il met en évidence que des conditions algébriques voisines (mais pas identiques !) à celles trouvées dans la proposition 1, déterminent le taux de décroissance de l'énergie.

Théorème 2. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ($d = 3, 4$) un champ de vecteur de divergence nulle tel que $\int |x|^3 |u_0(x)|^2 dx < \infty$. Il existe alors une solution faible u de (NS), telle que

$$\int |x|^3 |u(x, t)|^2 dx < \infty \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

De plus :

1. Si $\|e^{t\Delta}u_0\|_2^2 \leq C(1+t)^{-\alpha_0}$, avec $\alpha_0 > \frac{d+2}{2}$ et si

$$\int u_h(x, t) u_k(x, t) dx = c(t) \delta_{h,k}, \quad \text{pour presque tout } t \in]0, \infty[, \quad (1.10)$$

alors $\|u(t) - e^{t\Delta}u_0\|_2^2 = O(t^{-(d+4)/2})$ pour $t \rightarrow \infty$. En particulier,

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C(1+t)^{-\bar{\alpha}}, \quad \text{avec } \bar{\alpha} = \min\{\alpha_0, \frac{d+4}{2}\}. \quad (1.11)$$

2. Si, de plus, $\alpha_0 > \frac{d+4}{2}$ et si u vérifie

$$\begin{aligned} \int x_k u_k(x, t) u_k(x, t) dx &= \int x_k u_h(x, t) u_h(x, t) dx, \\ \int x_j u_h(x, t) u_k(x, t) dx &= 0, \quad h \neq k \end{aligned} \quad (1.12)$$

pour tout $j, h, k = 1, \dots, d$ et presque tout $t > 0$, alors $\|u(t) - e^{t\Delta}u_0\|_2^2 = O(t^{-(d+6)/2})$ pour $t \rightarrow \infty$. Ainsi, (1.11) s'améliore par

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C(1+t)^{-\tilde{\alpha}}, \quad \text{avec } \tilde{\alpha} = \min\{\alpha_0, \frac{d+6}{2}\}. \quad (1.13)$$

3. Il existe des solutions non triviales vérifiant les relations algébriques (1.10) et (1.12), et donc l'estimation (1.13) avec $\tilde{\alpha} = \frac{d+6}{2}$.

Il convient d'insister sur le troisième point, qui assure que le théorème n'est pas vide. Ces solutions peuvent être construites en prenant des données initiales vérifiant les conditions de symétrie (1.8). Ainsi, par exemple, la donnée initiale 3D (1.7) vérifie ces conditions, et donne naissance à une solution faible telle que $\|u(t)\|_2^2 \leq C(1+t)^{-9/2}$.

Notre théorème complète celui de Miyakawa et Schonbek [156], qui avaient auparavant reconnu que la condition (1.10) est essentiellement nécessaire et suffisante pour obtenir des solutions vérifiant (1.9) (en toute dimension). Cependant, les auteurs de [156] eux-mêmes, reconnaissaient de ne rien savoir sur l'existence de solutions $u \neq 0$ vérifiant ces conditions algébriques pour $d = 3$.

Bien que le théorème énoncé pour les solutions faibles ne soit valable qu'en dimension $d \leq 4$ (parce que l'inégalité forte d'énergie et les estimations sur les moments des solutions ne sont pas connues en dimension supérieure), notre construction s'adapte sans difficulté en dimension supérieure pour les solutions à donnée petite. Ceci est fait dans [B2].

1.1.3 Groupes d'isométries et comportement asymptotique

[B3] L. Brandolese,

Space-time decay of Navier–Stokes flows invariant under rotations,
Math. Ann. **329**, 686–706 (2004).

À l'issue d'un exposé à Grenoble de nos résultats de la section précédente, Thierry Gallay et Yves Colin de Verdière nous ont suggéré d'effectuer une étude systématique des interconnexions entre le comportement asymptotique des solutions de Navier–Stokes et leurs propriétés de symétrie. Le point de départ est l'observation suivante : ces équations sont invariantes sous l'action du groupe orthogonal $O(d)$. Ainsi, si $u(x, t)$ est une solution, dans \mathbb{R}^d et $P \in O(d)$ est une matrice orthogonale alors $\tilde{u}(x, t) = P^T u(Px, t)$ est une autre solution des équations de Navier–Stokes (ici P^T est la transposée de P). Cela signifie que si la donnée initiale commute avec $P \in O(d)$ alors le champ de vitesse vérifie

$$P u(x, t) = u(Px, t) \quad (1.14)$$

tant que l'unique solution forte u de (NS) est bien définie. Dans le cas où l'on ne dispose que de solutions faibles du problème de Cauchy, alors au moins l'une d'entre elles vérifie (1.14) (l'unicité des solutions faibles n'étant pas connue), comme on peut le vérifier en suivant pas à pas l'une des constructions connues de ces solutions.

Si G est un sous-groupe de $O(d)$, que peut-on dire du comportement asymptotique (en espace ou en temps) des solutions G -invariantes ? Les cas les plus intéressants correspondent aux sous-groupes *discrets*. En effet, en dimension deux les solutions invariantes sous l'action du sous-groupe continu $SO(2)$ sont "triviales". En dimension trois, des obstructions topologiques apparaissent dans la construction de solutions $SO(3)$ -invariantes. De plus, nous avons démontré que les solutions invariantes sous l'action des autres groupes continus (comme celui du cylindre) ont les mêmes propriétés asymptotiques que les solutions génériques.

En revanche, dans le cas de sous-groupes discrets la décroissance pour $|x| \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow \infty$ peut être beaucoup plus rapide.

Rappelons que L_θ^∞ désigne l'espace des fonctions (ou des champs de vecteurs) telles que $(1 + |x|)^\theta \in L^\infty$. Les résultats principaux de [B3] peuvent alors s'énoncer ainsi :

Théorème 3. *Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs de divergence nulle. On sait alors qu'il existe une unique solution forte globale de (NS) $u \in C([0, \infty), L_3^\infty(\mathbb{R}^2))$ (voir le théorème 1). Soit $n \geq 3$ un entier.*

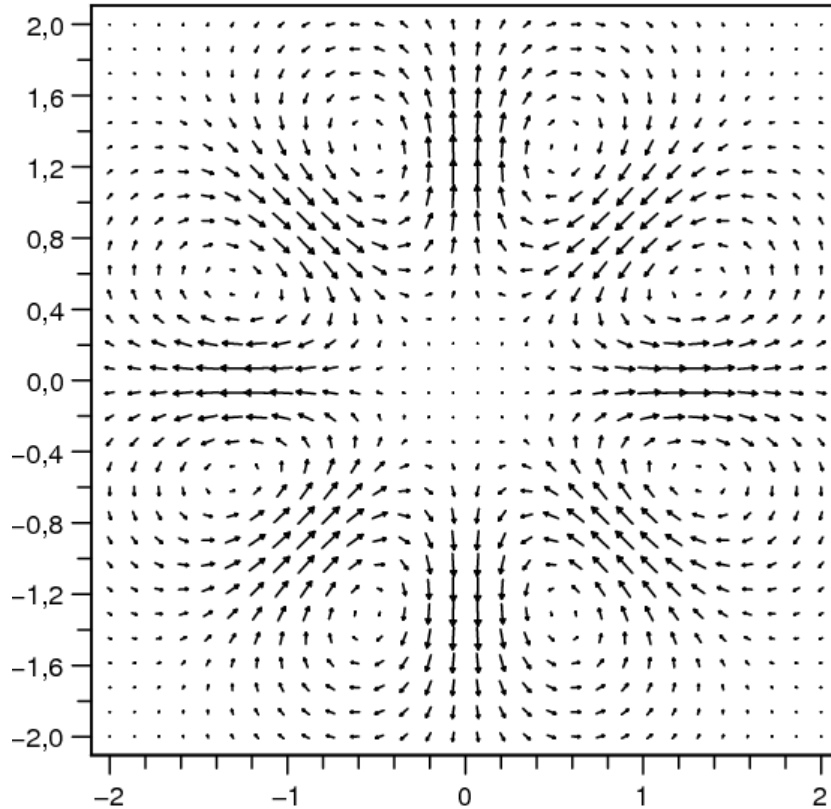


FIGURE 1.1 – Écoulement bidimensionnel D_4 -invariant : le champ de vitesse est invariant par une rotation de $\pi/2$ et symétrique par rapport à la droite $x_1 = x_2$.

1. Si u_0 est invariant sous l'action du groupe cyclique C_n alors $u(x, t) = O(|x|^{-(n+1)})$ pour $|x| \rightarrow \infty$.
2. Si de plus u_0 est invariant sous l'action du groupe diédral D_n d'ordre $2n$, cette décroissance pour $|x| \rightarrow \infty$ est uniforme pour $t \in [0, \infty)$, et $\|u(t)\|_p \leq C(1+t)^{-(n+1)/2+1/p}$, pour $1 \leq p \leq \infty$.

Signalons que dans [B3] nous avons imposé dans la dernière conclusion la restriction technique $2 < p \leq \infty$. C. He et T. Miyakawa [109] ont cependant par la suite étendu notre résultat au cas $1 \leq p \leq 2$.

Dans le cas de la dimension trois, nous pouvons identifier deux sous-groupes discrets G et G' lorsqu'ils sont conjugués dans $O(3)$ (c'est-à-dire, lorsqu'il existe $T \in O(3)$ tel que $G' = TGT^{-1}$). La classification de ces classes de conjugation est fort classique (voir [150, 187]). Il y a donc quatorze groupes à étudier. En revanche, deux écoulements qui sont invariants sous l'action de deux groupes isomorphes, mais pas conjugués auront un comportement asymptotique a priori différent.

Théorème 4. Soit $u_0 = (u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Alors on sait qu'il existe $0 < T \leq \infty$ et une unique solution forte $u \in C([0, T], L_4^\infty)$ de (NS) (voir le théorème 1) telle que $u(0) = u_0$.

1. Si u_0 est invariant sous l'action du groupe de symétrie complète du tétraèdre alors $u \in C([0, T], L_5^\infty(\mathbb{R}^3))$.
2. Si u_0 est invariant sous l'action du groupe de symétrie complète du cube (ou de l'octaèdre), alors $u \in C([0, T], L_6^\infty(\mathbb{R}^3))$.
3. Si u_0 est invariant sous l'action du groupe de symétrie complète du dodécaèdre (ou de l'icosaèdre), alors $u \in C([0, T], L_8^\infty(\mathbb{R}^3))$.

De plus, si l'on sait que la solution est globale ($T = \infty$), alors $\|u(t)\|_p$ décroît pour $t \rightarrow \infty$ respectivement, au moins aussi vite que $t^{-5/2+3/(2p)}$, $t^{-3+3/(2p)}$ et $t^{-4+3/(2p)}$ (avec $\frac{3}{2} < p \leq \infty$).

Le théorème précédent ne couvre pas la totalité des cas à étudier. Par exemple, les symétries définies par les conditions (1.8) correspondent au groupe de symétrie d'un solide nommé *pyritoèdre*. Il s'agit d'un sous groupe d'ordre 24 du groupe des symétries du cube. Pour l'étude exhaustive de tous les autres sous-groupes on renvoie à [B3].

Les taux de décroissance calculés dans le Théorème 4 sont optimaux. En effet grâce à la proposition 1 et à l'utilisation d'un logiciel de calcul formel il est possible de construire des exemples de données initiales dans la classe de Schwartz, invariantes sous l'action d'un sous-groupe donné de $O(3)$ et dont la solution correspondante ne décroît pas mieux que prévu par le théorème.

Nous avons déjà mentionné au début de la section 1.1.1 le problème posé par Dobrokhotov et Shafarevich, relatif à la construction de solutions bien localisées dans \mathbb{R}^3 : s'il est aisé, grâce au théorème 4, de produire des solutions telles que $u(x, t) = O(|x|^{-8})$ pour $|x| \rightarrow \infty$, il semble impossible, par nos méthodes, d'obtenir des solutions encore mieux localisées. Aucun exemple de solution $u \not\equiv 0$ dans \mathbb{R}^3 décroissant plus vite que $|x|^{-8}$ n'est connu.

Concernant la décroissance en temps, notre théorème garantit l'existence de solutions dans \mathbb{R}^3 décroissant comme t^{-4} en norme L^∞ . Ces solutions sont fortement dissipatives : leur énergie est telle que $\|u(t)\|_2^2 = O(t^{-11/2})$ pour $t \rightarrow \infty$. Un exemple explicite est fourni dans [B3] : la donnée initiale est de la forme $u_0(x) = \exp(-|x|^2)P(x)$, où $P = (P_1, P_2, P_3)$ et les P_j sont des polynômes dans \mathbb{R}^3 bien choisis de degré 7, respectant les symétries de l'icosaèdre et la contrainte de divergence nulle.

On dispose aussi du résultat suivant, qu'immédiatement découle de l'analyse de Th. Gallay et C. E. Wayne [98] : *soit $n = 2, 3$. Pour tout $\gamma > 0$ et tout p ($1 \leq p \leq \infty$), il existe une solution $u \not\equiv 0$ des équations de Navier-Stokes de \mathbb{R}^n telle que $\|u(t)\|_p \leq C(1+t)^{-\gamma}$. En fait, Gallay et Wayne obtiennent une conclusion bien plus précise : l'ensemble des solutions qui décroissent, en norme $\|\cdot\|_p$, plus rapidement qu'un certain taux algébrique, se trouvent sur un morceau de variété de codimension finie, dans un espace fonctionnel convenablement choisi. Observons cependant que, dans la pratique, on ne sait pas établir si un point donné de cet espace fonctionnel appartient ou non à ces variétés, car cela revient à étudier des équations que l'on ne sait pas résoudre. Ainsi, l'approche de Gallay et Wayne ne fournit pas d'exemple explicite de solution rapidement décroissante en temps.*

Méthodes utilisées

La démonstration des deux théorèmes ci-dessus repose principalement sur deux ingrédients. Le premier est l'étude de l'évolution du tourbillon $\omega = \nabla \times u$.

En dimension deux par exemple, on identifie ω au scalaire $\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$, on réécrit ensuite l'équation satisfaite par ω , qui est $\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \Delta \omega$. Ici u est donnée par la loi de Biot et Savart : $u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(y, t) dy$. On voit alors qu'il y a une relation étroite entre les cancellations de ω et la décroissance à l'infini de u . En l'absence de cancellation (c'est-à-dire quand $\int \omega \neq 0$ si ω est intégrable), u décroît comme le noyau de Biot et Savart, à savoir comme $1/|x|$. Une relation semblable est valable aussi dans \mathbb{R}^3 : dans ce cas le tourbillon est un champ de vecteurs de divergence nulle et le noyau de Biot et Savart est homogène de degré -2 .

Chaque moment nul pour ω apporte une amélioration du taux de décroissance. Cela est vrai non seulement en variable d'espace, mais aussi pour les estimations pour $t \rightarrow \infty$ des normes L^p . La difficulté vient de ce que les cancellations de ω ne sont pas conservées au

cours de l'évolution, mis à part les moments d'ordre 0 et 1. Le deuxième ingrédient dont on a besoin sont alors des lemmes de nature géométrique. Ces lemmes nous disent qu'en la présence de symétrie, ω est forcé d'avoir un grand nombre de cancellations.

1.2 À quelle vitesse le mouvement dans un fluide se propage-t-il ?

[B4] L. Brandolese, F. Vigneron,
New asymptotic profiles of nonstationnary solutions of the Navier–Stokes system,
 J. Math. Pures Appl. **88**, 64–86 (2007).

Dans cette section nous allons étudier le problème de mesurer la vitesse avec laquelle le mouvement se propage dans un fluide. Pour cela, on traite encore le système (NS) dans l'espace tout entier. Considérons par exemple la situation suivante : supposons d'avoir un fluide qui est au repos en dehors d'une région bornée de l'espace. On considère donc une donnée initiale à support compact (par exemple, $u_0 \in C_{c,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^d)$), même si la régularité ne joue ici aucun rôle, mais non identiquement nulle.

À quelle vitesse les particules de fluide situées à de grandes distances de cette région commencent-elles à se déplacer ?

Nous avons fourni une réponse précise à cette question. En effet, nous avons établi les estimations ponctuelles suivantes pour les solutions génériques (non symétriques) issues de données u_0 bien localisées, et en l'absence de toute force extérieure :

$$ct|x|^{-d-1} \leq |u(x,t)| \leq Ct|x|^{-d-1}. \quad (1.15)$$

Cet encadrement est valable pour tout $0 < t < t_0$, avec t_0 suffisamment petit et $|x| \geq R$ assez grand. La validité de la minoration ponctuelle nous paraît remarquable. Elle nous donne, entre autre, une compréhension complète du phénomène de diffusion instantanée de l'écoulement ; c'est-à-dire l'effet de perte brutale de la localisation spatiale pour le champ de vitesse.

Les estimations (1.15) reposent sur la construction de nouveaux profils asymptotiques. Un grand nombre de profils asymptotiques pour les équations de Navier–Stokes était connu auparavant. Par exemple, F. Planchon [168] a étudié des profils autosimilaires ; mais ses résultats ne peuvent être utilisés que dans le cas de solutions se comportant à l'infini comme $|x|^{-1}$, parce que dans le cas d'une plus forte décroissance le seul profil de ce type est donné par la solution nulle. Pour des solutions mieux décroissantes, les travaux d'A. Carpio [57], de Y. Fujigaki et T. Miyakawa [92], de T. Miyakawa et M. Schonbek [156], de Th. Gallay et C. E. Wayne [98–100], ou encore de M. Cannone, C. He et G. Karch [51], nous fournissent des informations précieuses sur le comportement en temps long. Cependant, dans tous ces travaux l'asymptotique est obtenu en calculant des normes $L^p(\mathbb{R}^d)$ (ou d'autres normes spatiales) d'expressions faisant intervenir le champ de vitesse ou le tourbillon. L'inconvénient de cette approche, c'est que toute information sur le *comportement ponctuel* de la solution est ainsi perdue.

La méthode que nous avons développée dans [B4] est différente. Elle consiste à exprimer asymptotiquement la solution comme une combinaison linéaire de fonctions à variables séparées, de la forme $H(x)K(t)$.

Les deux théorèmes suivants sont le fruit d'une collaboration avec F. Vigneron [B4]. Comme avant, $f \in L_\theta^\infty$ signifie $(1 + |x|)^\theta f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Les dérivées partielles d'une fonctions $E(x)$ sont notées E_{x_j} , E_{x_j, x_k} etc.

Théorème 5. *Soit $d \geq 2$ un entier, $\theta > \frac{d+1}{2}$ et $u_0 \in L_\theta^\infty(\mathbb{R}^d)$ un champ de vecteur de divergence nulle. Soit $u \in C_w([0, T], L^\infty)$ l'unique solution mild de Navier–Stokes (ici $T > 0$*

dépend éventuellement de $\|u_0\|_\infty$). Pour tout $t \in [0, T]$ et $|x| \rightarrow \infty$ on a :

$$u(x, t) = e^{t\Delta}u_0(x) + \nabla_x \sum_{h,k=1}^d \mathfrak{K}_{h,k}(x) \int_0^t (u_h|u_k)_{L^2} + O_t(|x|^{-\min\{2\theta, d+2\}}). \quad (1.16)$$

Ici, $\mathfrak{K}_{h,k}(x) = E_{x_h, x_k}(x)$, où $E(x)$ est la solution fondamentale de $-\Delta$ dans \mathbb{R}^d . Ainsi,

$$\mathfrak{K}_{h,k}(x) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \cdot \frac{\delta_{h,k}|x|^2 - dx_h x_k}{|x|^{d+2}}, \quad (1.17)$$

et les composantes du tenseur $\nabla_x \mathfrak{K}(x)$ sont des fonctions homogènes de degré $-d-1$.

Si de plus les dérivées de u_0 jusqu'à l'ordre 2 appartiennent à L_θ^∞ , alors la pression vérifie, pour une constante p_0 , pour tout $0 < t \leq T$ et $|x| \rightarrow \infty$,

$$p(x, t) = p_0 - \sum_{h,k} \mathfrak{K}_{h,k}(x)(u_h|u_k)_{L^2}(t) + O_t(|x|^{-\min\{2\theta-1, d+1\}}). \quad (1.18)$$

La restriction $\theta > \frac{d+1}{2}$ garantit que le dernier terme dans les développements (1.16) et (1.18) est négligeable pour $|x| \rightarrow \infty$. En gros, ce théorème nous permet d'obtenir les conclusions suivantes :

1. Pour des données initiales *fortement localisées* (plus précisément, dans le cas $\theta > d+1$), on a

$$u(x, t) \simeq \nabla_x \sum_{h,k} \mathfrak{K}_{h,k}(x) \int_0^t (u_h|u_k)_{L^2}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

En particulier, l'écoulement est asymptotiquement potentiel à de grandes distances.

2. Pour des données initiales *modérément localisées* ($\frac{d+1}{2} < \theta < d+1$), et *pas trop rapidement oscillantes* (on peut exprimer cela par une condition de décroissance des dérivées de u_0) on a le même comportement que pour l'équation de la chaleur :

$$u(x, t) \simeq e^{t\Delta}u_0(x), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Le terme successif du développement est donné par l'écoulement potentiel (1.19). En la présence d'oscillations rapides dans u_0 (comme celles de la fonction $\sin|x|^2$), la solution de l'équation de la chaleur décroît très vite pour $|x| \rightarrow \infty$ et la prédiction précédente cesse d'être vraie. La solution de Navier–Stokes se comportera alors pour $|x|$ grand comme dans (1.19).

3. Pour des données *faiblement localisées* (le cas $\theta < \frac{d+1}{2}$), le théorème ne permet pas de conclure. Nous reviendrons dans le chapitre 4 sur cette situation, quand nous aborderons le cas des solutions autosimilaires.

Nous sommes maintenant en mesure de formuler de manière plus rigoureuse le résultat conduisant aux estimations (1.15). Celles-ci sont une conséquence facile de (1.19) : tout d'abord, un calcul explicite montre que pour tout t et tout $j = 1, \dots, d$, la fonction homogène

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \sum_{h,k} [\mathfrak{K}_{h,k}]_{x_j}(x) \int_0^t (u_h|u_k)_{L^2}$$

est identiquement nulle dans \mathbb{R}^d si et seulement si la matrice $(\int_0^t (u_h|u_k)_{L^2})_{h,k}$ est un multiple de la matrice identité. Cette observation conduit à imposer une *condition de non symétrie* sur la donnée initiale :

$$\exists h \neq k : \int u_{0,h}u_{0,k}(x) dx \neq 0, \quad \text{ou} \quad \int u_{0,h}(x)^2 \neq \int u_{0,k}(x)^2 dx. \quad (1.20)$$

On obtient alors le résultat suivant (voir [B4]) :

Théorème 6. Soit $\theta > d + 1$, $u_0 \in L^\infty_\theta$ un champ de vecteur de divergence nulle et u la solution de Navier–Stokes comme dans le théorème 5. Pour $0 < t \leq T$, posons

$$\kappa_t = \max\{1, t^{-1/2}, t^{-1/(\theta-d-1)}\}.$$

1. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour $0 < t \leq T$ et $|x| \geq C\kappa_t$ on a :

$$|u(x, t)| \leq Ct|x|^{-(d+1)}.$$

2. Réciproquement, si la condition de non symétrie (1.20) est satisfaite pour un couple d'indices (h, k) , alors il existe $0 < t_0 \leq T$ et une constante $c > 0$ telle que pour tout x appartenant à un voisinage conique de l'axe x_h ou de l'axe x_k , avec $|x| \geq C\kappa_t$, on a :

$$|u_h(x, t)| \geq ct|x|^{-(d+1)}. \quad (1.21)$$

De plus, la minoration (1.21) est valable le long presque toute direction : l'ensemble

$$\Sigma = \left\{ \sigma \in \mathbb{S}^{d-1} : \liminf_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ |x| \rightarrow \infty \\ x \in \mathbb{R}\sigma}} \left(t^{-1} |x|^{d+1} |u_j(x, t)| \right) = 0 \right\}$$

est un sous-ensemble fermé de la sphère de mesure nulle.

Pour établir le profil (1.16) nous effectuons une sorte de *séparation asymptotique des variables*. On part la forme intégrale (NS') des équations de Navier–Stokes et on introduit la matrice $v(x, t)$ à l'aide de la relation

$$(u \otimes u)(x, t) = \frac{e^{-|x|^2/4}}{(4\pi)^{d/2}} \int (u \otimes u)(y, s) dy + v(x, t).$$

Comme $\int v(x, t) dx = 0$, la fonction $e^{t\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div} v$ décroît plus vite à l'infini que le terme $e^{t\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)$: sa contribution dans le développement pourra alors être incluse dans les termes d'ordre inférieur. Le point clé est la démonstration que le noyau de l'opérateur $e^{t\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}$ est asymptotiquement homogène, et se comporte, pour $|x| \rightarrow \infty$ comme $H = (H)_{j,h,k}$, où $H_{j,h,k}(x) = E_{x_j, x_h, x_k}(x)$. Considérons maintenant la matrice (dépendante du temps) $\mathcal{E} = (u_h | u_k)_{L^2}$. En appliquant l'opérateur $e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}$ à $\mathcal{E}(s)e^{-|x|^2}/(4\pi)^{d/2}$, on obtient le champ de vecteur $H(x) : \mathcal{E}(s)$, plus des termes d'ordre inférieurs. Le symbole : signifie que l'on somme sur les deux derniers indices $h, k = 1, \dots, d$. En prenant $K(t) = \int_0^t \mathcal{E}(s) ds$, on obtient que le terme principal pour $|x| \rightarrow \infty$ du terme quadratique est bien un champ de vecteurs de la forme $H(x) : K(t)$. Ceci correspond précisément au deuxième terme dans le développement (1.16).

La démonstration de la formule (1.18) sur la pression nécessite de quelques estimations supplémentaires ; notamment, on a besoin de contrôler la décroissance pour $|x| \rightarrow \infty$ de $t^{1/2} \partial_t u$. La méthode décrite ci-dessus s'applique ensuite également à p .

1.3 Applications au comportement en temps long

[B4] L. Brandolese, F. Vigneron,

New asymptotic profiles of nonstationary solutions of the Navier–Stokes system,
J. Math. Pures Appl. **88**, 64–86 (2007).

Le théorème 5 possède aussi une version globale. Dans le cas de la dimension deux, ou pour $d \geq 3$ sous une hypothèse supplémentaire de donnée petite, il est possible de prendre

$T = \infty$. Le problème se pose alors de savoir comment le terme de reste $O_t(|x|^{\min\{2\theta, d+2\}})$ se comporte quand $t \rightarrow \infty$. Nous renvoyons à [B4] pour l'énoncé précis des résultats obtenus dans ce cas. Signalons ici simplement que notre approche fournit alors des renseignements sur la solution dans la région parabolique $|x| \gg \sqrt{t}$.

Il y a cependant un corollaire de nos résultats qui mérite d'être mentionné. Cela concerne la réciproque au théorème 1. Supposons $\theta > d + 1$. Une réécriture équivalente des estimations de Miyakawa (1.4) est :

$$\|u(t)\|_{L_\alpha^\infty} \leq C\eta(1+t)^{-\frac{1}{2}(d+1-\alpha)}, \quad 0 \leq \alpha \leq d+1.$$

Une conséquence de la version globale du théorème 5, établie dans [B4], sont les minoration correspondantes des solutions génériques, pour t assez grand :

$$\|u(t)\|_{L_\alpha^\infty} \geq c(1+t)^{-\frac{1}{2}(d+1-\alpha)}, \quad 0 \leq \alpha \leq d+1.$$

La validité de cette estimation par dessous (la condition $c > 0$) est assurée sous une condition de non-symétrie semblable à (1.20). Mais cette condition cette fois-ci porte sur les intégrales en espace-temps $\int_0^\infty \int (u_h u_k)(x, t) dx dt$.

Or, pour des données suffisamment localisées et petites, la solution u construite reste proche (par exemple dans des normes $L_{x,t}^\infty$ à poids), de l'évolution linéaire $e^{t\Delta}u_0$. En appliquant alors le théorème de Plancherel,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int (u_h u_k)(x, t) dt ds &\simeq \int_0^\infty \int (e^{t\Delta}u_{0,h} e^{t\Delta}u_{0,k})(x, t) dx dt \\ &= \int \frac{\widehat{u}_{0,h} \overline{\widehat{u}_{0,k}}}{2|\xi|^2} d\xi. \end{aligned}$$

Notons que la dernière intégrale est bien définie (même en dimension $d = 2$) parce que la condition de localisation spatiale et de divergence nulle entraînent la nullité de $\widehat{u}_0(\xi)$ à l'origine.

On peut alors expliciter une nouvelle condition de non symétrie sur la donnée initiale, utile cette fois-ci pour obtenir des minoration pour $t \rightarrow \infty$:

$$\exists h \neq k: \quad \int \Delta^{-1}(u_{0,h} u_{0,k}) dx \neq 0, \quad \text{ou} \quad \int \Delta^{-1}u_{0,h}^2 dx \neq \int \Delta^{-1}u_{0,k}^2 dx. \quad (1.22)$$

Nous allons maintenant généraliser aux espaces L^p à poids. Le théorème suivant est une reformulation d'un résultat de [B4].

Théorème 7. *Soit $u_0 \in L_\theta^\infty$, avec $\theta > d + 1$, un champ de vecteur de divergence nulle, vérifiant $\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |x| |u_0(x)| < \eta$, pour une constante $\eta > 0$ suffisamment petite et la condition de non-symétrie (1.22). Soit u la solution mild de (NS') correspondante. Pour tout $t \geq t_0$ assez grand et pour tout*

$$0 \leq \alpha \leq d+1, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \text{tels que} \quad \alpha + d/p < d+1, \quad (1.23)$$

on a, pour deux constantes $c, C > 0$:

$$c(1+t)^{-\frac{1}{2}(d+1-\alpha-\frac{d}{p})} \leq \left\| (1+|x|)^\alpha u(t) \right\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(d+1-\alpha-\frac{d}{p})}. \quad (1.24)$$

La restriction $\alpha + d/p < d + 1$ s'explique grâce au théorème 6 : sous la première condition de non-symétrie (1.20),

$$\left\| (1+|x|)^\alpha u(t) \right\|_{L^p} = \infty, \quad \alpha + d/p \geq d+1,$$

au moins sur un petit interval $0 < t < t_1$.

Le théorème 7 apporte une réponse assez définitive au problème du comportement pour $t \rightarrow \infty$ des moments des solutions, au moins pour les solutions fortes issues de données initiales localisées. Rappelons qu'en dimension trois les solutions faibles deviennent des solutions fortes au bout d'un certain temps. Ce résultat nous renseigne alors aussi à ces solutions.

Ce problème de l'évolution des moments avait été étudié auparavant par de nombreux auteurs (voir par exemple [4, 8, 9, 112, 135, 136, 155, 161, 177, 190]), mais les résultats n'étaient que partiels. Par exemple, la minoration (1.24) des normes L^p à poids ne semblait être connue que dans les cas particuliers $p = 2$ et $0 \leq \alpha \leq 2$, ou $1 \leq p \leq \infty$ et $\alpha = 0$.

1.4 Effets de concentration-diffusion dans un écoulement

[B5] L. Brandolese,

Concentration-diffusion effects in viscous incompressible flows

Indiana Univ. Math. J. **58**, N. 2 (2009).

L'une des questions les plus importantes que pose l'étude mathématique des équations des fluides est celle de savoir si un écoulement "physiquement raisonnable" (d'énergie finie) ne présentant pas de singularité au début de l'évolution va, ou ne va pas, rester régulier indéfiniment. Une première étape vers la compréhension de mécanismes liés à l'éventuelle formation de singularités, serait la construction de solutions initialement régulières et décroissantes, donnant lieu à des écoulements pour lesquels "quelque chose d'étrange" se produit autour d'un certain point (x_0, t_0) de l'espace-temps. La construction de ces "étranges solutions" est le but principal de notre article [B5].

Nous construisons une classe de solutions (régulières) des équations de Navier–Stokes (NS) telles qu'en l'absence de toute force extérieure, le mouvement des particules de fluide tend à être plus concentré autour d'un point x_0 , quand le temps t s'approche d'un instant t_0 donné. D'un point de vue qualitatif, ceci correspond au comportement attendu en la présence d'une singularité, bien que ce phénomène de "concentration du mouvement" ne sera pas assez fort pour en impliquer la formation.

Par définition, nous dirons qu'un champ de vitesse **se concentre autour de l'origine à l'instant** t_0 s'il existe deux exposants $0 < m < M$ et un intervalle de temps $]t_0 - \delta, t_0[$, tel que, pour $|x| \gg 1$:

$$\begin{aligned} u \text{ est } \textit{minoré} \text{ pour } t_0 - \delta < t < t_0 : & \quad |u(x, t)| \geq c_t(1 + |x|)^{-m} \\ u \text{ est } \textit{majoré} \text{ pour } t = t_0 : & \quad |u(x, t)| \leq C(1 + |x|)^{-M}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Avec cette définition on peut quantifier la concentration du mouvement. Il ne s'agit pas de mesurer un effet concentration locale au voisinage d'un point, mais de mesurer plutôt une concentration macroscopique, dans des boules de grand rayon.

De manière analogue, nous dirons qu'un champ de vitesse **diffuse à l'instant** t_0 s'il existe deux exposants $0 < m < M$ et un intervalle de temps $]t_0, t_0 + \delta[$, tel que pour $|x| \gg 1$:

$$\begin{aligned} u \text{ est } \textit{majoré} \text{ pour } t = t_0 : & \quad |u(x, t)| \leq C(1 + |x|)^{-M} \\ u \text{ est } \textit{minoré} \text{ pour } t_0 < t < t_0 + \delta : & \quad |u(x, t)| \geq c_t(1 + |x|)^{-m}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Par exemple, si $|u(x, t)|$ se comporte près de t_0 et pour $|x| \rightarrow \infty$ comme

$$\frac{1 + |x|^{M-m}(t - t_0)_-}{1 + |x|^M}, \quad (1.27)$$

alors u se concentre à l'instant t_0 . Si on remplace la partie négative $(t - t_0)_-$ par la partie positive $(t - t_0)_+$, alors u diffuse à cet instant t_0 .

Le résultat de [B5] peut alors s'énoncer de manière informelle ainsi :

Théorème 8. *Il existe $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, avec $d = 2, 3$ et $\operatorname{div} u_0 = 0$, tel que la solution mild correspondante des équations de Navier–Stokes diffuse dans l'espace à l'instant $t = 0$ et, après un certain temps $t_0 > 0$, se concentre de nouveau autour de l'origine.*

Que se passe-t-il après le temps t_0 ? La solution du théorème 8 va diffuser une fois de plus, sans former de singularité. C'est pourquoi l'on peut observer ce phénomène de concentration aussi en dimension deux d'espace.

En gros, ce théorème nous dit que l'écoulement peut s'organiser et désorganiser spontanément au cours de l'évolution. Il s'agit là d'un phénomène qui est assez familier pour les écoulements non visqueux — les solutions faibles des équations d'Euler avec support compact en espace-temps construites par Scheffer, Schnirelmant, De Lellis et Székelyhidi [74, 174, 175] présentent ce type d'effet — mais qui était certainement inattendu pour les équations de Navier–Stokes.

En fait, ces phénomènes de concentration-diffusion peuvent se reproduire un nombre arbitrairement grand de fois au cours de l'évolution :

Théorème 9. *Soit $d = 2, 3$. Soit $0 < t_1 < \dots < t_N$ des instants de temps et $\epsilon > 0$. Alors il existe un champ de vecteurs de divergence nulle $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et deux séquences finies (t'_1, \dots, t'_N) et (t^*_1, \dots, t^*_N) telles que l'unique solution mild des équations de Navier–Stokes vérifie, pour tout $i = 1, \dots, N$, et tout $|x|$ assez grand la minoration*

$$|u(x, t'_i)| \geq c_\omega (1 + |x|)^{-d-1},$$

et la majoration

$$|u(x, t^*_i)| \leq C(1 + |x|)^{-d-2}.$$

Ici $C > 0$ est une constante indépendante de x et c_ω est une constante indépendante de $|x|$ (mais éventuellement dépendante de la projection $\omega = x/|x|$ de x sur la sphère unité) telle que $c_\omega > 0$ pour presque tout $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$. De plus, les instants t'_i et t^*_i peuvent être choisis arbitrairement proches de t_i :

$$|t'_i - t_i| < \epsilon \quad \text{et} \quad |t^*_i - t_i| < \epsilon, \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

Venons-en aux méthodes utilisées. Notre démonstration dans [B5] est constructive. Il s'agit de chercher une donnée initiale de la forme $u_0 = \operatorname{rot} \psi$, où la fonction de courant ψ est une combinaison linéaire de dilatés et de modulés d'une seule fonction $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (ou d'un champ de vecteurs si $d = 3$) dont la transformée de Fourier est à support compact. Pour cela on cherchera ψ de la forme

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{d(N+1)} \lambda_j \delta^{d/2} \chi(\delta x) \cos(\alpha_j \cdot x). \quad (1.28)$$

Le vecteur inconnu $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{d(N+1)}) \in \mathbb{R}^{d^2(N+1)}$ de toutes les phases $\alpha_j \in \mathbb{R}^d$ est choisi dans un sous-espace convenable $V \subset \mathbb{R}^{d^2(N+1)}$ de dimension $d(N+1)$. Cela va garantir, a priori, la validité certaines conditions géométriques de l'écoulement (plus précisément la première condition de (1.8), mais pas la seconde, sinon la solution resterait concentrée pour tout temps). De cette manière, le problème se réduit à l'étude des zéros de la fonction

$$t \mapsto \int_0^t \int (u_1 u_2)(x, s) dx ds.$$

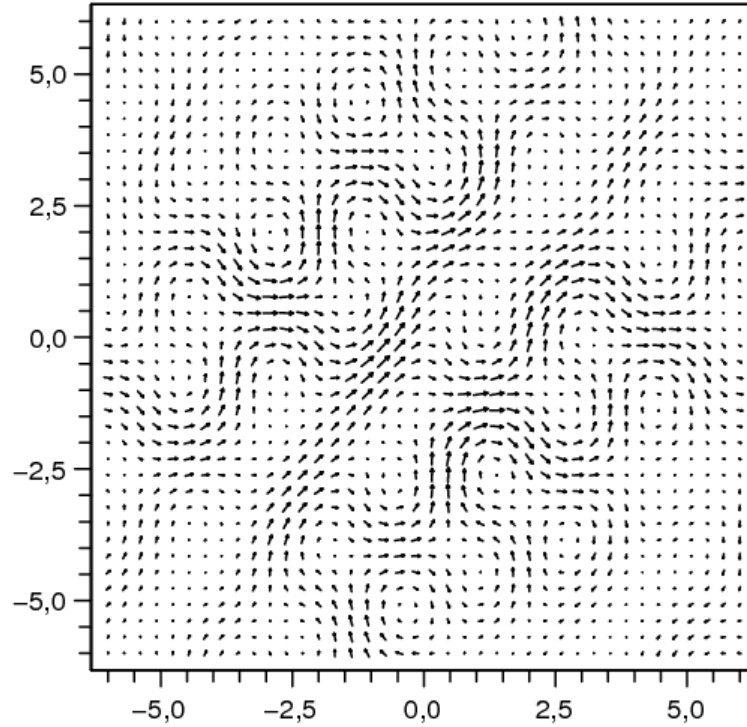


FIGURE 1.2 – Donnée initiale dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ d’une solution des équations de Navier–Stokes qui diffuse-concentre-diffuse au cours de l’évolution.

Par un argument d’analyticité, cette étude se réduit à celui du signe de la fonction

$$t \mapsto \int_0^t \int (e^{s\Delta} u_{0,1} e^{s\Delta} u_{0,2}) dx ds.$$

Cette intégrale peut se calculer à l’aide de la formule de Plancherel, et le problème peut être ainsi réduit à un système linéaire, que l’on peut résoudre par des méthodes élémentaires d’algèbre linéaire.

Considérons par exemple la donnée initiale dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ (voir la figure 1.2) :

$$u_0(x_1, x_2) = \eta \left(\frac{-\partial_2}{\partial_1} \right) \left[\chi(x) \left(\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}x_1 + x_2) - \sqrt{3} \cos(x_1 + \sqrt{3}x_2) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} \cos(\sqrt{6}x_1 - \sqrt{2}x_2) - \sqrt{2}(-\sqrt{2}x_1 + \sqrt{6}x_2) \right) \right], \quad (1.29)$$

où χ est une fonction de norme L^2 égale à 1 et dont la transformée de Fourier est une fonction *cut-off*. Alors la solution de (NS) diffuse au temps $t = 0$ et se concentre de nouveau par la suite au temps $t_0 \simeq \frac{1}{8} \log 2$. Cette approximation du temps t_0 sera meilleure quand $\eta > 0$ et la taille du spectre de χ sont petits.

1.5 Développements et perspectives

1.5.1 Quelques questions ouvertes sur le comportement à de grandes distances

À la lumière des résultats de la section 1.1.1, on sait qu’une solution des équations de Navier–Stokes rapidement décroissante pour $|x| \rightarrow \infty$ doit satisfaire à une infinité de relations

algébriques. Comme on l'a observé dans la section 1.1.3, on ne connaît pas de solution qui décroît plus vite que $|x|^{-8}$.

Il semble alors raisonnable de conjecturer ceci :

Conjecture 1. *Il n'y a pas de solution $u \neq 0$ de (NS) dans \mathbb{R}^3 , telle que $u \in C([0, T], \mathcal{S}(\mathbb{R}^3))$, avec $T > 0$.*

Observons qu'une donnée initiale u_0 dans la classe de Schwartz, ou simplement telle que $\nabla \times u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, donne naissance à une solution dont la vorticité correspondante vérifie $\nabla \times u \in C([0, T], \mathcal{S}(\mathbb{R}^3))$ pour un certain $T > 0$. En fait, la vorticité va instantanément appartenir à la classe de Schwartz pour $0 < t \leq T$ si, à l'instant $t = 0$, elle est rapidement décroissante. Voir, par exemple, [B18] pour une démonstration courte de ce résultat folklorique. Mais cela ne nous dit rien sur la localisation de u .

Un autre problème intéressant est celui du comportement anisotrope du champ de vitesse. Supposons par exemple que $|u_0(x)| \leq m(x)$, où $m(x)$ est une fonction qui décroît plus vite dans certaines directions que dans d'autres. Quelles propriétés de m assurent qu'une telle estimation soit héritée par la solution correspondante de (NS)? Des composantes de u peuvent-elles décroître plus rapidement que d'autres? Des éléments de réponse sont suggérés dans [B4]. Une notion utile dans ce contexte est celle de *poids de Peetre*. Les poids de Peetre sont des fonctions mesurables $m: \mathbb{R}^d \rightarrow [1, \infty[$ telles que $m(x+y) \leq Cm(x)m(y)$, avec $C > 0$ indépendante de $x, y \in \mathbb{R}^d$. L'intérêt de ces poids vient de ce qu'ils permettent d'obtenir facilement des estimations à poids pour la partie linéaire de l'équation.

Tous les résultats de la section 1.2 ont été obtenus dans le cadre de solutions appartenant à certains espaces L^∞ à poids, ce qui exclut notamment les solutions faibles à la Leray. On peut penser qu'une hypothèse sur u_0 d'appartenance à un certain espace L^2 à poids, ce qui traduit encore une propriété de localisation, puisse suffire pour obtenir des développements pour $|x| \rightarrow \infty$ de la forme (1.16), quitte à réexprimer les termes d'erreur par l'appartenance à d'autres espaces à poids. D'autre part, il est connu qu'en dimension trois les solutions de Leray deviennent fortes au bout d'un certain temps. Il est alors concevable que l'interprétation ponctuelle fournie par ces formules puisse être récupérée quand t est assez grand.

1.5.2 Écoulements dans les domaines extérieurs

Une partie des résultats présentés dans ce chapitre ont été étendus à des domaines autre que l'espace tout entier. Le cas du demi-espace a été traité par Y. Fujigaki et T. Miyakawa [90], où l'on établit l'analogie du théorème 2. C. He et T. Miyakawa [109, 110] ont considéré des questions proches à celles de la section 1.1.3 dans des domaines extérieurs : si le domaine et la donnée initiale vérifient des conditions de symétrie ils obtiennent des solutions qui décroissent pour $t \rightarrow \infty$ plus rapidement que dans le cas générique. Dans le cas 2D, ils calculent également le taux de décroissance en fonction du groupe de symétrie de la solution. Ils généralisent ainsi le théorème 3. Les résultats dans le cas du domaine extérieur en 3D sont moins complets. Voir cependant [111] pour la décroissance de normes L^p à poids des solutions. Les taux obtenus dans les majorations de He et Miyakawa [111] semblent optimaux, bien que l'on ne dispose pas de minoration correspondante pour le prouver.

Les résultats de la section 1.2 n'ont pas encore été étendus à d'autres domaines, à l'exception du cas le plus facile : celui du demi-espace avec des conditions au bord de Neumann. Ce cas se traite comme un corollaire de notre résultat dans l'espace tout entier. Dans le cas du domaine extérieur, la condition de non-symétrie (1.20) devrait être remplacée par la non-annulation de la résultante des forces extérieures exercées par le fluide sur l'obstacle :

$$\int T[u, p] \cdot n \neq 0,$$

où $T_{j,k}[u, p] = \partial_j u_k + \partial_k u_j - \delta_{j,k} p$ désigne le tenseur des déformations.

Une question soulevée et laissée ouverte dans [111], est la construction d'une solution telle que

$$u|_{t=0} \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad u \notin C([0, T], L^1(\Omega)) \quad \forall T > 0 \quad (1.30)$$

(avec Ω domaine extérieur). Bien entendu, on peut relier cette question à la recherche d'estimations ponctuelles comme (1.15) (avec un exposant d à la place de $d+1$). Ce problème de la non-intégrabilité générique des solutions remonte à un travail de Kozono [131], où le rôle du tenseur des déformations avait été mis en évidence.

1.5.3 Fluides incompressibles de densité variable

Dans un travail en cours avec M. Paicu on s'intéresse au problème de Navier–Stokes pour un fluide incompressible de densité variable. Il s'agit du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - 2 \operatorname{div}(\nu(\rho)\mathcal{M}) + \nabla p = \rho f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ (\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0). \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \times [0, T], \quad (1.31)$$

Ici $\nu(\rho) > 0$, $\mathcal{M} = \frac{1}{2}(\nabla u + {}^t\nabla u)$ et f est une force extérieure donnée. Pour simplifier la présentation du problème nous supposons ici $\nu(\rho) \equiv 1$ et la densité ρ proche d'une constante, que l'on peut choisir égale à 1. En outre, on se placera dans un cadre fonctionnel où la vitesse est $L_t^1(\text{Lip})$, ce qui simplifie fortement l'étude de l'équation de transport. À l'aide du changement d'inconnue $1+a = 1/\rho$, on obtient que a vérifie l'équation de transport classique : $\partial_t a + u \cdot \nabla a = 0$. L'équation pour u peut s'écrire sous forme intégrale :

$$u = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u)(s) ds + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(a\Delta u - a\nabla p + f)(s) ds.$$

Le système de Navier–Stokes classique correspond au cas $a \equiv 0$. La plupart des résultats que l'on a présentés dans les sections précédentes sont des problèmes ouverts pour le système de Navier–Stokes inhomogène.

Par exemple, considérons le cas $f \equiv 0$. Quelle est la localisation critique du champ de vitesse ? La pression vérifie le problème elliptique

$$\operatorname{div}((1+a)\nabla p) = \operatorname{div}(u\nabla u + a\Delta u) = g_1 + g_2.$$

Donc $p = p_1 + p_2$, avec $\operatorname{div}((1+a)\nabla p_i) = g_i$. On peut alors écrire, pour un certain noyau K , $\nabla p_2(x) = \int \nabla_x \partial_y K(x, y)(a\Delta u)(y) dy$. À cause des propriétés de K , on s'attend d'avoir au mieux $\nabla p_2 = O(|x|^{-3})$. Le taux $|x|^{-3}$ semble donc être optimal. On peut alors envisager la construction d'un profil asymptotique pour u , valable pour $|x| \rightarrow \infty$, de la forme $u(x, t) \simeq e^{t\Delta} u_0 + H(x) \cdot I(t)$, où $H(x)$ est une fonction homogène de degré -3 et $I(t)$ est une intégrale des non-linéarités. Ceci serait l'analogue pour le système (1.31) des résultats de la section 1.2. Le programme est ensuite d'étendre ces recherches au cas des fluides avec viscosité variable. Il y a alors un grand nombre de modèles qu'il serait intéressant d'explorer (fluides d'Oldroyd, modèles à densité éterogène fixe, etc.).

1.5.4 Le programme de Richard B. Pelz sur la recherche de singularités

La plupart des écoulements incompressibles, avec ou sans viscosité, qui ont été considérés comme des candidats pour d'éventuelles créations spontanées de singularités possèdent des

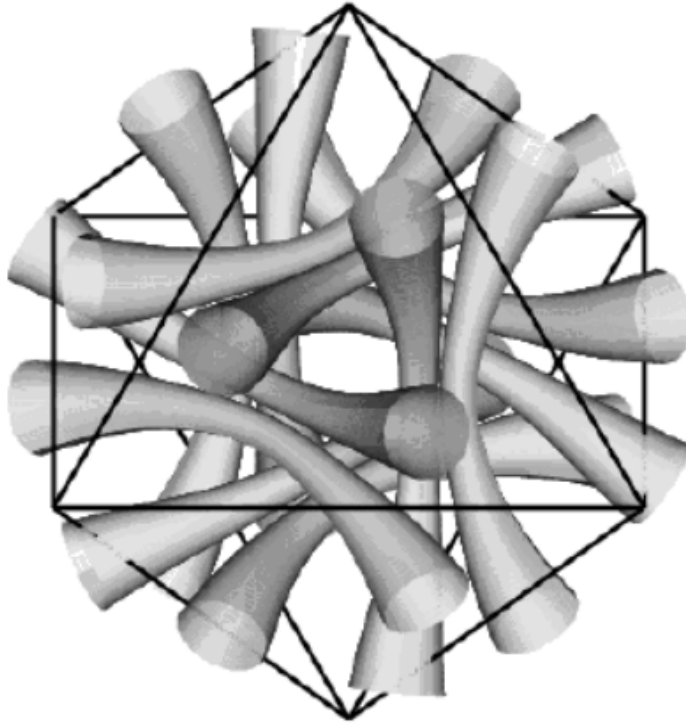


FIGURE 1.3 – Simulation numérique de R. B. Pelz d'un modèle simplifié d'un écoulement non visqueux (*vortex filament model*). En un temps fini, la distance à l'origine et le diamètre des tubes de vorticité tendent vers zéro. L'octaèdre illustre les symétries impos es à la solution.

symétries. La symétrie d'un écoulement est une contrainte qui oblige la solution à suivre des branches instables. Ainsi, il serait tout-à-fait concevable, de l'avis de certains spécialistes (on pourra consulter la bibliographie de [164]), que les écoulements non symétriques restent réguliers indéfiniment, alors que ceux qui sont soumis à des contraintes de symétrie développent des singularités pendant l'évolution.

Dans un écoulement turbulent, les tubes de vorticité soumis à un gradient de vitesse axial diminuent de diamètre ; ce mécanisme d'étirement des filaments de vorticité est lié à la conservation du moment cinétique. L'un des scénarios possibles relatif à la formation de singularités se réalise quand la section d'un tube de vorticité de circulation non nulle tend à zéro en un temps fini. Ce type de scenario a été exploré par R. B. Pelz et ses collaborateurs [164–166]. En particulier ses simulations sur un modèle simplifié (*the vortex filament model*, [163]) montrent que certains écoulements non visqueux, invariants sous l'action du groupe de symétrie de l'octaèdre, pourraient exploser en un temps fini t^* . La figure 1.3, emprunt e   [164], illustre cela : la distance des douze tubes de vorticité à l'origine et leur diamètre près de l'origine sont de l'ordre de $\sqrt{t^* - t}$.

Le lien avec nos travaux vient de ce que ces écoulements présentent des symétries semblables à celles  tudi es dans la section 1.1.3. Bien entendu, mise à part la question très controvers e de la possible parution de singularités, l'intérêt des symétries c'est de permettre des simulations numériques plus précises, par une réduction des degrés de liberté. Les premières simulations d'écoulements symétriques dans le tore remontent à S. Kida [127]. Voir aussi [60, 160], pour des contributions plus récentes.   ce propos, observons que la solution dans \mathbb{R}^3 que nous avons introduite dans [B3] (p. 704), nécessite seulement d'1/360 de la mémoire qu'il faudrait employer pour décrire un écoulement sans symétrie. En effet, l'évolution est complètement décrite par une seule des trois composantes (u_1, u_2, u_3) , dans un domaine pyramidal $\Omega \subset \mathbb{R}^3$; grâce aux symétries de l'icosaèdre, on reconstruit ensuite l'écoulement

dans \mathbb{R}^3 tout entier à l'aide de 120 réflexions successives.

Chapitre 2

Autres modèles en mécanique des fluides

2.1 Les équations de la magnéto-hydrodynamique

2.1.1 Introduction au modèle

Les équations de la magnéto-hydrodynamique sont un modèle bien connu de la physique des plasmas, décrivant les interactions existantes entre un champ magnétique et un fluide constitué de particules électriquement chargées. Un exemple typique d'application de ce modèle est la conception de *tokamaks* [121]. Le but de ces machines est d'emprisonner un plasma dans une région avec une densité et une température suffisamment grandes de manière à pouvoir entretenir des réactions thermonucléaires. On parvient à faire cela pendant un très court intervalle de temps en appliquant de champs magnétiques de grande intensité. Parmi les autres applications de la MHD nous pouvons mentionner aussi l'étude de la dynamique de la couronne solaire [169].

Les équations de la magnéto-hydrodynamique peuvent s'écrire sous leur forme adimensionnelle de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - S(B \cdot \nabla)B + \nabla \left(p + \frac{S}{2}|B|^2 \right) = \frac{1}{R_e} \Delta u \\ \frac{\partial B}{\partial t} + (u \cdot \nabla)B - (B \cdot \nabla)u = \frac{1}{R_m} \Delta B \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} B = 0 \\ u(0) = u_0 \quad \text{and} \quad B(0) = B_0. \end{cases} \quad (\text{MHD})$$

Ici les inconnues sont le champ de vitesse u du fluide, le champ magnétique B , que l'on suppose ici définis dans \mathbb{R}^d tout entier, $d \geq 2$ et la pression p du fluide. Les constantes positives R_e et R_m sont respectivement les nombres de Reynolds et le nombre de Reynolds magnétique; de plus, $S = M^2/(R_e R_m)$ où M est le nombre de Hartman. Après un changement d'échelle on peut supposer $S = R_e = 1$. Pour simplifier les notations on supposera aussi par la suite $R_m = 1$.

Dans le cas particulier $B \equiv 0$ le système (MHD) se réduit à celui de Navier–Stokes. Comme dans le cas de Navier–Stokes, ce système admet au moins une solution faible globale, mais l'unicité et la régularité de ces solutions sont des problèmes ouverts en dimension $d \geq 3$. Des résultats de régularité partiels, fournissant des bornes sur la dimension d'Hausdorff de l'éventuel ensemble singulier des solutions faibles ont été données par C. He et Z. Xin [113]. Ces auteurs ont également adapté à la MHD la théorie de Constantin et Fefferman [66]

reliant la régularité de l'écoulement aux directions de la vorticité. La construction de solutions autosimilaires progressives pour la MHD est achev e dans [114], en utilisant les méthodes d evvelopp ees pour les équations de Navier–Stokes par Giga et Miyakawa [105] et Cannone, Meyer et Planchon [49, 50, 55, 56]. La non-existence de solutions autosimilaires rétrogrades est établie dans [142] en appliquant les résultats d'unicité rétrograde d'Escauriaza, Seregin et ˆSver ak [82]. Le comportement pour $t \rightarrow \infty$ de l'énergie est bien compris : par exemple, Schonbek, Schonbek et S uli ont calculé le taux optimal de décroissance de la norme L^2 de u et B pour une vaste classe d'écoulements.

D'autre part, le comportement asymptotique des solutions en variable d'espace n'avait pas fait l'objet d'études approfondies. Motivés par les résultats décrits dans la section 1.1.1 et par l'étude de F. Vigneron [183] des équations de Navier–Stokes dans les espaces à poids, nous nous sommes proposés d'étudier de quelle manière la présence du champ magnétique affecte le comportement du fluide à de grandes distances.

2.1.2 Résultats principaux

[B6] L. Brandolese, F. Vigneron

Localization of the magnetic and the velocity field in the MHD equation
Proc. Edinb. Math Soc. **137 A**, 445–495 (2007).

Comment mesurer la décroissance ?

Dans le chapitre 1 nous avons mesuré la décroissance à l'infini des solutions de la manière la plus simple, à l'aide d'estimations ponctuelles de la forme $|u(x, t)| \leq C(1 + |x|)^{-\eta}$. Dans certains cas ce cadre est trop restrictif.

La notion de décroissance à l'infini au sens faible permet de répondre à cette objection : soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution. Le *taux de décroissance faible de f   l'infini* est par définition

$$\eta(f) = \sup \left\{ \eta \in \mathbb{R} : \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \text{supp } \varphi \subset \{1 < |x| < 2\} \Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{\eta-d} \langle f, \varphi(\cdot/R) \rangle = 0 \right\}. \quad (2.1)$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} f &\stackrel{\mathcal{D}'}{\sim} |x|^{-\eta}, & \text{si } \eta = \eta(f), \\ f &\stackrel{\mathcal{D}'}{=} O(|x|^{-\eta}), & \text{si } \eta \geq \eta(f) \end{aligned} \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty$$

L'intérêt de cette notion vient de ce que $f \stackrel{\mathcal{D}'}{=} O(|x|^{-\eta})$ implique $\partial^\alpha f(x) \stackrel{\mathcal{D}'}{=} O(|x|^{-\eta-|\alpha|})$ pour $|x| \rightarrow \infty$.

Nous avons déjà introduit les espaces L_θ^∞ . On définit plus en général les espace à poids L_θ^p , $1 \leq p < \infty$, $\theta \geq 0$ à l'aide de la norme

$$\|f\|_{L_\theta^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p (1 + |x|)^{\theta p} dx \right)^{1/p}. \quad (2.2)$$

Du point de vue de la localisation spatiale, deux espaces de type L_α^a et L_β^b doivent être considérés comme équivalents quand

$$a + d/\alpha = b + d/\beta.$$

En effet, si $f \in L_\alpha^a(\mathbb{R}^d)$, alors $f \stackrel{\mathcal{D}'}{=} O(|x|^{-(\alpha+d/a)})$.

Dans [183], F. Vigneron a étudié le problème de la persistance de la condition $u_0 \in L_\theta^p$ au cours de dévolution pour les équations de Navier–Stokes. Il démontre que si $1 \leq p < \infty$ et $\theta + d/p < d + 1$ alors cette condition est conservée (le résultat de persistance dans le cas $p = \infty$ est contenu dans le théorème 1). Cette restriction sur les paramètres est optimale parce que nos résultats dans [B1] impliquent la perte instantanée de l'appartenance à tout autre espace à poids.

Dans [B6] nous avons étudié le problème de la persistance de la condition $(u_0, B_0) \in L_{\theta_0}^{p_0} \times L_{\theta_1}^{p_1}$, pour les solutions de la MHD. L'extension à la MHD de ce résultat n'est pas immédiate à cause du couplage, comme les restrictions supplémentaires sur les paramètres en témoignent.

Théorème 10. *Soit $u_0 \in L_{\theta_0}^{p_0}(\mathbb{R}^d)$, $B_0 \in L_{\theta_1}^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ deux champs de vecteurs de divergence nulle dans \mathbb{R}^d ($d \geq 2$). En particulier alors, $u_0 \stackrel{\mathcal{D}'}{=} O(|x|^{-\eta_0})$ et $B_0 \stackrel{\mathcal{D}'}{=} O(|x|^{-\eta_1})$, avec*

$$\eta_0 = \theta_0 + d/p_0, \quad \text{et} \quad \eta_1 = \theta_1 + d/p_1.$$

1. *Supposons que*

$$d < p_0 \leq \infty, \quad \frac{2}{p_1} < \frac{1}{p_0} + \frac{1}{d}.$$

Alors il existe $T > 0$ (T peut être pris arbitrairement grand si $d = 2$) et une unique solution mild (u, B) de la MHD, dans $C([0, T], L^{p_0} \times L^{p_1})$.

Si de plus

$$\eta_0 \leq \min\left\{d + 1; 2\eta_1; 2\eta_1 + 1 - \frac{2d}{p_1}\right\}, \quad (2.3)$$

alors pour tout $t \in [0, T]$ nous avons, pour $x \rightarrow \infty$,

$$u(t) \stackrel{\mathcal{D}'}{=} O(|x|^{-\eta_0}) \quad \text{et} \quad B(t) \stackrel{\mathcal{D}'}{=} O(|x|^{-\eta_1}). \quad (2.4)$$

2. *En outre, si la condition (2.3) est remplacée par la condition plus contraignante*

$$\eta_0 < \min\left\{d + 1; 2\eta_1; 2\eta_1 + \frac{d}{p_0} - \frac{2d}{p_1}\right\}, \quad (2.5)$$

(on admet aussi les cas limites $\eta_0 = d + 1$ si $p_0 = \infty$ et $\eta_0 = 2\eta_1$ si $\theta_0 = 2\theta_1$) alors a plus précisément :

$$(u, B) \in C([0, T], L_{\theta_0}^{p_0} \times L_{\theta_1}^{p_1}).$$

3. *De plus, si u_0 (resp. B_0) appartient simultanément à un autre espace $L_{\theta_0}^{\tilde{p}_0}$ (resp., $L_{\theta_1}^{\tilde{p}_1}$, et les paramètres correspondants vérifient des conditions comme dans (2.5), alors le temps de vie de la solution construite dans les deux espaces à poids est le même, et ces deux solutions coïncident.*

L'énoncé donné dans [B6] est un peu plus général que celui du théorème 10, mais il est aussi plus technique. Ce théorème renforce mathématiquement quelques faits que l'on observe dans les applications. On peut notamment en tirer trois conclusions :

- Toute hypothèse de localisation spatiale du champ magnétique sera conservée par le flot. Cela est dû à ce qu'il n'y a aucune restriction sur η_1 , qui peut être choisi arbitrairement grand.
- Pour des champs magnétiques suffisamment localisés (η_1 grand), le comportement spatial de u n'est pas affecté par B , mais il est déterminé par les lois de l'hydrodynamique : la seule restriction est dans ce cas $\eta_0 < d + 1$ (ou $\eta_0 \leq d + 1$ si $p_0 = \infty$). Il s'agit là de la même restriction que l'on rencontre pour les équations de Navier–Stokes.

- Pour des champs magnétiques mal localisés (η_1 petit) le couplage de deux équations est plus fort et affecte le comportement pour $|x| \rightarrow \infty$ de la vitesse. Alors, selon les cas, le champ magnétique peut (a) soit détruire complètement la localisation de u_0 , (b) soit conserver l'information sur la décroissance de u_0 , mais seulement au sens faible (conclusion (ii) du théorème), (c) soit conserver toute information sur la localisation de la vitesse (conclusion (iii) du théorème).

La démonstration du théorème 10 repose sur l'application du théorème de point fixe dans une boule de l'espace $C([0, T], L_{\theta_0}^{p_0} \times L_{\theta_1}^{p_1})$. La difficulté principale est la bicontinuité de l'opérateur bilinéaire qui apparaît dans la formulation intégrale de la MHD.

Pour des valeurs petites de η_0 la démonstration serait une application élémentaire des inégalités de Hölder et de Young à poids. Cependant, ces inégalités classiques ne peuvent être appliquées quand η_0 avoisine les valeurs maximales autorisées par (2.3) et (2.5); en effet, le noyau $F(x, t)$ de l'opérateur $e^{t\Delta}\mathbb{P}\operatorname{div}$ décroît trop lentement à l'infini et conduirait à des intégrales en temps divergentes dans la formule de Duhamel.

Nous sommes alors amenés à appliquer des inégalités de la forme

$$\|f_1 * f_2\|_{L_{\theta}^p} \leq C \|f_1\|_{L_{\alpha}^a} \|f_2\|_{L_{\beta}^b}, \quad (2.6)$$

mais avec des exposants p plus petits que l'exposant de Young $1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. C'est pourquoi les inégalités qu'on applique ne semblent pas être classiques. Prendre de tels exposant p revient à sacrifier de l'information sur la régularité, afin de garder autant que possible toute information sur la localisation du produit de convolution. Cette démarche permet d'atteindre la valeur maximale pour $\theta + d/p$, à savoir :

$$\theta + \frac{d}{p} \leq \min \left\{ \alpha + \frac{d}{p}; \beta + \frac{d}{b}; \left(\alpha + \frac{d}{a} \right) + \left(\beta + \frac{d}{b} \right) - d \right\}.$$

Peu de temps après la parution de notre article [B4], A. Biswas et D. Swanson [22] ont obtenu une inégalité très générale qui permettrait d'étendre nos résultats à des poids plus généraux que ceux de type puissance.

2.2 Le système de Boussinesq

2.2.1 Introduction au modèle

Dans cette section nous considérons le problème du transfert de la chaleur dans un fluide incompressible. En accord avec l'approximation de Boussinesq nous allons négliger les variations de la densité dans l'équation de continuité (la première équation dans (1.31)) et les effets de réchauffement liés à la dissipation visqueuse. On prendra cependant en compte les variations de la température en ajoutant un terme de force qui agit verticalement dans l'équation du mouvement du fluide. Cela nous conduit au problème de Cauchy pour les équations de Boussinesq :

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta = \kappa \Delta \theta \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \nu \Delta u + \beta \theta e_3 \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \theta|_{t=0} = \theta_0. \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{B})$$

Ici $u: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le champ de vitesse, p est la pression et $\theta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est la température. De plus $e_3 = (0, 0, 1)$ et $\beta \in \mathbb{R}$ est une constante physique. Pour les questions de comportement asymptotique que nous allons considérer il est important de supposer que les deux coefficients de viscosité ν et κ soient strictement positifs.

Le système de Navier–Stokes est un cas particulier de (B) obtenu en prenant $\theta \equiv 0$. On sait démontrer l’existence de solutions faibles pour (B), ou des solutions fortes à données petites. Bien entendu, en dimension trois on ne sait pas si les solutions faibles sont uniques. Ces résultats, qui sont assez classiques dans le cas doublement visqueux que l’on considère ici (voir par exemple Cannon et DiBenedetto [48]), ont été étendu plus récemment au cas partiellement visqueux ($\nu = 0$ ou $\kappa = 0$). On pourra consulter à ce propos les travaux d’Abidi et Hmidi [1] et D. Chae [61] et ceux de Danchin et Paicu [71–73]. La régularité des solutions a été l’objet de plusieurs travaux très récents, voir par exemple [2, 67, 85, 117].

Des travaux sur le comportement pour $t \rightarrow \infty$ sont dus à Karch et Prioux [122] et Prioux [170]. Ces deux articles concernent la construction de solutions autosimilaires et la stabilité des solutions dans les espaces critiques (en rapport au changement d’échelle). Comme nous le verrons plus loin, nos résultats principaux sont parfaitement complémentaires, parce qu’ils impliquent l’*instabilité* des solutions de (B) dans les espaces sous-critiques (comme par exemple les espaces $L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p < 3$ pour le champ de vitesse).

2.2.2 Résultats principaux

Tous les résultats de cette section sont relatifs au cas de la dimension trois d’espace. Une simple estimation d’énergie sur le système (B) montre que les solutions faibles émanant d’une donnée initiale $(\theta_0, u_0) \in L^2 \times L^2_{\sigma}$ vérifient les estimations

$$\|\theta(t)\|_2 \leq \|\theta_0\|_2 \quad \text{et} \quad \|u(t)\|_2 \leq C(1+t)^{1/2}$$

(ici L^2_{σ} désigne l’espace des champs de vecteurs L^2 de divergence nulle). Voir par exemple [48, 71]. En supposant un peu plus sur la température initiale on peut facilement améliorer ces estimations : par exemple, lorsque $\theta_0 \in L^1 \cap L^2$, on construit une solution faible telle que

$$\|\theta(t)\|_2 \leq C(1+t)^{-3/4} \quad \text{et} \quad \|u(t)\|_2 \leq C(1+t)^{1/4}. \quad (2.7)$$

L’estimation ci-dessus sur la température semble optimale, parce qu’elle coïncide avec celle de la partie linéaire de l’équation. En revanche, l’optimalité de la borne pour la vitesse dans (2.7), a priori, n’est pas claire. Par exemple, dans le cas particulier $\theta_0 = 0$ le système se réduit à Navier–Stokes et alors l’on sait que dans ce cas $\|u(t)\|_2 \rightarrow 0$. On a même vu dans la section 1.1.2 que l’on peut aussi prescrire des taux de décroissance explicites pour $t \rightarrow \infty$ à la norme L^2 du champ de vitesse.

En outre, d’un point de vue physique, le fait que l’énergie cinétique puisse augmenter indéfiniment serait surprenant. Le fait que ceci soit contre-intuitif est aussi témoigné par un théorème de B. Guo et G. Yuan [107] : leur conclusion est que les solutions faibles de (B) vérifient $\|u(t)\|_2 \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$. Malheureusement, leur démonstration contient une erreur (dans les inégalités (5.6)–(5.8) de [107]).

Le but principal de notre article avec M. Schonbek [B7] était de démontrer qu’on a bien $\|u(t)\|_2 \rightarrow \infty$ pour une vaste classe de solutions ! Pour cela, nous avons établi la minoration correspondante à (2.7) pour des solutions fortes :

$$c(1+t)^{1/4} \leq \|u(t)\|_2 \leq C(1+t)^{1/4}, \quad t \gg 1. \quad (2.8)$$

En particulier, des données initiales régulières, bien décroissantes (et de norme petite dans des espaces invariants) donnent naissance à des solutions qui deviennent grandes dans L^2 , pour $t \rightarrow \infty$. La validité de l’inégalité par dessous (la condition $c > 0$) est assurée dès que $\int \theta_0 \neq 0$.

Notre résultat ainsi montrerait les limitations physiques de l’approximation de Boussinesq dans l’étude des transferts de la chaleur dans les fluides. Il justifie alors l’introduction et l’étude

de modèles alternatifs de convection (voir, par exemple, celui proposé par E. Feireisl [87]). Quand le problème est posé dans un domaine où l'on ne dispose pas de l'inégalité de Poincaré (l'espace tout entier, les domaines extérieurs, les domaines à ouvertures, etc.), l'approximation de Boussinesq, bien que classique, ne semble pertinente que dans de petits intervalles de temps.

Notre résultat sur les solutions faibles est le suivant :

Théorème 11. (a) Soit $(\theta_0, u_0) \in (L^1 \cap L^2) \times L^2_\sigma$. Il existe alors une solution faible (θ, u) du système (B) telle que

$$\|\theta(t)\|_2^2 \leq C(t+1)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \|u(t)\|_2^2 \leq C(t+1)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$

Si de plus $\theta_0 \in L^1 \cap L^p$, pour $1 \leq p < \infty$, alors

$$\|\theta(t)\|_p \leq C(p)(t+1)^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}.$$

(b) (Le cas $\int \theta_0 = 0$). Supposons maintenant $\theta_0 \in L^1_1$ et $\int \theta_0 = 0$. Il existe une constante absolue $\varepsilon_0 > 0$ telle que si $\|\theta_0\|_1 < \varepsilon_0$, alors on a, plus précisément,

$$\|\theta(t)\|_2^2 \leq C(1+t)^{-\frac{5}{2}} \quad \text{et} \quad \|u(t)\|_2^2 \rightarrow 0 \quad \text{pour } t \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Sous la condition supplémentaire $u_0 \in L^{3/2} \cap L^2_\sigma$, on a

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C(1+t)^{-1/2}. \quad (2.11)$$

La démonstration de la première partie de ce théorème est une application assez standard de techniques de solutions faibles. La partie (b) repose sur un argument inductif : on suppose qu'à l'étape $n-1$ le champ de vitesse approché u^{n-1} croît au plus comme $C(1+t)^{1/8}$ en norme L^2 (ce qui est mieux de qu'on sait faire) et on en déduit que la même estimation reste vraie pour u^n . L'hypothèse $\|\theta_0\|_1 \leq \varepsilon$ garantit que la constante C est indépendante de n . Grâce à ce renseignement supplémentaire sur la vitesse, à une application de la méthode *Fourier-Splitting* [176], et à quelques arguments de *boot-strap*, on parvient aux estimations annoncées. Il est raisonnable de penser que l'on puisse démontrer la partie (b) de ce théorème en se passant de la condition $\|\theta_0\|_1 \leq \varepsilon_0$, mais nous n'avons pas réussi à le faire.

Concernant les solutions fortes pour le système de Boussinesq, nous commençons par l'établir dans [B7] des estimations ponctuelles en espace-temps. Ces estimations sont essentiellement l'analogue de celles du théorème 1, relatives au système de Navier-Stokes. On observe cependant une différence essentielle avec (1.4) : pour les solutions de (B) nous parvenons à démontrer que

$$|u(x, t)| \leq C \inf_{0 \leq \eta \leq 3/2} |x|^{-\eta} (1+t)^{(\eta-1)/2}, \quad (2.12)$$

et en général on n'a pas mieux (sauf si l'on impose $\int \theta_0 = 0$). On constate donc une explosion des constantes pour $t \rightarrow \infty$ dès que l'on cherche à propager une décroissance meilleure que $|x|^{-1}$ pour $|x| \rightarrow \infty$.

Une fois que l'on dispose de cette estimation, on peut décrire précisément le comportement des solutions dans la région parabolique $|x| \gg \sqrt{t}$, par des techniques semblables à celles utilisées dans la section 1.2. On démontre alors que si $u_0(x)$ et $\theta_0(x)$ sont suffisamment décroissantes et vérifient une condition de petitesse de la forme

$$\text{ess sup } |x| |u_0(x)| + \text{ess sup } |x|^3 |\theta_0(x)| + \|\theta_0\|_1 < \varepsilon, \quad (2.13)$$

(ces trois quantités sont invariantes par changement d'échelle) alors on a, pour $j = 1, 2, 3$ et $|x| \gg \sqrt{t}$,

$$u_j(x, t) \simeq \left(\int \theta_0 \right) t (E_{x_j, x_3})(x) - \nabla E_{x_j, x_3}(x) \cdot \left(\int_0^t \int y \theta(y, \cdot) dy ds \right). \quad (2.14)$$

Rappelons que $E(x) = c|x|^{-1}$ est la solution fondamentale du Laplacien dans \mathbb{R}^3 .

Il est intéressant d'observer le comportement différent quand $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$ et $|x_3| \rightarrow \infty$, qui est dû à la verticalité de la force engendrée par les échanges de chaleur : la décroissance à l'infini de u_3 est beaucoup plus rapide dans le premier cas.

Grâce à ce profil asymptotique, on parvient à des estimations précises pour $t \rightarrow \infty$ de toutes les normes L^p et des normes à poids $\|\cdot\|_{L_r^p}$ définies dans (2.2). En particulier, on constate que lorsque la température est de moyenne non nulle, alors $\|u(t)\|_p \rightarrow \infty$ si et seulement si $1 \leq p < 3$:

Théorème 12.

- (a) Soit (u, θ) la solution mild de (B) associée à une donnée initiale (θ_0, u_0) vérifiant la condition (2.13) avec $\epsilon > 0$ assez petit et telle que $|u_0(x)| \leq C(1 + |x|)^{-a}$ et $|\theta_0(x)| \leq C(1 + |x|)^{-b}$, avec $a > \frac{3}{2}$, $b > 3$. Alors, pour tout r, p tels que

$$r \geq 0, \quad 1 < p < \infty, \quad r + \frac{3}{p} < \min\{a, 3\},$$

et t pour assez grand, on a les estimations

$$\phi(|m_0|) (1+t)^{\frac{1}{2}(r+\frac{3}{p}-1)} \leq \|u(t)\|_{L_r^p} \leq C'(1+t)^{\frac{1}{2}(r+\frac{3}{p}-1)}. \quad (2.15)$$

Ici, $m_0 = \int \theta_0$ et $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(\sigma) > 0$ si $\sigma > 0$.

- (b) (Le cas $\int \theta_0 = 0$). Sous les hypothèses précédentes, avec cette fois-ci $a > 2$, $b > 4$ et la condition supplémentaire $m_0 = 0$, posons $\tilde{m} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left| \int_0^t \int y \theta(y, s) dy ds \right|$. Alors pour tout r, p tels que

$$r \geq 0, \quad 1 \leq p < \infty, \quad r + \frac{3}{p} < \min\{a, 4\},$$

on a

$$\tilde{\phi}(\tilde{m}) (1+t)^{\frac{1}{2}(r+\frac{3}{p}-2)} \leq \|u(t)\|_{L_r^p} \leq C'(1+t)^{\frac{1}{2}(r+\frac{3}{p}-2)}, \quad (2.16)$$

pour une autre fonction continue $\tilde{\phi}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{\phi}(0) = 0$ et $\tilde{\phi}(\sigma) > 0$ pour $\sigma > 0$.

2.3 Décomposition atomique d'un écoulement

[B8] L. Brandolese,

Atomic decomposition for the vorticity of a viscous flow in the whole space,
Math. Nachr, **273**, 28-42 (2004).

Nous avons déjà eu l'occasion de rencontrer, dans la section 1.1.3 et dans la section 1.4 le tourbillon (ou vorticité) ω d'un écoulement. En dimension $d = 3$, si $u = (u_1, u_2, u_3)$ est le champ de vitesse d'un fluide, ω est le champ de vecteurs de divergence nulle

$$\omega = \nabla \times u = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, -\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1).$$

Lorsqu'on connaît ω on peut généralement reconstruire le champ de vitesse sous de faibles hypothèses : dans le cas de l'espace tout entier cela se fait grâce à l'intégrale de Biot et Savart :

$$u(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{x-y}{|x-y|^3} \times \omega(y, t) dy \quad (x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0). \quad (\text{BS})$$

En prenant $\nabla \times \cdot$ dans l'équation de Navier–Stokes on obtient l'équation satisfaite par ω . On est ainsi amené à étudier le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t \omega - \Delta \omega + \sum_{h=1}^3 \partial_h (u_h \omega - \omega_h u) = 0, \\ \operatorname{div} \omega = 0, \\ \omega(x, 0) = \omega_0(x), \end{cases} \quad (2.17)$$

où $\omega_0 = (\omega_{0,1}, \omega_{0,2}, \omega_{0,3})$ est la vorticité initiale et u est donn  e par (BS).

Même si les systèmes (NS) et (2.17) sont formellement équivalents, quand on veut mettre en évidence certaines caractéristiques remarquables des écoulements (les structures cohérentes de la vorticité par exemple) il est souvent plus aisé d'étudier directement le deuxième système.

Nous renvoyons aux travaux de Y. Giga et T. Miyakawa [105] ou de T. Kato [125] pour l'étude du caractère bien posé de (2.17) sous des hypothèses très générales.

Dans notre article [B8] nous étudions les propriétés de localisation spatiale du tourbillon. Ces propriétés sont facilement observables dans les écoulements réels et ont fait l'objet d'études mathématiques par plusieurs auteurs [69, 98, 149, 182].

Cependant, notre approche sera différente : elle consiste à résoudre le système (2.17) dans *des espaces de fonctions qui dépendent de la donn  e initiale*. Le résultat principal de [B8] affirme que si la vorticité initiale est localis  e autour d'une séquence donn  e $(x_k)_1^\infty \subset \mathbb{R}^3$, avec des taux de localisation respectifs $\theta(k) \geq 1$ ($k = 1, 2, \dots$), alors la solution correspondante $\omega(x, t)$ du système (2.17) conserve cette propriété, au moins localement en temps.

Pour simplicité nous mesurons ici la localisation dans des espaces L^∞ à poids, bien que l'on pourrait généraliser aux espaces de type L^∞_α introduits dans la section 2.1. On établit que le tourbillon admet une décomposition atomique de la forme

$$\omega(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(x - x_k, t), \quad t \in [0, T],$$

dans laquelle chaque ‘‘brique de base’’ $\omega_k(x, t)$ est born  e et décroissante à l'infini au moins aussi vite que $|x|^{-\theta(k)}$ pour $|x| \rightarrow \infty$. De plus ces briques de bases sont oscillantes (c'est-à-dire, $\int \omega_k(x, t) dx = 0$ pour tout k et $t \in [0, T]$) si une telle propriété est satisfaite à l'instant initial. Ces propriétés sont spécifiques au tourbillon, et ne sauraient être v  rifi  es par le champ de vitesse, à cause des phénomènes de perte de localisation pour u que l'on a mis en évidence dans le premier chapitre.

En vue d'un énoncé plus précis, rappelons que l'on a noté, pour $\theta \geq 0$,

$$\|f\|_{L^\infty_\theta} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)^\theta |f(x)|.$$

Dans le cas $\theta = 1$, il convient de considérer un espace un peu plus petit, que l'on définit à l'aide d'une correction logarithmique,

$$\|f\|_{L^\infty_1} = \operatorname{ess\,sup}_{|x| < 1} |f(x)| + \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \operatorname{ess\,sup}_{2^j \leq |x| < 2^{j+1}} |f(x)|.$$

Observons que $L^\infty_\theta \subset L^\infty_{1'} \subset L^\infty_1$ pour tout $\theta > 1$. L'intérêt de cet espace vient de ce que si $\omega \in L^\infty_{1'}$ alors $u \in L^\infty$.

Il convient d'introduire aussi la notion suivante :

Définition 1. Soit $(x_k) \subset \mathbb{R}^3$ et $\theta(k)$, $k = 1, 2, \dots$ une suite de réels non négatifs. On dit que f est *localis  e autour de la suite (x_k) d'ordre $\theta(k)$* ($k = 1, 2, \dots$) si pour tout k il existe $f_k \in L^\infty_{\theta(k)}$ tel que $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x - x_k)$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L^\infty_{\theta(k)}}$ est finie. Pour tout k tel que

$\theta_k = 1$ on demande plus précisément $f_k \in L_{1'}^\infty$, et la norme de L_1^∞ est remplacée par la norme de $L_{1'}^\infty$. Dans ce cas on écrit $f \in X[x_k, \theta(k)]$.

Cet espace est normé par

$$\|f\|_{X[x_k, \theta(k)]} = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_{\theta(k)}^\infty} \right\} \quad (2.18)$$

(modification si $\theta(k) = 1$), où l'infimum est pris sur toutes les décompositions admissibles de f .

On dit que f est *localisée et oscillante autour de (x_k) d'ordre $\theta(k)$* si de plus dans la décomposition ci-dessus de f l'on a $\int f_k(x) dx = 0$ pour tout k tel que $\gamma(k) > 3$. Le sous espace de $X[x_k, \theta(k)]$ des fonctions localisées et oscillantes est noté $X_0[x_k, \theta(k)]$. Il est muni de la norme définie comme dans (2.18) où l'infimum est pris maintenant sur les décompositions telles que f_k est de moyenne nulle quand $\theta(k) > 3$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de [B8] :

- Théorème 13.**
1. Soit $(x_k)_1^\infty \subset \mathbb{R}^3$ une suite de \mathbb{R}^3 et ω_0 un champ de vecteurs de divergence nulle localisé autour de (x_k) uniformément d'ordre 1, c'est-à-dire $\omega_0 \in X[x_k, \mathbf{1}]$, où $\mathbf{1}$ est la suite constante $\theta(k) = 1$ ($k = 1, 2, \dots$). Alors il existe $T > 0$ et une unique solution mild $\omega \in C_w([0, T], X[x_k, \mathbf{1}])$ de (2.17)-(BS). De plus, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$.
 2. Soit $\theta(k)$ une suite telle que $1 \leq \theta(k) \leq \Theta$ pour tout entier positif k et un réel $\Theta \geq 1$. On suppose maintenant que ω_0 est localisée autour de la suite (x_k) d'ordre $\theta(k)$ ($k = 1, 2, \dots$). Alors, on a la conclusion plus précise $\omega \in C_w([0, T], X[x_k, \theta(k)])$.
 3. Si de plus ω_0 est localisée et oscillante autour de la suite (x_k) d'ordre $\theta(k)$, alors $\omega \in C_w([0, T], X_0[x_k, \theta(k)])$.

Comme corollaire de ce théorème on obtient des renseignements sur le champ de vitesse. Sous les hypothèses de la partie 2, u se décompose comme ceci : il existe une suite de champs de vecteurs de divergence nulle $u_k(x, t)$ tels que pour une constante $C > 0$, indépendante de t :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x - x_k, t),$$

avec $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k(t)\|_\infty \leq C$. De plus, pour tout k , $u_k(t)$ est localisé autour de x_k au sens suivant : uniformément dans $[0, T]$ on a

$$\begin{aligned} u_k(t) &\in L_{\theta(k)-1}^\infty && \text{si } 1 \leq \theta(k) < 3 \text{ et } \theta(k) \neq 2, 3, \\ u_k(t) &\in L_2^\infty && \text{si } \theta(k) > 3. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses de la partie 3 du théorème, ces conclusions peuvent être améliorées :

$$\begin{aligned} u_k(t) &\in L_{\theta(k)-1}^\infty && \text{si } 3 < \theta(k) < 4, \\ u_k(t) &\in L_3^\infty && \text{si } \theta(k) > 4. \end{aligned}$$

(Pour $\theta = 2, 3, 4$ des corrections logarithmiques sont à prendre en compte).

Ce théorème n'est qu'une première étape d'un programme bien plus vaste, relatif à la compréhension de l'évolution des structures cohérentes de la vorticité dans un écoulement. Des nombreuses généralisations ou extensions peuvent être prises en compte. On peut envisager par exemple une version globale en temps du théorème 13, au moins pour des données petites, dans laquelle les centres des atomes x_k ne seraient plus fixés, mais suivraient le flot. D'autres phénomènes de localisation de la vorticité observés expérimentalement sont aussi intéressants à étudier (filaments de vorticité, nappes de tourbillons, etc.).

2.4 Développements et perspectives

2.4.1 Préambule : les espaces de Besov

Commençons par rappeler brièvement la décomposition de Littlewood–Paley et la définition des espaces de Besov homogènes. Voir, par exemple, [89, 146] pour plus de détails sur ces espaces. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{\psi} \geq 0$, avec $\widehat{\psi}$ portée par la couronne $\{\xi \in \mathbb{R}^d : \frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}\}$. On suppose aussi que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi) = 1$ pour tout $\xi \neq 0$, où $\widehat{\psi}_j = \widehat{\psi}(\cdot 2^{-j})$. Ceci conduit à décomposer une distribution tempérée u en blocs dyadiques : $\widehat{u} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j \widehat{u}$, ou, en prenant la transformée inverse de Fourier,

$$u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j u. \quad (2.19)$$

Ici, Δ_j est un opérateur de localisation en fréquence de taille 2^j : $\Delta_j u = \psi_j * u$. En général, la convergence de la série dans (2.19) a un sens seulement dans l'espace des distributions tempérées modulo les polynômes. Pour $s \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq \infty$ et $0 < q \leq \infty$, on définit la (quasi)-norme homogène de Besov

$$\begin{aligned} \|u\|_{\dot{B}_p^{s,q}} &= \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{sj} \|\Delta_j u\|_p)^q \right)^{1/q}, & \text{si } 0 < q < \infty \text{ et} \\ \|u\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} &= \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{sj} \|\Delta_j u\|_p. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dans [89] les espaces $\dot{B}_p^{s,q}$ sont définis comme des espaces de classes d'équivalence de distributions tempérées modulo polynômes. Nous adoptons une définition un peu différente qui nous permet de traiter les éléments de $\dot{B}_p^{s,q}$ comme des 'vraies distributions', au moins pour certaines valeurs des paramètres : introduisons d'abord l'entier $m = -[d/p - s]$ (si $q > 1$) et $m = -[d/p - s + 1]$ (si $0 < q \leq 1$).

Si $m < 0$ on définit

$$\dot{B}_p^{s,q} = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{\dot{B}_p^{s,q}} < \infty, \text{ et } u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j u \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Si $m \geq 0$, on note $\mathcal{P}_m[\mathbb{R}^d]$ l'espace des polynômes de degré au plus m . Dans ce cas, notre définition de $\dot{B}_p^{s,q}$ est la même, à ceci près que les éléments de $\dot{B}_p^{s,q}$ sont des classes d'équivalence de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)/\mathcal{P}_m[\mathbb{R}^d]$, et que la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j u$ est supposée converger vers u dans cet espace quotient.

Ainsi, par exemple, l'espace $\dot{B}_p^{d/p,p}$, dont il sera question dans la section 6.1, s'injecte dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ pour $0 < p \leq 1$. Pour $p > 1$, il s'agit d'un espace de distributions modulo les constantes.

2.4.2 Sur le système de Boussinesq

Les espaces de Besov sont bien adaptés à l'étude du semi-groupe de la chaleur et des équations paraboliques. Leur utilisation judicieuse conduit souvent à des résultats plus fins, et plus généraux, pour des équations, que ceux que l'on obtiendrait dans le cadre des espaces de Sobolev.

Pour le système de Boussinesq (B), il serait intéressant de savoir si l'on peut remplacer les hypothèses $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ et $\|\theta_0\|_1 < \varepsilon_0$ par des conditions sur la norme de Besov $\dot{B}_2^{-3/2,\infty}$. La condition $\int \theta_0 = 0$, qui joue un rôle central dans la section 11, serait alors remplacée par l'appartenance à $\dot{B}_2^{-\alpha,\infty}$, avec $\alpha > \frac{3}{2}$, dans le cas de températures initiales non intégrables.

Des températures initiales grandes en taille, mais partout oscillantes auraient une norme de Besov petite, ce qui permettrait d'élargir considérablement le champ d'application du théorème 11. Un programme semblable, pour les équations de Navier–Stokes, avait été mené à bien par M. Cannone [49, 50]. Mais ici les espaces de Besov permettraient de faire plus : par exemple, de contrôler exactement la croissance de l'énergie pour $t \rightarrow \infty$: pour des vitesses initiales $u_0 \in L^2$, on peut conjecturer une croissance algébrique pour $\|u(t)\|_2$, quand $\theta_0 \in \dot{B}_2^{-\alpha, \infty}$, si $\alpha < 2$ et logarithmique si $\alpha = 2$. L'hypothèse plus forte $\theta_0 \in \dot{B}_1^{-2,1}$ conduirait, en revanche, à des solutions uniformément bornées en norme L^2 . Ce programme nécessite d'obtenir de nouvelles estimations dans des espaces de régularité négative pour l'équation de transport (ou l'équation de transport-diffusion), qui seraient intéressantes en elles-mêmes.

Il semble raisonnable de penser que le phénomène de croissance de l'énergie subsiste si, dans le système de Boussinesq on ne met pas de viscosité sur l'équation de la température ($\kappa = 0$ dans (B)). Les constantes dans les estimations de [B7] généralement explosent pour $\kappa \rightarrow 0$. Des techniques différentes semblent être alors nécessaires pour traiter ce cas.

En outre, si dans l'étude mathématique des équations de Navier–Stokes il est pertinent de considérer l'espace tout entier comme domaine de l'écoulement (au moins tant que l'on n'a pas une compréhension satisfaisante du modèle), dans le cas du système de Boussinesq ce choix est plus discutable : une situation plus proche de la réalité serait celle d'un fluide emplissant une bande $\mathbb{R}^2 \times]0, h[$, d'hauteur finie. La validité de l'inégalité de Poincaré pour ce type de domaines change profondément le comportement asymptotique du fluide.

2.4.3 L'équation de Camassa–Holm

Le programme ci-dessous nous a été inspiré par un exposé de G. Misiolek de son travail avec A. Himonas, G. Ponce et Y. Zhou [116].

Dans une collaboration en cours avec Yong Zhou (Zhejiang Normal University) nous étudions l'équation de Camassa–Holm, qui est un modèle pour la propagation d'ondes unidirectionnelles en eaux peu profondes. Le problème de Cauchy s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{txx}^3 u + 3u\partial_x u = 2\partial_x u \partial_{xx}^2 u + u\partial_{xxx}^3 u & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0}(x) = u_0(x), \end{cases} \quad (\text{CH})$$

Le problème de Cauchy est localement bien posé dans l'espace de Sobolev H^s , $s > \frac{3}{2}$, ou dans d'autres espace de fonctions lipshitziennes, comme l'espace de Besov $B_2^{3/2,1}$ (voir l'article de R. Danchin [70]) ou celui introduit par De Lellis, Kappeler et Topalov [75].

Contrairement à ce qui se passe pour les équations étudiées jusqu'ici, aucune condition de petitesse n'est en mesure de garantir l'existence globale des solutions fortes. En effet, des données initiales arbitrairement petites peuvent donner lieu à des solutions qui, tout en restant bornées, deviennent singulières, au sens que $\|\partial_x u\|_\infty$ explose en un temps fini. En revanche, l'existence globale peut être assurée à l'aide d'une condition de signe sur le potentiel $u_0 - \partial_{xx}^2 u_0$. Un autre trait caractéristique de (CH) est l'existence de solitons. Ceux-ci sont les solutions de la forme $u = ce^{|x-ct|}$, $t > 0$.

Une formulation équivalente de l'équation de Camassa–Holm est

$$\partial_t u + u\partial_x u + \partial_x \widehat{P} * \left(u^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 \right) = 0, \quad (2.21)$$

où $\widehat{P}(x) = e^{-|x|}$. Cette formulation met en évidence le caractère non locale de (CH). Il est donc naturel de penser que des conditions de localisation comme

$$mu_0 \in L^\infty, \quad m\partial_x u_0(x) \in L^\infty,$$

puissent être conservées, moyennant des conditions raisonnables sur le poids $m(x)$ (impliquant en particulier $m(x) = O(e^{|x|})$ pour $|x| \rightarrow \infty$). Ici l'hypothèse de localisation de la dérivée semble indispensable, compte tenu de l'absence du terme de régularisation visqueuse. Ce résultat serait à compléter par l'étude des solutions initialement localisées mais oscillantes, pour lesquelles on s'attend à une perte brutale de la localisation. Nous nous attendons à ce que les solutions émanant d'une donnée initiale $o(e^{-|x|})$ pour $|x| \rightarrow \infty$ explosent nécessairement en temps fini, au sens que $\int_0^{T^*} \|\partial_x u(t)\|_\infty dt = \infty$. Un résultat de ce type renforcerait la conclusion de [116] : elle nous dirait notamment qu'il n'y a pas de solution forte globale mieux localisée que les solitons.

On connaît aussi l'existence de solutions faibles pour le problème (CH). Mais la théorie des ces solutions est, pour l'instant, assez mal comprise et mérite sans doute d'être approfondie.

Des questions semblables peuvent être posées pour une classe plus générale d'équations dispersives, comprenant d'autres modèles de propagation des ondes.

2.4.4 Microlocalisation du tourbillon

Ce programme de recherche a été proposé par J.-Y. Chemin, comme suite naturelle de nos résultats sur la persistance de la localisation pour le tourbillon, dont le théorème de stabilité des décompositions atomiques (voir la section 2.3) de la vortacité en fait partie. *Est-ce qu'une information supplémentaire sur la localisation fréquentielle de ω_0 persiste au cours de l'évolution ?* Autrement dit, la question est de savoir dans quelle mesure une information sur la microlocalisation du tourbillon initial autour de $(x, \pm\xi)$ est propagée par le flot, et de quelle manière cette microlocalisation se dégrade en fonction du temps, et du paramètre de viscosité. Ce problème, dont on trouvera une formulation dans la thèse de F. Vigneron [184], est essentiellement ouvert.

Chapitre 3

Stabilité des écoulements stationnaires

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'influence des forces extérieures sur le mouvement d'un fluide. La première question que l'on traite ici est celle de la stabilité des écoulements stationnaires. On obtient des solutions stationnaires du système de Navier–Stokes en ajoutant dans la première équation de (NS) un terme de force $f = f(x)$ indépendant du temps. On s'intéresse alors aux solutions $U = U(x)$ et $P = P(x)$ de

$$\begin{cases} \nabla \cdot (U \otimes U) + \nabla P = \Delta U + f \\ \nabla \cdot U = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{NSS})$$

que l'on complète par une condition à l'infini de la forme $U(x) \rightarrow U_\infty$ pour $|x| \rightarrow \infty$, où $U_\infty \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur constant donné. Le cas $U_\infty \neq (0, 0, 0)$ est assez bien compris d'un point de vue mathématique, et l'on trouvera une description exhaustive des résultats connus dans le traité de Galdi [95]. En revanche, le cas $U_\infty = (0, 0, 0)$ pose plus de difficultés. Par exemple, la construction de solutions vérifiant l'égalité d'énergie naturelle, obtenue formellement en multipliant l'équation par U et en intégrant par parties, sans imposer de condition de petitesse sur f , est un problème encore ouvert. La difficulté principale, par exemple quand $\Omega = \mathbb{R}^3$, ou quand l'inégalité de Poincaré n'est pas satisfaite, vient de ce que l'estimation a priori habituelle,

$$\|\nabla U\|_2 \leq \|f\|_{\dot{H}^{-1}},$$

implique seulement $U \in \dot{H}^1 \subset L^6$. Mais afin de donner un sens à l'identité formelle

$$\int [\nabla \cdot (U \otimes U)] \cdot U \, dx = 0,$$

il faudrait des renseignements supplémentaires, comme par exemple $U \in L^4$. Or, on ne sait obtenir de condition du type $U \in L^p(\mathbb{R}^3)$, avec $p < 6$, qu'en imposant des conditions de petitesse sur f .

C'est précisément sous ce type de restriction que l'existence de solutions dans L^p avec $p \geq d$, où d est la dimension de l'espace a été obtenue par P. Secchi [179], par H. Kozono et M. Yamazaki [133, 188] dans le cas du domaine extérieur et par Cannone et Karch [52, 53] dans l'espace tout entier. Le cas de solutions $U \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a été abordé par Bjorland et Schonbek [24]. Leur méthode repose de manière essentielle sur l'analyse hilbertienne et semble mal adaptée au cas $p \neq 2$.

Ces travaux étudient aussi le problème de la stabilité : considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \Delta u + f \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f = f(x)$ est une force extérieure, pour laquelle on sait démontrer l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire $U = U(x)$ de (NSS). Les résultats typiques [24, 52, 53, 133, 188] affirment ceci : *Si f et u_0 sont suffisamment petits dans un espace convenable (la différence $u_0 - U$ est donc supposée petite), pour $t \rightarrow \infty$ la solution stationnaire U attire la solution non stationnaire u du problème de Cauchy (3.1).* Ce type de conclusion reste généralement vraie si l'on considère dans (3.1) des forces dépendant du temps, à condition qu'elles convergent pour $t \rightarrow \infty$ vers une force stationnaire.

3.2 Résultats principaux

[B9] C. Bjorland, L. Brandolese, D. Iftimie, M. E. Schonbek,
 L^p -solutions of the steady-state Navier–Stokes equations with rough external forces,
Comm. Part. Diff. Equ. (à paraître).

La contribution décisive de notre article [B9] est la démonstration qu'une vaste classe de solutions globales $u = u(x, t)$ de (3.1) deviennent asymptotiquement petites (mais non nulles en général) pour $t \rightarrow \infty$, si f est petite. Ceci même pour des données initiales u_0 grandes. La taille des solutions est mesurée ici par des normes invariantes par changement d'échelle. Cela nous permet de conclure que les solutions stationnaires petites sont globalement stables, au sens qu'elles attirent des solutions du problème d'évolution (3.1) qui peuvent être initialement arbitrairement grandes. L'idée repose sur une décomposition de la vitesse dans une partie carré intégrable et une partie petite dans un espace critique. Cette idée avait été introduite par I. Gallagher, D. Iftimie et F. Planchon [97] et exploitée aussi dans [5]. On peut voir alors notre résultat de stabilité globale comme une généralisation au cas $f \neq 0$ et $U \neq 0$ de [97].

Une autre nouveauté de notre approche réside dans l'obtention de conditions sur la force $f(x)$ qui sont essentiellement *nécessaires et suffisantes* pour garantir l'appartenance des solutions de (NSS) à $L^p(\mathbb{R}^3)$. Cela nous permettra de traiter le cas $\frac{3}{2} < p \leq \infty$ (en dimension $d = 3$), et unifier ainsi les résultats de Bjorland et Schonbek (pour $p = 2$) en les améliorant, avec ceux de Cannone et Karch ($p \geq 3$). Pour $p \leq \frac{3}{2}$ nous établissons des résultats de non existence.

3.2.1 Conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance à L^p

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, nous serons amenés à imposer une restriction sur la taille de la force f . Plus précisément, nous imposons que

$$\|\Delta^{-1} f\|_{L^{3,\infty}} < \epsilon, \quad (3.2)$$

où $L^{p,\infty}$ est un espace de Lorentz, qui coïncide avec l'espace de Marcinkiewicz L_w^p . Rappelons que pour $1 < p < \infty$ l'on peut munir $L^{p,\infty}$ d'une norme équivalente à la quasi-norme

$$\|f\|_{L_w^p} = \sup_{s>0} s |\{x : |f(x)| > s\}|^{1/p},$$

où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue.

Expliquons le bien fondé de ce choix. La condition (3.2), d'une part, respecte le changement d'échelle de l'équation. En outre, elle est moins restrictive que des conditions portant sur les normes L^1 , ou $\dot{H}^{-3/2}$, ou \dot{H}_3^{-2} , de f , qui auraient les mêmes lois d'échelle. (Rappelons que $f \in \dot{H}_p^s$, l'espace de Sobolev fractionnaire, ou de Bessel, signifie $\mathcal{F}^{-1}|\xi|^s \widehat{f} \in L^p$). Contrairement à ce trois espaces, la condition (3.2) nous permet de prendre en compte certaines forces très singulières, comme des masses de Dirac. Ainsi, les célèbres solutions stationnaires axisymétriques de Landau, qui sont associées à des forces de type $f = b(\delta_0, 0, 0)$, seront prises en compte par notre théorème. De plus, (3.2) va assurer $U \in L^{3,\infty}$, et l'on sait que cet espace est bien adapté aux estimations du terme bilinéaire de Navier–Stokes (voir [53, 147]).

Les conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance à L^p sont données par les deux théorèmes suivants (en collaboration avec C. Bjorland, D. Iftimie et M. Schonbek) :

Théorème 14. *Il existe une constante absolue $\epsilon > 0$ avec les propriétés suivantes :*

- *Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ est telle que $\Delta^{-1}f \in L^{3,\infty}$ et vérifiant la condition (3.2), alors il existe une solution $U \in L^{3,\infty}$ de (NSS) telle que*

$$\|U\|_{L^{3,\infty}} \leq 2\|\Delta^{-1}\mathbb{P}f\|_{L^{3,\infty}}. \quad (3.3)$$

(Cette solution est unique et l'unicité a été établie dans un contexte plus général par H. Kozono et M. Yamazaki [132]).

- *Soit $\frac{3}{2} < p < \infty$. Si U est la solution ci-dessus alors nous avons plus précisément*

$$U \in L^{3,\infty} \cap L^p \quad \text{si et seulement si} \quad \mathbb{P}f \in \dot{H}_p^{-2}.$$

Dans ce cas (et si $p \neq 3$), $U \in L^q$ pour tout q tel que $3 < q \leq p$ (ou $p \leq q < 3$).

De plus, U appartient à $L^{3,\infty} \cap L^\infty$ (respectivement, $U \in L^{3,\infty} \cap \text{BMO}$) si et seulement si $\Delta^{-1}\mathbb{P}f \in L^\infty$ (respectivement, $\Delta^{-1}\mathbb{P}f \in \text{BMO}$).

Rappelons que l'espace BMO (*bounded mean oscillations*) est l'espace des fonctions $f \in L^1_{\text{loc}}$ telles que $\sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - \frac{1}{|Q|} \int_Q f| dx < \infty$, où le sup porte sur tous les cubes Q . Pour une définition équivalente à l'aide de l'analyse de Littlewood–Paley, on pourra consulter l'ouvrage [89]. Dans le cadre du théorème 14, l'intérêt de cet espace vient de ce que l'opérateur \mathbb{P} est borné dans BMO.

Le théorème ci-dessus est complété par le résultat suivant, qui explique entre autre la limitation $\frac{3}{2} < p \leq \infty$. La démonstration repose sur la construction du profil asymptotique

$$U(x) \simeq m(x): (U \otimes U), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Ici $m_{j,h,k} = \partial_h M_{j,k}$, où M est le tenseur qui parait dans la solution fondamentale de l'équation de Stokes. Le calcul explicite de M remonte à Lorentz (1896), [95, Vol. I, p. 190].

Théorème 15. *Soit $f_0 = (f_1, f_2, f_3)$ un champ de vecteur de divergence nulle telle que $\widehat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $0 \notin \text{supp}(\widehat{f})$. Supposons également que la matrice*

$$\left(\int \frac{(\widehat{f}_0)_j (\widehat{f}_0)_k}{|\xi|^4} d\xi \right)_{j,k}$$

ne soit pas un multiple scalaire de l'identité. Alors, il existe $\eta_0 > 0$ tel que la solution U de (NSS) avec $f = \eta f_0$ et $0 < \eta \leq \eta_0$ vérifie $U(x) \simeq |x|^{-2}$ pour $|x| \rightarrow \infty$, le long presque toutes direction de \mathbb{R}^3 . En particulier, $U \notin L^p(\mathbb{R}^3)$ pour tout $1 \leq p \leq \frac{3}{2}$.

3.2.2 Stabilité des solutions stationnaires

Pour des données initiales de (3.1) $u_0 \in L^{3,\infty}$, avec $\Delta^{-1}f$ et u_0 petites dans $L^{3,\infty}$, on sait construire des solutions non stationnaires u et montrer la convergence $u(t) \rightarrow U$ dans de différentes topologies (par exemple, faiblement dans $L^{3,\infty}$), voir par exemple [53] et [B9].

Dans le théorème suivant nous allons adopter un point de vue un peu différent. Nous nous intéressons à des données initiales $u_0 \in L^{3,\infty}$ vérifiant seulement une condition de la forme

$$\limsup_{R \rightarrow 0} R |\{|u_0| > R\}|^{\frac{1}{3}} < \epsilon. \quad (3.4)$$

Il est important de remarquer que la condition (3.4) n'empêche pas à u_0 d'avoir une norme $L^{3,\infty}$ *arbitrairement grande*. En effet, nous démontrons que (3.4) est équivalente à

$$u_0 = v_0 + w_0, \quad \text{avec } v_0 \in L^2 \text{ et } \|w_0\|_{L^{3,\infty}} < \epsilon. \quad (3.5)$$

En outre, (3.4) n'implique pas que u_0 est proche au sens de la norme $L^{3,\infty}$ aux fonctions de la classe de Schwartz (sinon, $\limsup_{R \rightarrow \infty} R |\{|u_0| > R\}|^{\frac{1}{3}} < \epsilon$ devrait être petit aussi).

Nous établissons ensuite le théorème de stabilité suivant.

Théorème 16. *Soit $u \in L_{loc}^\infty([0, \infty); L^{3,\infty}) \cap L_{loc}^4([0, \infty); L^4)$ une solution globale de (3.1) où $f = f(x)$ est tel que $\Delta^{-1}\mathbb{P}f \in L^{3,\infty} \cap L^4$, $u_0 \in L^{3,\infty}$ et*

$$A(u_0, f) \equiv \limsup_{R \rightarrow 0} R |\{|u_0| > R\}|^{\frac{1}{3}} + \|\Delta^{-1}\mathbb{P}f\|_{L^{3,\infty}} < \epsilon, \quad (3.6)$$

avec $\epsilon > 0$ assez petit. Soit $U \in L^{3,\infty} \cap L^4$ l'unique solution stationnaire de (NSS) construite dans le théorème 14. Alors on a

- $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^{3,\infty}} \leq 22A(u_0, f)$;
- $u(t) \rightharpoonup U$ faiblement dans $L^{3,\infty}$ pour $t \rightarrow \infty$;
- $u(t) \rightarrow U$ dans $L^{3,\infty}$ pour $t \rightarrow \infty$ si et seulement si $e^{t\Delta}(u_0 - U) \rightarrow 0$ fortement dans $L^{3,\infty}$.

Voici le schéma de la démonstration : l'idée s'inspire de [97], où les auteurs démontrent que toute solution globale des équations de Navier–Stokes avec $f \equiv 0$ tend vers 0 dans les espaces de Besov $\dot{B}_p^{-1+\frac{3}{p},q}$. Grâce à la décomposition (3.5), $u_0 = v_0 + w_0$, où $v_0 \in L^2 \cap L^{3,\infty}$ et w_0 est petite dans $L^{3,\infty}$. On résout ensuite le problème de Cauchy (3.1) avec donnée initiale w_0 à la place de u_0 : on trouve une solution globale (petite) $w \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^{3,\infty})$. Cette solution converge faiblement dans $L^{3,\infty}$ vers U et, de plus, $\sup_{t>0} t^{1/8} \|w(t) - U\|_4 < \infty$. On étudie ensuite l'équation vérifiée par la différence $v = u - w$ entre la solution initialement grande u (qui est donnée a priori dans l'énoncé) et la solution petite w : grâce à des estimations à la Leray, on démontre que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1)$. Cela permet d'en déduire l'existence de $T > 0$ telle que $\|v(T)\|_{L^{3,\infty}}$, et donc $\|u(T)\|_{L^{3,\infty}}$, sont de taille $\lesssim \epsilon$. On peut se ramener ainsi aux résultats de stabilité valables pour des solutions petites.

Ce résultat peut se généraliser au cas de forces dépendant aussi du temps, quitte à ajouter des conditions convenables de convergence de la force non-stationnaire $f(x, t)$ vers un état stationnaire $f(x)$ pour $t \rightarrow \infty$.

3.3 Autres effets des forces extérieures

[B10] H.-O. Bae, L. Brandolese,

On the effect of external forces on incompressible fluid motions at large distances,
Ann. Univ. Ferrara (2009).

Dans cette section nous traitons le cas d'une force extérieure $f = f(x, t)$ non identiquement nulle, et rapidement décroissante vers 0 pour $(x, t) \rightarrow \infty$. Dans ce cas on pourrait penser que le comportement asymptotique de la solution u de (3.1) soit comparable à celui des équations de Navier–Stokes homogènes.

Les techniques introduites dans la section 1.2 peuvent être employées aussi dans cette situation. Nous n'entrerons pas alors dans les détails. Il est cependant intéressant d'examiner l'effet global qu'une force extérieure aura sur un écoulement.

Ce qui est frappant, c'est que même dans le cas où la force extérieure $f(x, t)$ est très localisée (par exemple, à support compact en espace-temps, alors la vitesse des particules de fluides en *tout instant* $t > 0$ et *en tout point* x en dehors d'une boule $B(0, R(t))$ de grand rayon sera beaucoup plus importante que dans le cas homogène (le cas $f \equiv 0$).

Nous démontrons en effet qu'en la présence d'une force extérieure nous avons les estimations

$$ct|x|^{-d} \leq |u(x, t)| \leq Ct|x|^{-d}, \quad (3.7)$$

pour tout $0 < t < t_0$ suffisamment petit et $|x|$ assez grand. Cette conclusion est à comparer avec les estimations (1.15) obtenues dans le cas $f \equiv 0$. Dans (3.7), la constante c est proportionnelle à $\int f|_{t=0}(x) dx$. Ces estimations s'appliquent alors lorsque la force est initialement de moyenne non nulle.

Aux instants successifs le comportement à de grandes distances du fluide sera gouverné par l'asymptotique

$$u(x, t) \simeq \mathfrak{K}(x) \int_0^t \int f(y, s) dy ds, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Le comportement pour t grand dépend essentiellement de la nullité de l'intégrale

$$\int_0^\infty \int f(y, s) dy ds. \quad (3.9)$$

Si, par exemple, l'intégrale (3.9) n'est pas nulle, alors on aura, pour $t \rightarrow \infty$,

$$\|(1+x)^\alpha u(t)\|_p \simeq ct^{-\frac{1}{2}(d-\alpha-d/p)}, \quad \text{pour } \alpha + d/p < d. \quad (3.10)$$

Les conclusions (3.7)–(3.10) sont établies dans [B10]. Il s'agit de résultats valables pour les solutions fortes, et pour des données initiales et des forces extérieures suffisamment décroissantes. Pour certaines valeurs des paramètres α et p , les estimations (3.10) peuvent être obtenues sous des hypothèses plus générales (données initiales et forces moins localisées, solutions faibles, etc.). Pour cela, il s'agit de généraliser au cas d'une force extérieure non nulle des arguments déjà employés par plusieurs auteurs dans le cas $f \equiv 0$ (voir, par exemple, [8, 51, 91, 156]). Des résultats dans cette direction sont décrits dans [B20]. Le prix à payer pour cette plus grande généralité est la perte d'information point par point sur le mouvement des particules.

3.4 Développements et perspectives

3.4.1 Stabilité des solutions de Landau

Un problème ouvert important relatif aux écoulement stationnaires, est la stabilité globale des solutions de Landau (voir, par exemple, [52, 181] pour une écriture explicite de ces solutions). Il s'agit d'une famille à un paramètre de solutions $U = U(x)$ de (SNS), autosimilaires (homogènes de degré -1), et axisymétriques, régulières en dehors de l'origine. Ce sont de

solutions au sens classique dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, et au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 , associées à une force extérieure de type $(b\delta_0, 0, 0)$, $b \in \mathbb{R}$. Malheureusement, notre résultat de stabilité ne s'applique pas à ces solutions, essentiellement à cause des hypothèses techniques que nous avons imposées dans le théorème 16 afin de mener à bien notre démonstration (les conditions de type L^4 , par exemple). Un résultat d'unicité récent dû à V. Šverák [181], affirmant que toute solution homogène de degré -1 et régulière dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de (SNS) est une solution axisymétrique de Landau, donne l'espoir d'avancées futures dans ce sujet.

3.4.2 Sur le caractère bien posé de (SNS)

Concernant les questions d'existence pour le système (SNS), il serait intéressant d'affaiblir la condition (3.2) et de trouver la *condition de petitesse minimale*, permettant d'abord de construire des solutions stationnaires peu régulières, et de déduire ensuite des propriétés supplémentaires sur U (régularité, oscillations, comportement à l'infini etc.) à partir de celles de la force f . D'une certaine manière, il s'agirait d'établir, pour le système (SNS), l'analogie du théorème de Koch et Tataru, qui répond effectivement à cette question pour le système non-stationnaire (NS).

Quel espace serait-il le bon candidat? Tout d'abord, afin de donner un sens à la non-linéarité $U \otimes U$ il est raisonnable d'imposer $U \in L^2_{\text{loc}}$. Comme Y. Meyer l'a remarqué dans [147], le plus grand espace qui s'injecte dans L^2_{loc} et qui respecte l'invariance d'échelle $\lambda \mapsto \lambda U(\lambda \cdot)$ est l'espace de Morrey-Campanato homogène $\mathcal{M}_{3,2}$.

Rappelons que, pour $1 \leq q \leq p$,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,q}} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{R>0} R^{\frac{3}{p}-\frac{3}{q}} \left(\int_{|x-x_0|<R} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

et l'on a les inclusions

$$L^p = L^{p,p} = \mathcal{M}_{p,p} \subset L^{p,\infty} \subset \mathcal{M}_{p,q}, \quad 1 \leq q < p < \infty. \quad (3.11)$$

Pour cette raison, la condition de force petite minimale serait

$$\|\Delta^{-1}f\|_{\mathcal{M}_{3,2}} < \epsilon.$$

La difficulté de travailler avec l'espace $\mathcal{M}_{3,2}$ vient de ce que l'on obtiendrait, a priori, $U \otimes U \in \mathcal{M}_{\frac{3}{2},1}$; on se heurte alors au caractère non borné de certaines intégrales singulières dans des espaces de Morrey de fonctions L^1_{loc} .

On dispose de résultats d'existence pour (SNS) dans les espaces, un peu plus petits, $\mathcal{M}_{3,q}$, pour $2 < q \leq 3$. Voir Kozono, Yamazaki [132]. Dans ce cas, $\Delta^{-1}f$ doit être contrôlé en norme $\mathcal{M}_{3,q}$ par une constante ϵ_q , mais on ne connaît pas avec exactitude le comportement de ϵ_q pour $q \rightarrow 2$. Il est tout-à-fait possible que l'espace $\mathcal{M}_{3,2}$ ne convient pas à (SNS) et que l'espace optimal X soit un peu plus petit : $\bigcap_{2 < q \leq 3} \mathcal{M}_{3,q} \subset X \subset \mathcal{M}_{3,2}$.

Comme nous l'avons mentionné, ce programme présente des analogies avec celui qui a été mené à bien par Koch et Tataru [129], relatif à la recherche du plus grand espace critique dans lequel le système de Navier–Stokes non-stationnaires (NS) est bien posé (pour des données initiales petites). Ces auteurs ont établi le caractère bien posé pour (NS) dans l'espace BMO^{-1} (l'espace des distributions qui sont la divergence d'un champ de vecteurs de BMO). Cet espace s'encadre à l'aide des espaces de Besov (voir la section 2.4) :

$$\bigcap_{1 \leq q < \infty} \dot{B}_q^{-1+3/q,\infty} \subset \text{BMO}^{-1} \subset \dot{B}_\infty^{-1,\infty}.$$

L'existence globale des solutions de (NS) à données petites dans $\dot{B}_q^{-1+3/q,\infty}$ pour $q < \infty$ avait été obtenue par Cannone et Planchon [49, 168]. Des résultats sur le caractère mal posé (comportant des effets de *norm inflation*) dans des espaces plus grands que BMO^{-1} sont dus à J. Bourgain et N. Pavlovič [28] (dans l'espace $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$) et Yoneda [189] (dans un espace Y construit *ad hoc*). L'espace de Yoneda est tel que

$$\dot{B}_\infty^{-1,2} \subset \text{BMO}^{-1} \subset Y \subset \bigcap_{2 < q \leq \infty} \dot{B}_\infty^{-1,q}.$$

L'optimalité de l'espace de Koch et Tataru est largement admise, bien qu'elle ne soit pas rigoureusement établie. Il serait alors intéressant de montrer aussi que *toute norme strictement plus faible* que celle de Koch et Tataru, et invariante par le même changement d'échelle, donne lieu à des phénomènes de discontinuité du flot semblables à ceux mis en évidence par Bourgain, Pavlovič et Yoneda.

Chapitre 4

Autosimilarité

4.1 Introduction

Les équations d'évolution auxquelles on s'intéresse vérifient bien souvent des propriétés d'invariance par changements d'échelle : dans ce cas on peut trouver deux paramètres réels α et β tels que si $u(x, t)$ est une solution, alors $u_\lambda(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda x, \lambda^\beta t)$ est une autre solution de la même équation. Les solutions autosimilaires sont définies par la condition $u = u_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$. On leur associe le profil autosimilaire $U(x) = u(x, 1)$, qui les caractérise complètement par la relation $u(x, t) = t^{-\alpha/\beta} U(xt^{-1/\beta})$.

Ces solutions jouent un rôle privilégié : à titre d'exemple, ceci est bien illustré, dans le cas des équations de Navier–Stokes, par les *tourbillons d'Oseen* $\omega(x, t) = \frac{M}{4\pi t} e^{-|x|^2/(4t)}$, avec $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$, dont le champ de vitesse correspondant est $u(x, t) = \frac{Mx^\perp}{2\pi|x|^2} (1 - e^{-|x|^2/(4t)})$. Il s'agit de solutions autosimilaires pour l'équation de la vorticité dans \mathbb{R}^2 :

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \Delta \omega, \quad \text{où} \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} dy. \quad (4.1)$$

Ici le paramètre $M \in \mathbb{R}$ exprime la circulation du fluide, donn e par l'invariant $\int \omega dx$. Le tourbillon d'Oseen de circulation M est la seule solution de ce système issue de la donn e initiale $M\delta_0$, (voir [96]). Son importance r siede dans le fait qu'il attire (au sens de la convergence dans L^1 pour $t \rightarrow \infty$) toute solution ω de (4.1) telle que $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ et $\int \omega_0 = M$. Ce résultat est dû à Th. Gallay et C. E. Wayne [100] (voir aussi les résultats antérieurs de Giga et Kambe [102], et Giga, Miyakawa et Osada [106] pour une démonstration différente dans le cas de données petites).

L'équation de Burgers scalaire, pour ne citer que l'un des exemples les plus élémentaires, et ses généralisations, illustrent elles aussi le rôle important des solutions autosimilaires. Dans le cas de l'équation classique, $u_t - u_{xx} + (u^2)_x = 0$, le terme principal de l'asymptotique pour $t \rightarrow \infty$ d'une solution $u(x, t)$ du problème de Cauchy avec donn e initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ est donn e par

$$\sqrt{t} \|u(\cdot, \sqrt{t}) - U_M\|_p \rightarrow 0 \quad \text{pour } t \rightarrow \infty \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

où $U_M(x) = e^{-|x|^2} (K(M) + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-y^2/4} dy)$ est le profil autosimilaire de la solution $u_M(x, t) = t^{-1/2} U(xt^{-1/2})$ issue de $M\delta_0$. Nous reviendrons à la fin de ce chapitre sur des questions d'autosimilarité pour une *généralisation fractale* de l'équation de Burgers dans \mathbb{R}^d .

L'existence de solutions autosimilaires, n'est pas, en général, une conséquence de la simple propriété d'invariance par changement d'échelle. Une méthode classique pour leur construction consiste à résoudre l'équation satisfaite par $U = u(x, 1)$, en éliminant t . Cette méthode a été appliqu e avec succès dans de nombreux cas. C'est de cette manière, par exemple, que

Landau a construit ses solutions axisymétriques dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ pour l'équation de Navier–Stokes stationnaire, dont on a parlé dans la section 3.4.1. Un autre exemple est fourni par le travail de Brezis, Peletier et Terman [45], où les auteurs obtiennent des solutions radiales pour une équation de la chaleur non-linéaire. Cependant, il n'est pas rare que l'équation pour U soit trop difficile à résoudre. Par exemple, dans le cas des équations de Navier–Stokes dans \mathbb{R}^d , on tombe sur le système elliptique

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}U - \frac{1}{2}(x \cdot \nabla)U - \Delta U + (U \cdot \nabla U) + \nabla P = 0 \\ \nabla \cdot U = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (4.2)$$

qui n'est toujours pas bien compris.

Une méthode alternative pour la construction de solutions autosimilaires a été proposée par Giga et Miyakawa [105], et par Cannone, Meyer et Planchon [49, 50, 55] dans le but de remédier à l'inconvénient décrit plus haut. Cela consiste à établir l'existence et l'unicité de solutions d'un problème de Cauchy dans des espaces fonctionnels suffisamment grands pour pouvoir prendre en compte des données initiales homogènes de degré $-\alpha$. Les solutions issues de ces données homogènes résulteront de la forme $u(x, t) = t^{-\alpha/\beta}U(xt^{-1/\beta})$ grâce aux propriétés d'invariance de l'équation. Les espaces de Sobolev ou de Lebesgue ne contenant pas de fonction homogène non triviale, cette approche nécessite d'aller au delà des théories hilbertiennes ou des théories L^p classiques. Cette méthode a ainsi contribué à populariser l'utilisation des espaces de Morrey–Campanato, de Lorentz, de Besov, etc. (et l'analyse harmonique qui leur y est associée) dans les équations aux dérivées partielles. Elle a été appliquée avec succès à de nombreux modèles (voir par exemple [59, 114, 144, 172]).

Par exemple, pour les équations de Navier–Stokes les paramètres sont $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. Considérons alors une donnée initiale $a(x)$ homogène de degré -1 dans \mathbb{R}^d et vérifiant des conditions faibles de régularité, comme $a|_{\mathbb{S}^{d-1}} \in L^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ (mais une condition plus générale faisant intervenir une norme de Besov sur la sphère serait suffisante). Les résultats de Cannone, Meyer et Planchon [55] impliquent que si $\epsilon > 0$ est assez petit, alors il existe une solution autosimilaire $u(x, t) = t^{-1/2}U(xt^{-1/2})$ des équations de Navier–Stokes. Pour des données initiales un peu plus régulières sur la sphère, la construction de solutions autosimilaires par cette voie se fait en quelques lignes! (Voir [52, 55]). De plus, si u_0 est une donnée initiale asymptotiquement homogène de degré -1 , $u_0(x) \overset{x \rightarrow \infty}{\sim} a(x)$, alors la solution $u(x, t)$ correspondante se comporte pour $t \rightarrow \infty$ comme une solution autosimilaire : $u(t) \overset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^{-1/2}U(\cdot t^{-1/2})$, par exemple en norme L^p (voir [58, 168] pour des énoncés plus précis).

L'inconvénient de cette deuxième méthode, c'est qu'en général elle nous donne très peu de renseignement supplémentaire sur la solution ainsi construite.

Une question naturelle se pose : *quelle relation subsiste entre la donnée initiale $a(x)$ et le profil autosimilaire $U(x)$?*

Dans les sections suivantes nous allons expliquer comment l'on peut obtenir ces renseignements. Il s'agit de construire une formule entre $U(x)$ et $a(x)$, valable asymptotiquement pour $|x| \rightarrow \infty$. Dans [B5] nous avons étudié le cas des solutions de Cannone, Meyer, Planchon pour les équations de Navier–Stokes. Mais nos techniques peuvent s'appliquer également à des solutions construites par une voie différente : dans [B12] nous avons étudié les solutions autosimilaires de Biler, Karch, Woyczyński pour une équation de Burgers fractale (voir la section 4.3).

4.2 Propriétés fines de solutions autosimilaires de Navier–Stokes

[B5] L. Brandolese,

Fine properties of self-similar solutions of the Navier–Stokes equations,
Arch. Rat. Mech. Anal. **192** (2009), 375–401.

Nous commençons par introduire quelques notations. Tous les espaces que l'on considère sont des espaces de fonctions Lebesgue-mesurables. Pour $\vartheta \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$f \in \dot{E}_\vartheta^m \iff \begin{cases} f \in C^m(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}), & \text{et} \\ |x|^{\vartheta+|\alpha|} \partial^\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) & \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m. \end{cases} \quad (4.3)$$

On s'intéresse surtout au cas $\vartheta = 1$, car \dot{E}_1^m contient des fonctions (ou des champs de vecteurs) homogènes de degré -1 .

L'analogue non homogène de l'espace \dot{E}_ϑ^m est l'espace plus petit E_ϑ^m , qui est défini par la condition supplémentaire $\partial^\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour tout $|\alpha| \leq m$. Ces espaces sont équipés de leur norme naturelle

$$\begin{aligned} \|f\|_{\dot{E}_\vartheta^m} &= \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} |x|^{\vartheta+|\alpha|} |\partial^\alpha f(x)|, \\ \|f\|_{E_\vartheta^m} &= \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{\vartheta+|\alpha|} |\partial^\alpha f(x)|. \end{aligned}$$

Notre point de départ est le théorème suivant, valable en toute dimension $d \geq 2$:

Théorème 17 ([55], [56]). *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $\epsilon, \beta > 0$ tel que pour tout champ de vecteur de divergence nulle $u_0 \in \dot{E}_1^m$, homogène de degré -1 , tel que*

$$\|u_0\|_{\dot{E}_1^m} < \epsilon, \quad (4.4)$$

il existe une unique solution autosimilaire $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ des équations de Navier–Stokes (NS') dans \mathbb{R}^d émanant de u_0 (au sens de la convergence faible $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ pour $t \rightarrow 0^+$) et telle que $\|U\|_{E_1^m} < \beta$. De plus,

$$U(x) = e^\Delta u_0(x) + \mathcal{R}(x), \quad (4.5)$$

où $\mathcal{R}(x) = O(|x|^{-2})$ pour $|x| \rightarrow \infty$, et plus précisément $\mathcal{R} \in E_2^m$.

Comme nous le verrons dans un instant, la relation asymptotique entre $U(x)$ et $u_0(x)$ change de structure selon la dimension de l'espace.

Rappelons que si $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_{j;h,k})$ et $B = (B_{h,k})$ sont, respectivement, des tenseurs d'ordre trois et deux, on note $\mathcal{Q} : B$ le champ de vecteurs de composantes

$$(\mathcal{Q} : B)_j = \sum_{h,k=1}^d \mathcal{Q}_{j;h,k} B_{h,k}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Ci dessous, $\mathcal{Q}_{j;h,k}(x)$ désigne le polynôme homogène de degré 3 dans \mathbb{R}^d ,

$$\mathcal{Q}_{j;h,k}(x) = \gamma_d \left((\delta_{j,h} x_k + \delta_{h,k} x_j + \delta_{k,j} x_h) |x|^2 - (d+2) x_j x_h x_k \right). \quad (4.6)$$

Ce polynôme est relié à la matrice $\mathfrak{K}_{h,k}(x) = E_{x_h, x_k}(x)$ introduite dans la section 1.2 par la relation $\mathcal{Q}_{j;h,k}(x) = |x|^{d+4} \partial_j \mathfrak{K}_{h,k}(x)$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de [B5] :

Théorème 18. Soit u_0 un champ de vecteur de divergence nulle, homogène de degré -1 , régulière sur la sphère \mathbb{S}^{d-1} et vérifiant la condition de petitesse (4.4) pour un entier $m \geq 3$. Soit $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ la solution autosimilaire construite dans le théorème 17. On a alors les profils asymptotiques suivants :

– Si $d = 2$, on a pour $|x| \rightarrow \infty$,

$$U(x) = u_0(x) - \log(|x|) \frac{\mathcal{Q}(x):A}{|x|^6} + O(|x|^{-3}), \quad (4.7a)$$

Ici $A = (A_{h,k})$ est la matrice constante 2×2 donnée par $A_{h,k} = \int_{\mathbb{S}^1} (u_{0,h} u_{0,k})$.
– Pour $d = 3$, on a pour $|x| \rightarrow \infty$,

$$U(x) = u_0(x) + \Delta u_0(x) - \mathbb{P}\nabla \cdot (u_0 \otimes u_0) - \frac{\mathcal{Q}(x):B}{|x|^7} + O(|x|^{-5} \log |x|), \quad (4.7b)$$

où $B = (B_{h,k})$ est une matrice constante 3×3 .
– Pour $d \geq 4$ on a pour $|x| \rightarrow \infty$,

$$U(x) = u_0(x) + \Delta u_0(x) - \mathbb{P}\nabla \cdot (u_0 \otimes u_0) + O(|x|^{-5} \log |x|). \quad (4.7c)$$

Ce théorème s'obtient comme corollaire d'un résultat un peu plus général, dans lequel on suppose que u_0 est décroissante comme $|x|^{-1}$, mais pas forcément homogène. On obtient alors une relation asymptotique entre la solution $u(x, t)$ (qui ne sera plus forcément autosimilaire) et $u_0(x)$ pour $|x| \rightarrow \infty$, valable pour tout $t > 0$. Dans le cas homogène, on peut éliminer t dans ces relations, en obtenant ainsi les profils (4.7a)-(4.7c).

En principe, on pourrait calculer l'asymptotique jusqu'à un ordre arbitrairement élevé, quitte à considérer des données initiales suffisamment régulières sur la sphère (pour obtenir les formules (4.7a)-(4.7c) nous supposons $u_0 \in C^3(\mathbb{S}^{d-1})$). Cependant les termes successifs du développement de $U(x)$ sont difficilement exploitables. Déjà, la matrice constante B qui figure dans le quatrième terme de (4.7b), n'est pas explicitement connue : son expression ne dépend pas uniquement de la donnée u_0 , mais fait intervenir certaines intégrales de la solution aux instants successifs.

On déduit des formules (4.7a)-(4.7c) que

$$U(x) = u_0(x) + O(|x|^{-3} \log |x|), \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty, \quad (d = 2),$$

et l'estimation du reste est optimale. En outre,

$$U(x) = u_0(x) + O(|x|^{-3}), \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty. \quad (d \geq 3),$$

Ceci améliore la conclusion $U(x) = e^\Delta u_0(x) + O(|x|^{-2})$ du théorème 17.

4.2.1 Méthodes utilisées

Introduisons l'opérateur bilinéaire

$$B(u, v)(t) = \int_0^t \mathbb{K}(t-s) * \nabla \cdot (u \otimes v)(s) ds,$$

où $\mathbb{K}(x, t)$ est le noyau de l'opérateur de Stokes $e^{t\Delta} \mathbb{P}$. L'équation intégrale (NS') s'écrit alors $u(t) = e^{t\Delta} u_0 - B(u, u)$. En itérant cette formule on obtient

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 - B(e^{t\Delta} u_0, e^{t\Delta} u_0) + 2B(e^{t\Delta} u_0, B(u, u)) - B(B(u, u), B(u, u)),$$

et il s'agit alors d'étudier le comportement à de grandes distances pour chaque terme.

Pour cela, on utilise deux ingrédients essentiels. Le premier est l'utilisation de formules décrivant le comportement asymptotique d'un produit de convolution. Dans les cas les plus simples, lorsque $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ont des "bonnes propriétés à l'infini", on a

$$f * g(x) \sim \left(\int f \right) g(x) + \left(\int g \right) f(x), \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

Dans la pratique, on utilise des généralisations et des variantes de cette formule (observons que la formule (4.8) est évidemment fausse si f et g sont des gaussiennes).

On étudie ensuite l'opérateur de convolution $e^{t\Delta}\mathbb{P}$. Le deuxième ingrédient important est l'utilisation de cancellations remarquables qui sont cachées dans le noyau de convolution $\mathbb{K}(x, t)$. La stratégie consiste à isoler la partie homogène $\mathfrak{K}(x)$ du noyau, à l'aide de la décomposition

$$\mathbb{K}(x, t) = \mathfrak{K}(x) + t^{-d/2}\mathbb{K}_2(x/\sqrt{t})$$

où $\mathfrak{K}_{h,k} = E_{x_h, x_k}$. Le terme d'erreur \mathbb{K}_2 est exponentiellement décroissant pour $y = x/\sqrt{t} \rightarrow \infty$. Un fait crucial sont les identités :

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathfrak{K}(\omega) d\omega = 0, \quad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \omega_j \nabla \mathfrak{K}(\omega) d\omega = 0.$$

Ces cancellations sont "cachées" dans l'opérateur de Stokes, parce que \mathbb{K}_2 , et a fortiori \mathbb{K} , n'ont pas d'intégrale nulle sur la sphère.

4.3 Comportement asymptotique pour une équation de convection avec diffusion non standard

[B12] L. Brandolese, G. Karch,
Far-field asymptotics of solutions to a convection equation with anomalous diffusion,
 J. Evol. Equ. **8**, 307-326 (2008).

4.3.1 Introduction

On s'intéresse au problème de Cauchy pour la loi de conservation avec diffusion non standard

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^{\alpha/2} u + \nabla \cdot f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0. \end{cases} \quad (4.9)$$

On supposera ici $1 < \alpha < 2$ et que le champ de vecteur $f(u) = (f_1(u), \dots, f_d(u))$ est de classe C^1 et à croissance polynomiale ; plus précisément on impose les conditions usuelles suivantes :

$$|f(u)| \leq C|u|^q \quad \text{et} \quad |f(u) - f(v)| \leq C|u - v|(|u|^{q-1} + |v|^{q-1}), \quad (4.10)$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}^d$, où $C > 0$ et $q > 1$ sont des constantes.

L'une des motivations pour l'étude de ce modèle est l'interprétation probabiliste récente fournie par Jourdain, Méléard et Woyczyński [120]. Ces auteurs ont étudié une classe d'équations intégral-différentielles comportant des puissances fractionnaires du Laplacien et une non-linéarité non-locale quadratique représentée par un opérateur intégral singulier. Ils ont ensuite établi un effet de *propagation de chaos* pour cette loi de diffusion et pour le système de particules associé. Compte tenu de cette interprétation probabiliste, la fonction $u(\cdot, t)$ s'interprète comme une densité de probabilité pour tout $t > 0$ s'il en est de même pour la donnée initiale.

Si $X(t)$ est la loi α -stable symétrique de Lévy, la densité de sa fonction de distribution est $p_\alpha(x, t)$, la solution fondamentale de l'équation

$$\partial_t v + (-\Delta)^{\alpha/2} v = 0. \quad (4.11)$$

Ainsi, p_α se calcule via la transformée de Fourier : $\widehat{p}_\alpha(\xi, t) = e^{-t|\xi|^\alpha}$. Donc,

$$p_\alpha(x, t) = t^{-d/\alpha} P_\alpha(xt^{-1/\alpha}),$$

où P_α est la transformée de Fourier inverse de $e^{-|\xi|^\alpha}$. On note par $S_\alpha(t)u_0 = p_\alpha(t) * u_0(x)$ la solution de l'équation linéaire (4.11) avec donnée initiale u_0 .

Il est bien connu que pour $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $1 < \alpha \leq 2$, le problème (4.9) possède une solution unique $u \in C([0, \infty), L^1(\mathbb{R}^d))$. De plus, cette solution vérifie

$$u \in C((0, \infty), W^{1,p}(\mathbb{R}^d))$$

pour tout $p \in [1, \infty]$, avec les estimations suivantes :

$$\|u(t)\|_p \leq Ct^{-\frac{d}{\alpha}(1-\frac{1}{p})} \|u_0\|_1. \quad (4.12)$$

Sous l'hypothèse supplémentaire $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a aussi $u \in C([0, \infty), L^p)$ et $\|u(t)\|_p \leq \|u_0\|_p$. (Voir [20, 81]).

L'exposant critique

$$\tilde{q} \equiv 1 + \frac{\alpha - 1}{d} \quad (4.13)$$

permet de discriminer entre trois différents régimes asymptotiques des solutions. En effet, en utilisant la terminologie employée dans [21], on peut dire que le comportement pour $t \rightarrow \infty$ de u est *typiquement non-linéaire* si $q = \tilde{q}$ et *faiblement non-linéaire* pour $q > \tilde{q}$. Pour, $1 < q < \tilde{q}$, on s'attend à un comportement de type hyperbolique.

4.3.2 Résultats principaux

Dans la théorie des processus α -stables, les formules asymptotiques du noyau P_α jouent un rôle important (voir [130]).

$$P_\alpha(x) = c_0(d, \alpha)|x|^{-(\alpha+d)} + O\left(|x|^{-(2\alpha+d)}\right), \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.14)$$

et

$$\nabla P_\alpha(x) = -c_1(d, \alpha)x|x|^{-(\alpha+d+2)} + O\left(|x|^{-(2\alpha+d+1)}\right), \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.15)$$

où

$$c_0(d, \alpha) = \alpha 2^{\alpha-1} \pi^{-(d+2)/2} \sin(\alpha\pi/2) \Gamma\left(\frac{\alpha+d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

et

$$c_1(d, \alpha) = 2\pi\alpha 2^{\alpha-1} \pi^{-(d+4)/2} \sin(\alpha\pi/2) \Gamma\left(\frac{\alpha+d+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Observons que dans le cas $\alpha = 2$ (qui correspond au Laplacien usuel dans l'équation (4.9)) ces constantes s'annulent.

L'un des but de notre article [B12], était d'obtenir l'analogie de ces estimations classiques pour les solutions du problème non-linéaire (4.9). En collaboration avec G. Karch nous avons démontré, d'abord, que les solutions du problème (4.9), issues de données $u_0 \in L_{\alpha+d}^\infty$, vérifient $u \in C([0, T], L_{\alpha+d}^\infty)$ pour tout $T > 0$. Dans certains cas, ces estimations ponctuelles peuvent

être rendues précises. En effet nous démontrons que dans le cas sur-critique $q > \tilde{q}$, ainsi que dans le cas critique $q = \tilde{q}$ pourvu que $\|u_0\|_1$ soit suffisamment petite, on a :

$$|u(x, t)| \leq Cp_\alpha(x, 1 + t), \quad (4.16)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$ et une constante $C > 0$ indépendante de x, t . Sous l'hypothèse supplémentaire $\nabla u_0 \in L_{\alpha+d+1}^\infty$ nous démontrons aussi que

$$\|\nabla u(t)\|_{L_{\alpha+d+1}^\infty} \leq C(1 + t). \quad (4.17)$$

Cela signifie que $\nabla u(x, t)$ vérifie les mêmes profils de décroissance que $\nabla p_\alpha(x, 1 + t)$.

De plus, nous mettons en évidence l'existence d'un *deuxième exposant critique*,

$$q^* \equiv 1 + \frac{1}{\alpha + d}, \quad (4.18)$$

jouant un rôle important dans le comportement asymptotique pour $|x| \rightarrow \infty$.

Le théorème suivant, établi en collaboration avec G. Karch, [B12], illustre le rôle de q^* .

Théorème 19. *Supposons $\alpha \in (1, 2)$, et soit $u = u(x, t)$ la solution de (4.9), avec $u_0 \in L_{\alpha+d}^\infty$ et non-linéarité f vérifiant (4.10).*

1. *Alors, pour tout $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\begin{aligned} u(x, t) = S_\alpha(t)u_0(x) + \frac{c_1(d, \alpha)x}{|x|^{\alpha+d+2}} \cdot \int_0^t \int (t-s)f(u(y, s)) dy ds \\ + O\left(\max\{|x|^{-q(\alpha+d)}; |x|^{-(\alpha+d+2)}\}\right), \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.19)$$

uniformément dans tout intervalle de temps $t \in [0, T]$, $T > 0$. Cette conclusion est intéressante seulement si le dernier terme à droite dans (4.19) est négligeable pour $|x| \rightarrow \infty$: c'est bien le cas quand $q > q^$.*

2. *La conclusion de la première partie peut être améliorée sous l'hypothèse supplémentaire $\nabla u_0 \in L_{\alpha+d+1}^\infty$, en remplaçant le troisième terme à droite dans (4.19) par*

$$O\left(\max\{|x|^{-q(\alpha+d)-1}; |x|^{-(\alpha+d+2)}\}\right), \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty.$$

Maintenant, cette conclusion est intéressante aussi pour $1 < q \leq q^$.*

L'estimation du terme de reste dans (4.19) n'est pas uniforme en temps pour $t \in [0, \infty)$. Cependant, si u vérifie les inégalités (4.16) et (4.17) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$, et une constante $C > 0$ indépendante de x, t , alors on peut préciser le comportement pour $t \rightarrow \infty$ de ce terme : nos estimations se dégradent, quand t est grand, d'un facteur polynomial $(1+t)^N$, où $N = N(\alpha, q, d)$. Nous renvoyons à [B12] pour plus de précisions.

Dans le cas particulier de la non-linéarité critique de la forme $\nabla \cdot f(u) = b \cdot \nabla(u|u|^{q-1})$ où $q = \tilde{q}$ et en partant de la donnée initiale $u_0 = M\delta_0$, avec $b \in \mathbb{R}^d$ et $M > 0$, on sait que le système (4.9) possède une unique solution autosimilaire

$$u_M(x, t) = t^{d/\alpha} U_M(xt^{-1/\alpha}).$$

Cette solution décrit le comportement asymptotique pour $t \rightarrow \infty$ des solutions génériques de l'équation

$$\partial_t u + (-\Delta)^{\alpha/2} u + b \cdot \nabla(u|u|^q) = 0. \quad (4.20)$$

(Ici, $1 < \alpha < 2$, $b \in \mathbb{R}^d$ et $q = (\alpha - 1)/d$). La forme explicite de u_M n'est pas connue. On parvient néanmoins à en montrer l'existence en étudiant la limite des fonctions $u^\lambda(x, t) \equiv$

$\lambda^d u(\lambda x, \lambda^\alpha t)$, où $u = u(x, t)$ est la solution du problème de Cauchy (4.20) avec une donnée initiale $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ de moyenne égale à M . Cette approche est due à Biler, Karch et Woyczyński [21].

Nous avons démontré que pour $M > 0$ suffisamment petit on a l'estimation

$$0 \leq u_M(x, t) \leq Cp_\alpha(x, t). \quad (4.21)$$

Grâce à cette estimation, nous pouvons établir notre résultat sur le comportement asymptotique de ces solutions à de grandes distances :

Théorème 20. *Supposons $1 < \alpha < 2$ et $\tilde{q} > q^*$. Soit u_M une solution autosimilaire comme ci-dessus, vérifiant l'estimation (4.21). Alors le profil autosimilaire $U_M(x) = u_M(x, 1)$ vérifie, pour $|x| \rightarrow \infty$,*

$$U_M(x) = MP_\alpha(x) + \frac{c_1(d, \alpha)\alpha^2}{\alpha + 1} \|U_M\|_{\tilde{q}}^{\tilde{q}} \frac{b \cdot x}{|x|^{\alpha+d+2}} + O\left(\max\{|x|^{-\tilde{q}(\alpha+d)}; |x|^{-(\alpha+d+2)}\}\right). \quad (4.22)$$

4.4 Développements et perspectives

Nous avons déjà mentionné dans la section 3.4.1 un problème ouvert relatif à la stabilité des solutions autosimilaires stationnaires pour les équations de Navier–Stokes. Pour des questions que pose l'autosimilarité dans l'étude de la chimotaxie nous renvoyons à la section 5.3. Il y a un grand nombre d'équations pour lesquelles on pourrait essayer de trouver une formule reliant le profil autosimilaire d'une solution à la donnée initiale du problème de Cauchy associé. Dans certains cas (voir, par exemple, celui du système quasi-géostrophique ci-dessous) la construction des solutions autosimilaires est elle-même un problème non trivial et intéressant.

4.4.1 Le système quasi-géostrophique

Le système quasi-géostrophique bidimensionnel est un modèle simplifié pour l'étude de fluides verticalement stratifiés. Du point de vue mathématique, ce système présente de nombreuses analogies avec le système d'Euler (dans le cas $\nu = 0$) ou celui de Navier–Stokes (si $\nu > 0$, $\alpha = 1/2$), comme il a été mis en évidence par P. Constantin, A. Majda et E. Tabak [68]. Pour une fonction $\theta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta + \nu \Lambda^{2\alpha} \theta = 0 \\ u = (-R_2 \theta, R_1 \theta) \\ \theta|_{t=0}(x) = \theta_0(x). \end{cases} \quad (\text{QG})$$

Ici, R_k sont les transformées de Riesz : $\widehat{R_k f}(\xi) = (i\xi/|\xi|)\widehat{f}(\xi)$, $k = 1, 2$ et $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$. On supposera $\nu > 0$ et $0 < \alpha \leq 1$.

Les solutions autosimilaires de (QG) vérifient $\theta(x, t) = \lambda^{2\alpha-1} \theta(\lambda x, \lambda^{2\alpha} t)$ pour tout $\lambda > 0$. Dans le cas $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ la construction de solutions autosimilaires est due à F. Marchand et P. G. Lemarié-Rieusset [144], qui ont étendu leur résultat aussi pour $\alpha = \frac{1}{2}$, dans le cas de données petites. L'existence de solutions autosimilaires dans le cas $\alpha < 1/2$ n'est pas connue (à l'exception de la solution symétrique triviale $\theta = e^{-t\Lambda^{2\alpha}} \theta_0$, lorsque θ_0 est radiale). Des avancées sur le problème de la régularité des solutions de (QG) dans ce cas $\alpha < 1/2$ ont été annoncées très récemment par D. Chamorro [62].

4.4.2 Sur une équation de convection avec diffusion non-standard

Dans la continuité de nos travaux [B12] nous conjecturons la validité de l'estimation (4.21) sans aucune restriction sur la taille de M , ce qui permettrait de se débarrasser de la condition de petitesse qui est implicite dans le théorème 20. Notons aussi qu'il serait intéressant de trouver une formule explicite entre M et $\|U_M\|_{\tilde{q}}$, en rendant ainsi exploitable le développement 4.22. Le théorème 20 laisse ouvert les cas $\tilde{q} > q^*$. On peut s'attendre dans ce cas à une conclusion semblable, pourvu que l'on dispose de renseignements supplémentaires sur la décroissance des dérivées des solutions autosimilaires u_M .

Dans l'étude du problème (4.9), nous nous sommes limités aux valeurs $1 < \alpha < 2$. Dans le cas $0 < \alpha \leq 1$, une notion importante qui entre en jeu dans la théorie de ces équations est celle de solution entropique (au sens de Kruzhkov), convenablement adaptée aux problème non locaux. Des résultats récents sur le comportement pour $t \rightarrow \infty$ ont été obtenus par N. Alibaud, C. Imbert et G. Karch [3].

Chapitre 5

Chémotaxie et le modèle de Keller–Segel

5.1 Introduction

La chémotaxie est le mouvement orienté de certains micro-organismes selon les gradients de concentration de diverses substances chimiques. Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux phénomènes d'agrégation de micro-organismes émettant eux-même des signaux chimiques qui les attire. Ces phénomènes sont généralement contrebalancés par les effets de diffusion dus à l'agitation brownienne. Dans ce chapitre on considère deux systèmes paraboliques qui sont fréquemment utilisés dans l'étude de ce type de situations. L'un des systèmes ci-dessous (PE) est utilisé aussi en astrophysique pour modéliser certains stades de l'évolution de nuages de particules soumises à l'attraction gravitationnelle.

Le premier système que l'on considère est le système parabolique-elliptique de Keller–Segel

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla \varphi), \\ \Delta \varphi + u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \quad (\text{PE})$$

Ici, $u = u(x, t)$ et $\varphi = \varphi(x, t)$ sont deux fonctions (ou distributions tempérées). Quand $u \geq 0$ et $\varphi \geq 0$, ces inconnus s'interprètent généralement comme des concentrations (densités) de micro-organismes et de substances chimiques, respectivement. Dans les modèles de gravitation de particules, φ s'interprète comme le potentiel gravitationnel engendré par leurs masses. En chémotaxie on s'intéresse surtout au cas $d = 2$, et en astrophysique au cas $d = 3$.

L'autre modèle que l'on considère ici est le système parabolique-parabolique

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla \varphi), \\ \tau \partial_t \varphi = \Delta \varphi + u, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \varphi|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \quad (\text{PP})$$

où $\tau > 0$ est un paramètre fixé. Chacun de ces modèles peut être considéré comme une équation parabolique avec non-linéarité *non-locale* (en x , ou (x, t) pour le deuxième système) en la seule inconnue u . En effet, le terme $\nabla \varphi$ peut s'exprimer comme un opérateur intégral agissant sur u . Dans (PP), les variations de la concentration φ sont gouvernées par l'équation de la chaleur linéaire non homogène : elles sont alors plus lentes que dans le premier système, où la réponse de φ aux variations de u est instantanée, et décrite par l'opérateur intégral $(-\Delta)^{-1}$, dont le noyau présente une singularité. Ainsi, on s'attend a priori que l'évolution décrite par (PE) soit plus rapide que celle décrite par (PP), notamment pour des valeurs grandes de τ .

La théorie du système (PE) est bien établie, en particulier dans l'espace tout entier, ou dans le cas d'un domaine borné de \mathbb{R}^d , avec des conditions de Neumann homogènes pour u et φ au bord. L'une des propriétés les plus intrigantes pour (PE), dans le cas de solutions *positives et intégrables* dans \mathbb{R}^2 , est l'existence d'une valeur de seuil ($= 8\pi$) pour la masse $M = \int u(x, t) dx$ (voir le travail pionnier de W. Jäger et S. Luckhaus [119], ainsi que ceux plus récents de P. Biler [11, 12]). Notamment, si $u \geq 0$, est tel que $\int u_0(x) dx > 8\pi$, il n'y a pas de solution régulière positive définie globalement en temps. Une description fine du comportement asymptotique pour $t \rightarrow \infty$ a été donné par A. Blanchet, J. Dolbeault et B. Perthame [26] dans le cas sous-critique $M < 8\pi$ et par A. Blanchet, J. A. Carrillo, N. Masmoudi [25] dans le cas limite $M = 8\pi$. Voir aussi [18, 19] pour le cas particulier des solutions à symétrie radiale.

Le système doublement parabolique a été moins étudié. Par exemple, en dimension deux, il est connu que si pour des données initiales u_0 l'on a $M < 8\pi$, alors il existe des solutions globales en temps (voir V. Calvez, L. Corrias [47]). Pour $M > 8\pi$, on ne sait pas s'il peut y avoir explosion des solutions : on connaît seulement un exemple spécifique [115] de solution explosive pour un système proche de (PP) ; on sait en tout cas que $M \leq 8\pi$ n'est plus une condition nécessaire pour l'existence globale (comme c'était le cas pour (PE)), parce qu'il existe des solutions autosimilaires globales de grande masse, [17]. L'approche classique pour obtenir l'explosion des solutions pour le modèle (PE) consiste à étudier l'évolution des moments d'ordre deux, en utilisant un argument de symétrisation. Cette méthode ne semble pas fonctionner pour (PP). Pour des simulations numériques sur ces questions on renvoie aux travaux de F. Filbet [88].

Le cas de solutions non-intégrables pour (PE) et (PP) a aussi été étudié par de nombreux auteurs. Voir par exemple P. Biler [12], P. Biler, M. Cannone, I. Guerra et G. Karch [16], A. Raczyński [171], ainsi que nos travaux [B14], [B13], sur lesquels nous reviendrons dans la section suivante. L'étude du caractère bien posé pour ces systèmes a été effectuée dans de différents espaces de fonctions. Une motivation immédiate de ces études est d'inclure les singularités a priori les plus fortes des données initiales (ou des solutions elles mêmes), qui sont des multiples de la fonction $|x|^{-2}$ en dimension $d \geq 3$ et des masses de Dirac pour $d = 2$. Un cadre fonctionnel convenable pour prendre en compte ces singularités sont par exemple les espaces de mesures (ou pseudo-mesures [16, 171]).

5.2 Résultats principaux

5.2.1 La limite parabolique-elliptique pour $\tau \rightarrow 0$ des solutions de (PP)

[B13] P. Biler, L. Brandolese,

On the parabolic-elliptic limit of the doubly parabolic Keller–Segel system modelling chemotaxis, *Studia Math.* **193**, N. 3 (2009), 241–261.

L'article [B13] est consacré à l'analyse asymptotique pour $\tau \rightarrow 0$ des solutions u_τ du modèle parabolique-parabolique (PP) vers les solutions du système parabolique-elliptique (PE).

La stabilité des solutions de (PP) pour $\tau \rightarrow 0$ est une vieille question qui avait été posée par J. J. L. Vélásquez et D. Wrzosek, et partiellement résolue récemment par A. Raczyński [171]. Cependant, le résultat de Raczyński s'applique seulement à des solutions à données petites et la stabilité est démontrée uniquement pour une norme assez faible (la norme de l'espace des pseudo-mesures).

La méthode de [171] repose sur l'analyse de Fourier des équations (PP) et l'introduction des espaces de fonctions définies par des estimations ponctuelles en variables de temps-fréquence (ξ, t) . En collaboration avec P. Biler, nous avons étudié la même problématique, mais en utilisant les variables (x, t) . Notre résultat aura alors une interprétation physique plus immédiate et résulte aussi plus flexible : en effet il conduit en particulier à un résultat de stabilité pour

la norme naturelle $L_t^\infty(L^1)$ et/ou pour la norme $L_{x,t}^\infty$, selon l'espace auquel la donnée u_0 appartient.

La première étape de [B13] est un théorème d'existence globale de solutions petites dans un espace \mathcal{X} de fonctions vérifiant des estimations naturelles de décroissance en variables d'espace-temps. Nous nous limitons à présenter ce résultat dans le cas $d = 2$: le cadre fonctionnel dans le cas $d \geq 3$ est légèrement différent mais les méthodes sont semblables. Soit donc \mathcal{X} l'espace de Banach des fonctions $u = u(x, t)$ et E l'espace des distributions tempérées $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ obtenus à l'aide des normes

$$\|u\|_{\mathcal{X}} = \text{ess sup}_{t>0, x \in \mathbb{R}^2} (t + |x|^2) |u(x, t)|,$$

et

$$\|u_0\|_E = \|e^{t\Delta} u_0\|_{\mathcal{X}}.$$

Par exemple, la masse de Dirac $u_0 = \delta_0$ dans \mathbb{R}^2 est un élément de E . Observons que par définition E s'injecte dans l'espace de Hardy faible \mathcal{H}_w^1 , qui est l'espace de toutes les distributions tempérées f telles que $\sup_{t>0} |e^{t\Delta} f|$ appartient à l'espace de Lorentz $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$.

Théorème 21. *Soit $\tau \geq 0$. Il existe deux constantes absolues positives $\epsilon, c > 0$ (indépendantes de τ) telles que si $u_0 \in E$ est tel que $\|u_0\|_E < \epsilon$, alors il existe une unique solution mild $u^\tau \in \mathcal{X}$ de (PP) (ou de (PE), si $\tau = 0$) telle que $\|u^\tau\|_{\mathcal{X}} < c\epsilon$.*

De plus, pour $\tau \rightarrow 0$ la limite de la solution du système (PP) u^τ est la solution u^0 du système (PE) :

$$u^\tau \rightarrow u^0 \quad \text{dans } \mathcal{X}.$$

Si $u_0 \geq 0$ est de norme petite dans E , et appartient à un espace plus petit, par exemple $u_0 \in E \cap L^1$, alors la solution u^τ de (PP) ou (PE) restera dans L^1 pendant l'évolution. Il est alors naturel de se demander si la convergence $u^\tau \rightarrow u^0$ pour $\tau \rightarrow 0$ a lieu aussi pour la norme naturelle de l'espace $L^\infty(]0, \infty[, L^1)$. Le résultat suivant fournit une réponse positive. La démonstration de ce fait ne dépendant pas de manière cruciale de la topologie utilisée, il convient de formuler un résultat un peu plus abstrait, mais beaucoup plus générale.

On dénote par \mathcal{L} toute *espace de Banach de mesures locales invariant par translations*. Nous renvoyons à l'ouvrage de P. G. Lemarié-Rieusset [137] pour la définition et les propriétés principales de ces espaces. Ici nous nous limitons à rappeler qu'il s'agit d'espaces de Banach de distributions, telles que l'inclusion dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est continue, et vérifiant les propriétés suivantes (pour une constante $C > 0$ dépendant seulement de \mathcal{L}) :

1. Pour tout $f \in \mathcal{L}$, $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$, le produit de convolution $f * g$ est bien défini dans \mathcal{L} et $\|f * g\|_{\mathcal{L}} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}} \|g\|_1$.
2. Pour tout $f \in \mathcal{L}$, $h \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, le produit ponctuel fh est bien défini dans \mathcal{L} et $\|fh\|_{\mathcal{L}} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}} \|h\|_\infty$.
3. Toute suite bornée $\{f_k\} \subset \mathcal{L}$ possède une sous-suite convergente dans \mathcal{L} , au sens des distributions.

Des exemples évidents (qui sont effectivement des espaces de Banach de mesures locales invariants par translations) sont les espaces L^p , $1 < p \leq \infty$, les espaces de Lorentz $L^{p,q}$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, et l'espace $M(\mathbb{R}^2)$ des mesures de Borel bornées. Dans ce dernier cas, la propriété 3 est assurée par la dualité $M(\mathbb{R}^2) = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)'$. D'autres exemples intéressants comprennent les espaces de Morrey–Campanato $M^{p,q}$, $1 < p \leq q < \infty$ et certains espaces de multiplicateurs (voir [137, Chapitre 17]).

La propriété 3 exclut l'espace L^1 de la classe des espaces de Banach de mesures locales invariant par translation. Le résultat de stabilité pour $\tau \rightarrow 0$ dans L^1 nécessite alors d'un traitement à part, et repose sur la conservation de la norme L^1 au cours de l'évolution. Nous pouvons maintenant préciser le théorème 21 :

Théorème 22. Soit $u_0 \in E \cap \mathcal{L}$, où \mathcal{L} est un espace de Banach de mesures locales invariant par translation, ou bien $\mathcal{L} = L^1$. Dans le dernier cas on suppose de plus $u_0 \geq 0$ ou, sinon, que $\|u_0\|_1$ est suffisamment petite. Il existe alors une constante $\epsilon' > 0$ (a priori plus petite que la constante ϵ du théorème 21) dépendant seulement de \mathcal{L} , telle que, si

$$\|u_0\|_E < \epsilon',$$

alors les solutions uniques u^0 et u^τ des systèmes (PE) et (PP) vérifient, pour $\tau \geq 0$,

$$\sup_{t>0} \|u^\tau(t)\|_{\mathcal{L}} < \infty,$$

et

$$\|u^\tau - u\|_{\mathcal{X}} + \sup_{t>0} \|u^\tau(t) - u(t)\|_{\mathcal{L}} \rightarrow 0 \quad \text{pour } \tau \rightarrow 0.$$

Notons que la propriété 2 ci-dessus exclut l'espace des pseudomesures \mathcal{PM} (c'est-à-dire l'espace des distributions tempérées f telles que $\hat{f} \in L^\infty$) de la classe des espaces de Banach de mesures locales invariant par translations. Cependant, comme nous l'avons mentionné au début de cette section, la stabilité des solutions petites de (PP) pour $\tau \rightarrow 0$ reste vraie pour la norme de \mathcal{PM} (voir [171]).

Donnons à présent une idée des démonstrations. On note par $G(\cdot, t)$ le gradient du semi-groupe de la chaleur : $G(\cdot, t) = \nabla_x \left(\frac{1}{4\pi t} e^{-|\cdot|^2/(4t)} \right)$.

On pose ensuite

$$W_\tau(v)(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[G\left(\frac{t-\sigma}{\tau}\right) * v(\sigma) \right](x, \sigma) d\sigma \quad \text{pour } \tau > 0, \quad (5.1a)$$

et

$$W_0(v)(x, t) = (\nabla(-\Delta)^{-1}v)(x, t). \quad (5.1b)$$

Avec ces notations les systèmes (PP) et (PE) s'écrivent sous forme intégrale comme

$$u = e^{t\Delta}u_0 - B_\tau(u, u),$$

où B_τ est l'opérateur bilinéaire

$$B_\tau(u, v)(x, t) \equiv \int_0^t \int G(x-y, t-s)(u W_\tau(v))(y, s) dy ds.$$

La construction des solutions u^τ et u^0 de (PP) et (PE) se fait par point fixe. Comme les solutions obtenues sont petites, on peut estimer

$$\|u^\tau - u^0\|_{\mathcal{X}} \leq C \|B_\tau(u^0, u^0) - B_0(u^0, u^0)\|_{\mathcal{X}},$$

en absorbant à gauche deux des termes du développement bilinéaire. Mais, on peut démontrer l'estimation

$$\|B_\tau(u^0, u^0) - B_0(u^0, u^0)(t)\|_{\mathcal{X}} \leq C \|u^0(t)\|_{\mathcal{X}} \left(\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} \|(W_\tau(u^0) - W_0(u^0))(t)\|_\infty \right).$$

Ici on peut également remplacer la norme de \mathcal{X} par la norme de \mathcal{L} (un espace de Banach de mesures locales invariant par translation quelconque).

La difficulté principale pour obtenir la convergence $u^\tau \rightarrow u^0$ est alors l'estimation de $W_\tau(u^0) - W_0(u^0)$. Celle-ci repose sur plusieurs ingrédients. Le principal est une estimation hölderienne des solutions de (PE) en variable temporelle :

$$\|u(t) - u(t')\|_{L^{r,\infty}} \leq C(t-t')^{\frac{1}{2}}(t')^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{r}}, \quad 1 < r < 2, \quad 0 < t' < t. \quad (5.2)$$

Cette estimation repose à son tour sur un résultat de continuité en zéro pour le semi-groupe de la chaleur (voir aussi [147] pour une inégalité semblable) :

$$\|(e^{t\Delta} - \text{Id})f\|_{L^{r,\infty}} \leq C t^{\frac{1}{2}} \|(-\Delta)^{1/2}f\|_{L^{r,\infty}}, \quad 1 < r < \infty.$$

5.2.2 Explosion en temps fini de solutions à valeurs complexes

[B14] P. Biler, L. Brandolese,

Global Existence versus blow up for some models of interacting particles,
Colloq. Math. **106**, N. 2 (2006), 293–303.

Nous avons déjà mentionné dans l'introduction de ce chapitre que, pour les solutions positives de (PE), au delà de la valeur critique de la masse $M = 8\pi$, l'effet de concentration est prépondérant par rapport à la diffusion, et les solutions explosent en temps fini. Le but de notre article [B14] était de mettre en évidence le fait que de différents mécanismes de formation de singularités peuvent se produire. En particulier, nous démontrons que des solutions non-positives (en fait, à valeurs complexes) et infiniment oscillantes peuvent exploser.

En effet, nous démontrons en collaboration avec P. Biler le théorème suivant :

Théorème 23. *Soit $\tau \geq 0$. Il existe $w_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, tel que $\widehat{w}_0 \geq 0$ est à support compact, $\|\widehat{w}_0\|_{L^1} = 1$ et tel que si $A > 0$ est suffisamment grand, alors la solution u^τ de (PE) ou de (PP) avec donnée initiale $u_0 = Aw_0$ explose en temps fini : pour un certain $T^* < \infty$, et pour tout $s \in \mathbb{R}$:*

$$\sup_{0 \leq t < T^*} \|u^\tau(t)\|_{\dot{B}_\infty^{s, \infty}} = \infty.$$

En particulier, toute norme de Lebesgue, de Sobolev, de Triebel-Lizorkin, d'Hölder-Zygmund de u^τ explose.

Nous renvoyons à la section 2.4, ou à [89, 146], pour la définition des espaces de Besov homogènes $\dot{B}_p^{s, q}$. En utilisant la caractérisation de Littlewood-Paley des espaces homogènes classiques (Lebesgue, Sobolev, etc.) on voit facilement que ces espaces s'injectent dans $\dot{B}_\infty^{s, \infty}$, pour une valeur convenable de s .

La démonstration du théorème 23 s'inspire d'un article de S. Montgomery-Smith [157], qui avait établi un résultat semblable pour l'équation $\partial_t u + \Lambda(u^2) = \Delta u$, où $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$.

L'idée principale consiste à écrire l'équation intégrale vérifiée par la transformée de Fourier, à savoir

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi) + \int_0^t \int_0^s \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\xi \cdot \eta}{\tau} e^{-(t-s)|\xi|^2} e^{-\frac{1}{\tau}(s-\sigma)|\eta|^2} \widehat{u}(\xi - \eta, s) \widehat{u}(\eta, \sigma) d\eta d\sigma ds, \quad (5.3)$$

pour le système (PP) et

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi) + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^t e^{(s-t)|\xi|^2} i\xi \cdot \left(\widehat{u}(\xi, s) * \frac{i\xi}{-|\xi|^2} \widehat{u}(\xi, s) \right) ds \quad (5.4)$$

pour le système (PE).

On considère ensuite le schéma itératif usuel conduisant à la construction des solutions mild : $u_1 = e^{t\Delta} u_0$, et $u_k = e^{t\Delta} u_0 - B_\tau(u_{k-1}, u_{k-1})$ ($k = 1, 2, \dots$). On cherche alors à obtenir des minorations ponctuelles pour la transformée de Fourier. Cependant, la relation de récurrence ci-dessus ne préserve pas la positivité de la transformée de Fourier. Pour contourner cet obstacle nous choisissons des données initiales de la forme $\widehat{u}_0 = A\widehat{w}_0$ avec $w_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\text{supp } \widehat{u}_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : 2^{-1} \leq \xi_1 \leq |\xi| \leq 1\}$. Ensuite, pour $k = 0, 1, \dots$, on considère le cône

$$E_k = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d : 2^{k-1} \leq \xi_1 \leq |\xi| \leq 2^k \right\}.$$

Alors, pour $u_k = u_0^{2^k}$, on a $\widehat{u}_k = (2\pi)^{-d} (\widehat{u}_{k-1} * \widehat{u}_{k-1})$, d'où $\text{supp } \widehat{u}_k \subset E_k$. Cet argument implique que si, de plus, $\widehat{w}_0(\xi) \geq 0$, alors $\widehat{u}_k \geq 0$ pour tout k et ainsi $\widehat{u} \geq 0$.

Une fois ce renseignement obtenu, on montre par récurrence que

$$\widehat{u}(\xi, t) \geq \beta_k e^{-2^{2k}t} \mathbf{1}_{t_k \leq t < T^*}(t) \widehat{w}_k(\xi), \quad k = 1, 2, \dots$$

où (β_k) et (t_k) sont deux suites bien choisies, où $\beta_k \rightarrow \infty$ avec une vitesse doublement exponentielle et (t_k) est convergente (vers un temps $T^* < \infty$).

Notons que les conditions de positivité et de support que nous imposons sur la donnée initiale empêchent à la solution d'être à valeurs réelles. Les solutions construites dans le théorème 23 n'ont pas alors d'interprétation physique ou biologique. Ces solutions apportent cependant des renseignements sur les effets de la non-linéarité dans (PP) et (PE). Elles illustrent aussi les limitations des méthodes itératives pour l'obtention de l'existence globale de solutions de (PP), un problème qui est actuellement ouvert.

5.3 Perspectives et développements

5.3.1 Sur le modèle parabolique-parabolique

Concernant le problème de la convergence des solutions du problème (PP) vers les solutions du système (PE) pour $\tau \rightarrow 0$, tous les résultats connus à ce jour ne sont valables que pour des solutions petites. Il est cependant raisonnable de penser que la convergence puisse avoir lieu sans imposer aucune condition de petitesse.

Une question ouverte importante relative au système (PP) est l'intervalle exact des valeurs de M pour lesquelles on a l'existence de solutions autosimilaires. Pour le système (PE), il a été démontré que cette intervalle est précisément $[0, 8\pi[$. De plus, pour chaque M dans cet intervalle, ces solutions sont uniques et décrivent le comportement asymptotique des solutions globales génériques de (PE), positives et intégrables. Concernant le système (PP), on sait que $M < M(\tau)$, où $M(\tau)$ croît linéairement avec τ , est une condition nécessaire pour l'existence de solutions autosimilaires. Voir [17] pour des résultats récents dans cette direction. De plus, pour ce système et pour $M > 0$ assez petit, ces solutions sont importantes parce qu'elles fournissent des bornes sur de la décroissance en variables d'espace-temps des solutions génériques (voir [159]). Les solutions autosimilaires sont, par leur nature même, des solutions globales. Leur étude nous renseigne alors sur le problème fondamental de l'existence de solutions explosives pour le système (PP) pour des valeurs $M > 8\pi$ de la masse totale : elle conduit notamment à imposer des conditions supplémentaires assurant une forte concentration initiale, comme la petitesse des moments d'ordre deux $\int |x|^2 u_0(x) dx$, pour la recherche de telles solutions.

5.3.2 Sur les méthodes itératives d'explosion

Les résultats obtenus dans [B14] s'étendent à certains systèmes paraboliques semi-linéaires de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u_j = \Delta u_j + \nabla \cdot \left(\sum_{h,k=1}^m c_{j,h,k} u_h K[u_k] \right), \\ u|_{t=0}(x) = u_0(x). \end{cases} \quad (j = 1, \dots, m). \quad (5.5)$$

Ici $u = (u_1, \dots, u_m)$ est défini dans \mathbb{R}^d , et $c_{j,h,k} \in L^\infty$. Dans le cas de (PE), par exemple, on a $m = 1$, les coefficients $c_{j,h,k}$ sont constants égaux à 1, et $K[u] = \nabla E_d * u$, où E_d est la solution fondamentale du Laplacien dans \mathbb{R}^d . D'autres exemples de modèles classiques obtenus comme cas particuliers de (5.5) sont le système de Debye et celui de Nernst et Planck, voir [14, 16]. Les méthodes itératives décrites dans la section 5.2.2 conduisent à des résultats d'explosion en temps fini pour des solutions à *valeurs réelles* de quelques systèmes de la forme (5.5), dans lesquels les coefficients et le noyau K vérifient certaines conditions de compatibilité. C'est une piste qu'il conviendrait d'explorer, s'il devait s'avérer que les systèmes obtenus ont des interprétations physiques intéressantes.

Signalons qu'un raffinement de la méthode que nous avons illustrée dans la section 5.2.2 a conduit à la construction, par D. Li et Y. Sinai [139], d'une solution de Navier–Stokes à valeurs complexes, initialement d'énergie finie, qui explose en temps fini. Comme dans [157] et [B14], les arguments itératifs et la positivité de la transformée de Fourier jouent un rôle essentiel. Bien entendu, la nature vectorielle du système de Navier—Stokes et la condition de divergence nulle compliquent considérablement le choix de la donnée initiale, expliquant ainsi la nature technique de [139].

Chapitre 6

Une incursion en théorie de l'approximation et de multiplicateurs de Sobolev

Dans ce chapitre nous présentons les résultats principaux de nos articles [B15] et [B16]. Le premier article est une incursion dans la théorie de l'approximation non-linéaire et des bases d'ondelettes. Nous donnons une nouvelle caractérisation d'une famille d'espaces de Besov homogènes, à l'aide de décompositions atomiques faisant intervenir des noyaux de Poisson convenablement dilatés et translatés. La motivation à l'origine de [B15] était de mieux comprendre les propriétés fonctionnelles des *séries d'ondelettes creuses*. En effet, dans la thèse nous avons mis en évidence certaines classes de solutions des équations de Navier–Stokes admettant un développement creux en série d'ondelettes. Pour ces solutions les schémas en ondelettes fournissent des algorithmes d'approximation très efficaces.

Le deuxième article est une incursion dans l'analyse réelle. Nous établissons un lien entre certains espaces de molécules des espaces de Hardy, introduits par G. Furioli et E. Terraneo [94, 137] et la réalisation, à la Bourdaud, des espaces de Sobolev homogènes. La motivation de ce deuxième travail a été la remarque que les espaces de molécules considérés dans [94] s'interprètent en termes de localisation spatiale. Une fois appliqués aux équations de Navier–Stokes, ces espaces donnent alors une nouvelle perspective à certains résultats du chapitre 1.

6.1 Noyaux de Poisson et séries creuses d'ondelettes

[B15] L. Brandolese,
Poisson kernels and sparse wavelet expansions,
Proc. Amer. Math. Soc. **133**, N. 11, 3345–3353 (2005)

L'une des propriétés les plus frappantes des séries creuses d'ondelettes c'est que les fonctions dont la série d'ondelettes est creuse (ou lacunaire) ont généralement des propriétés géométriques remarquables. Par exemple, presque toute fonction (au sens des catégories de Baire) qui est la somme d'une série d'ondelette creuse est *multifractale*. Autrement dit, les ensembles A_α où cette fonction a un exposant α de régularité d'Hölder, forment une collection infinie d'ensembles fractaux de dimensions d'Hausdorff différente. Un fait crucial pour les applications c'est que, d'une certaine manière, la réciproque est vraie aussi : un grand nombre de fonctions que l'on rencontre en traitement du signal ou en turbulence sont la somme de séries creuses d'ondelettes, précisément parce qu'ils ont des propriétés géométriques remarquables. Des confirmations frappantes à ce paradigme ont été fournies par S. Jaffard et Y. Meyer dans [118].

Une série creuse d'ondelettes dans \mathbb{R}^d est une série de la forme

$$f(x) = \sum_{\psi \in F} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \alpha(j, k) \psi(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (6.1)$$

où

$$\alpha(j, k) = 2^{dj} \int f(x) \bar{\psi}(2^j x - k) dx, \quad (6.2)$$

F est un ensemble fini d'ondelettes orthogonales et seul un petit nombre de coefficients $|\alpha(j, k)|$ dépasse des seuils préfixés.

Dans cette section on s'intéressera surtout aux séries d'ondelettes *infinitement creuses*. Celles-ci sont définies par la condition que le réordonnement décroissant $(c_n^*)_{n=1}^\infty$ de $|\alpha(j, k)|$ décroît rapidement vers zéro pour $n \rightarrow \infty$ (plus vite que n^{-q} pour tout $q \in \mathbb{N}$). Cette condition peut s'exprimer de manière équivalente par l'appartenance à tous les espaces $\ell^p(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d)$:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\alpha(j, k)|^p < \infty \quad \text{pour tout } p > 0. \quad (6.3)$$

On sait aussi (voir [89, 146]) que (6.1)-(6.3) équivaut à $f \in \cap_{0 < p \leq 1} \dot{B}_p^{d/p, p}(\mathbb{R}^d)$, où $\dot{B}_p^{s, q}$ ($s \in \mathbb{R}$, $p > 0$ et $q > 0$) désigne l'espace de Besov homogène. Ici et par la suite nous travaillons avec les ondelettes de Lemarié-Meyer. Il s'agit donc d'ondelettes appartenant à la classe de Schwartz.

Récemment, il y a eu un intérêt considérable pour exprimer des fonctions générales comme des séries de dilatés-translatés de fonctions fixées, autres que des ondelettes. L'une des motivations c'est que cela conduit à des nouvelles caractérisations des espaces de fonctions classiques. Par exemple, soit $g(x)$ la gaussienne dans \mathbb{R}^d et $g_{\lambda, x_0}(x) = g(\lambda(x - x_0))$, avec $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$, et considérons la famille des fonctions f telles que

$$f(x) = \sum_j \alpha_j g_{\lambda_j, x_j}(x) \quad (\text{avec } \alpha_j \in \mathbb{R}, \lambda_j > 0 \text{ et } x_j \in \mathbb{R}^d). \quad (6.4)$$

Si (α_j) décrit tout ℓ^1 , alors la famille des fonctions f de la forme (6.4) caractérise "l'algèbre des bosses" (*the hump algebra*), identifié dans [146] avec l'espace de Besov $\dot{B}_1^{d, 1}(\mathbb{R}^d)$, qui joue un rôle important dans la modélisation de certains signaux [80].

Mentionnons également le travail de G. Kyriakis et P. Petruchev [128], qui ont construit une vaste famille de bases inconditionnelles pour les espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin, obtenues à partir d'un petit nombre de dilatés et translatés d'une seule fonction Φ .

Le but de notre article [B16] est de démontrer que les sommes de séries d'ondelettes creuses peuvent être caractérisées à l'aide de décompositions atomiques comme dans (6.4), mais à l'aide de *briques de bases faiblement localisés*. Plus précisément, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et tout $\lambda > 0$, nous allons considérer les noyaux de Poisson (rénormalisés en norme L^∞)

$$P_{\lambda, x_0}(x) = (1 + |\lambda(x - x_0)|^2)^{-(d+1)/2}, \quad x, x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda > 0 \quad (6.5)$$

On établit alors le résultat suivant.

Théorème 24. *Une distribution tempérée f appartient à $\cap_{0 < p \leq 1} \dot{B}_p^{d/p, p}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement s'il existe trois suites $(\lambda_j) \subset \mathbb{R}^+$, $(x_j) \subset \mathbb{R}^d$ et $(c_j) \subset \mathbb{R}$ telles que*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^p < \infty \quad \text{pour tout } p > 0 \quad (6.6)$$

et

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_{\lambda_j, x_j}(x), \quad (6.7)$$

la série étant uniformément convergente dans \mathbb{R}^d .

Compte tenu du fait que les noyaux de Poisson sont des fonctions rationnelles (en dimension impaire), ce théorème est dans le sillage des travaux fondateurs de Newmann et Peller sur l'approximation non-linéaire. En effet, l'article [162] caractérisait l'espace $\cap_{p>0} \dot{B}_p^{1/p,p}(\mathbb{T}^1)$: cet espace s'identifie à celui de toutes les fonctions périodiques, qui sont approximables par des fonctions rationnelles avec un taux algébrique arbitrairement élevé. Autrement dit, la distance (en norme $\|\cdot\|_\infty$) entre une fonction appartenant à tous ces espaces de Besov et l'ensemble des fonctions rationnelles de degré $\leq N$ est inférieur à $C_q N^{-q}$, où q est arbitrairement grand. En dimension supérieure, l'approximation non-linéaire par des classes spécifiques de fonctions rationnelles à été traitée par Petruchev [167]. Cependant, dans [167], la régularité n'est pas mesurée pas les espaces de Besov classiques, mais par des espaces un peu plus compliqués. Un texte de référence sur l'approximation non-linéaire est celui de R. DeVore [76].

L'intérêt de décomposer les fonctions avec de termes peu décroissants vient de ce que les solutions de certaines EDP non locales sont faiblement décroissantes en variables d'espace. On peut alors essayer de décrire leurs propriétés de localisation spatiale en considérant des expansions du type

$$u(x, t) = \sum_m u_m(x - x_m, t),$$

où chaque terme u_m décroît avec le taux maximal autorisé par les opérateurs non locaux intervenant dans l'équation. Par exemple, dans le cas des équations de Navier-Stokes, ce taux maximal de décroissance est $|x|^{-d-1}$, comme on l'a vu dans le premier chapitre. Observons que les noyaux de Poisson décroissent eux aussi comme $|x|^{-d-1}$ pour $|x| \rightarrow \infty$.

Le résultat du théorème 24, en fait, s'applique aux solutions de Navier-Stokes : en effet, l'un des résultats de notre thèse [30] prouve que si le tourbillon est suffisamment localisé, alors le champ de vitesse vérifie $u(\cdot, t) \in \cap_{p>0} \dot{B}_p^{3/p,p}(\mathbb{R}^3)$ dans un certain intervalle de temps. Voir aussi [B8].

Méthodes utilisées

La partie subtile de la démonstration du théorème 24 est la démonstration que si $f \in \cap_{0<p\leq 1} \dot{B}_p^{d/p,p}(\mathbb{R}^d)$ alors on a (6.6)-(6.7). Comme la décomposition (6.7) n'est pas unique, on ne peut pas se limiter à démontrer le résultat pour tout p fixé, parce que dans ce cas les coefficients c_j dans (6.7) dépendraient alors de p .

D'autre part, grâce à la caractérisation des espaces de Besov en bases d'ondelettes rappelée plus haut, le seul problème est de développer chacune des ondelettes de Lemarié-Meyer $\psi \in F$ comme dans (6.6)-(6.7).

L'outil principal pour établir le théorème est la généralisation d'un algorithme de *cascade à travers les échelles* qui a été inventé par Y. Meyer dans [148] pour traiter une question analogue, mais avec des atomes gaussiens. Voici comment on procède :

Soit $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction avec transformée de Fourier strictement positive. La première étape consiste à écrire

$$\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\phi}(\xi)p(\xi) - \sum_{\substack{k_0 \in \mathbb{Z}^n \\ k_0 \neq 0}} R_{k_0}(\xi).$$

Ici p est une fonction périodique en chacune de ces variables, avec un certain période T_0 . Cette écriture est possible en prenant $R_{k_0}(\xi) \equiv \widehat{\psi}(\xi + k_0 T_0) \widehat{\phi}(\xi + k_0 T_0)^{-1} \widehat{\phi}(\xi)$. Ensuite chaque terme R_{k_0} est traité d'une manière semblable : on fixe deux réels positifs T_{k_0} , β_{k_0} et on écrit $R_{k_0}(\xi) = \widehat{\phi}(\beta_{k_0} \xi) p_{k_0}(\xi) - \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}^n, k_1 \neq 0} R_{k_0, k_1}(\xi)$. Ici, $R_{k_0, k_1}(\xi) \equiv R_{k_0}(\xi + k_1 T_{k_0}) \widehat{\phi}(\beta_{k_0}(\xi + k_1 T_{k_0}))^{-1} \widehat{\phi}(\beta_{k_0} \xi)$, de manière que p_{k_0} est T_{k_0} -périodique en chacune de ses variables. Après j étapes, $\widehat{\psi}$ s'écrit comme la somme de termes de la forme $\widehat{\phi}(\beta_{k_0, \dots, k_j} \xi) p_{k_0, \dots, k_j}(\xi)$, où p_{k_0, \dots, k_j} est périodique, plus un terme d'erreur E_j . Si l'on oublie pour un instant le terme d'erreur, on

voit alors, en prenant $j \rightarrow \infty$ et la transformée de Fourier inverse, que ψ s'écrit formellement comme une série de dilatés et translatés de ϕ .

Les propriétés agréables du noyau de Poisson nous permettent de rendre cet argument rigoureux quand $\phi = P$. Bien entendu, il est indispensable de bien choisir les périodes T_{k_0, \dots, k_j} et les facteurs d'échelle β_{k_0, \dots, k_j} . La condition (6.6) vient alors de quelques estimations fines sur la taille des coefficients de Fourier des fonctions p_{k_0, \dots, k_j} .

6.2 Application des multiplicateurs des espaces de Sobolev homogènes réalisés aux espaces de molécules

[B16] L. Brandolese,

Application of homogeneous realized Sobolev spaces to Navier-Stokes,
SIAM J. Math. Anal., **37**, N.2, 673-683 (2005).

Le résultat de cette section concerne les systèmes d'équations *non-locales* de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u + P(D)[\mathcal{Q}(u)] = \Delta u \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0 \quad (6.8)$$

où $u = (u_1, \dots, u_m)$, $\mathcal{Q}(u)$ est une forme quadratique en u_1, \dots, u_m et $P(D)$ est un opérateur pseudo-différentiel à coefficients constants d'ordre 1 :

$$\mathcal{F}[P(D)f] = h(\xi)\mathcal{F}(f)(\xi),$$

où \mathcal{F} est la transformée de Fourier et le symbole $h \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ est une fonction homogène de degré 1. L'exemple le plus simple est fourni par le modèle de Montgomery-Smith [157] (*the cheap Navier-Stokes equations*), dans lequel $m = 1$, $P(D) = (-\Delta)^{-1/2}$ est l'opérateur de Calderón et $\mathcal{Q}(u) = u^2$. Les équations de Navier-Stokes sont aussi un cas particulier du modèle (6.8), comme on le voit en prenant $m = d$, $P(D) = \mathbb{P} \operatorname{div}$ et $\mathcal{Q}(u) = u \otimes u$.

L'espace de Hardy \mathcal{H}^1 joue un rôle important dans l'étude de ces systèmes (voir, par exemple, [65, 94, 137, 152]). Pour illustrer cela, considérons le cas particulier des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^3 : lorsqu'une solution u de (NS) vérifie $\Delta u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$, on a grâce aux inclusions classiques $u \in L^3(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla \otimes u \in L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$. On a alors clairement $u \cdot \nabla u \in L^1$. Mais le lemme div-curl, de Coifman, Lions, Meyer, Semmes, nous dit beaucoup plus : $u \cdot \nabla u \in \mathcal{H}^1$. Mais alors $\nabla p \in \mathcal{H}^1$, grâce aux propriétés des transformées de Riesz dans l'espace de Hardy et à la relation classique $\Delta p = \sum_{h,k=1}^3 \partial_h \partial_k (u_h u_k)$. Cela signifie que lorsque $u \in \Delta^{-1} \mathcal{H}^1$, alors les trois termes dans (NS) qui déterminent $\partial_t u$ sont de la même régularité- \mathcal{H}^1 .

D'autre part, l'espace de Hardy a une structure très simple, due à sa décomposition atomique. Par conséquent, résoudre les équations dans $\Delta^{-1} \mathcal{H}^1$ amène à une décomposition naturelle des solutions en éléments simples. Une question naturelle est alors l'étude de chacun de ces éléments. Si la donnée initiale est un atome (et donc à support compact), cette propriété sera immédiatement détruite par l'évolution, à cause de la nature parabolique et non locale des équations (6.8). Un résultat intéressant dû à G. Furioli et E. Terraneo prouve cependant ceci : si Δu est une *molécule* de l'espace de Hardy (dans un sens proche à celui de Coifman et Weiss) au début de l'évolution, alors cette propriété sera conservée pendant un certain temps.

Pour ce faire, elles introduisent l'espace X_δ , avec $\frac{3}{2} < \delta < \frac{9}{2}$ et $\delta \neq \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, de toutes les distributions tempérées f , nulles à l'infini, telles que $\Delta f \in L^2(\mathbb{R}^3, (1 + |x|^2)^\delta dx)$ et $\int x^\alpha \Delta f(x) dx = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$ tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \delta - \frac{3}{2}$. La norme de X_δ est définie par

$$\|f\|_{X_\delta}^2 \equiv \int |\Delta f(x)|^2 (1 + |x|^2)^\delta dx.$$

Furioli et Terraneo [94] démontrent ceci : si $u_0 \in X_\delta$, alors il existe une unique solution mild $u \in C([0, T], X_\delta)$ des équations de Navier–Stokes, pour un certain $T > 0$ (avec $\frac{3}{2} < \delta < \frac{9}{2}$ et $\delta \neq \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$). Leur démonstration est très technique.

Résultats principaux et méthodes

Dans [B16], nous donnons une nouvelle démonstration, plus simple, du théorème de Furioli et Terraneo et nous étendons leur résultat. Notre approche, réside sur deux ingrédients. Le premier est l'utilisation d'espaces auxiliaires Z_δ étroitement liés aux espaces de molécules X_δ , mais mieux adaptés au traitement de la non-linéarité. En effet, contrairement à X_δ , notre espace Z_δ est une algèbre indépendamment de la valeur de δ .

Le deuxième ingrédient essentiel est la théorie des multiplicateurs des espaces de Sobolev homogènes *réalisés à la Bourdaud* (voir [27, 137]). En effet, nous remarquons que, pour $\delta > \frac{3}{2}$, une distribution f appartient à X_δ si et seulement si

$$q(\xi) \equiv |\xi|^2 \widehat{f}(\xi) \in H^\delta, \quad \text{et} \quad \partial^\alpha q(0) = 0, \quad \text{pour tout } 0 \leq |\alpha| \leq [\delta - \frac{3}{2}].$$

Ici H^δ est l'espace de Sobolev (qui s'injecte dans l'espace de Hölder $C^{\delta-3/2}$ pour $\delta > \frac{3}{2}$). Mais les deux conditions ci-dessus peuvent se réexprimer en affirmant que q appartient à $L^2(\mathbb{R}^2) \cap \dot{H}_{\text{rel}}^\delta$, où $\dot{H}_{\text{rel}}^\delta$ est la réalisation de l'espace de Sobolev homogène \dot{H}^δ . L'avantage d'utiliser l'espace réalisé, vient de ce que $\dot{H}_{\text{rel}}^\delta$ s'injecte dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, alors que les éléments de \dot{H}^δ ne sont pas des distributions tempérées, mais des classes d'équivalences de distributions modulo polynômes) : ainsi, la notion de multiplicateur ponctuel a bien un sens dans l'espace réalisé. Un résultat de G. Bourdaud [27] affirme que toute fonction homogène $m(\xi)$ de degré zéro, qui est C^∞ en dehors de l'origine, est un multiplicateur ponctuel pour ces espaces. Ce fait apporte une simplification cruciale dans l'étude de l'opérateur différentiel $P(D)$.

Par définition, l'espace Z_δ est l'ensemble de toutes les fonctions (ou des champs de vecteurs) f telles que :

$$f \in L^2(\mathbb{R}^3, (1 + |x|^2)^{\delta-2} dx), \quad \nabla f \in L^2(\mathbb{R}^3, (1 + |x|^2)^{\delta-1} dx), \quad \text{et} \\ \Delta f \in L^2(\mathbb{R}^3, (1 + |x|^2)^\delta dx).$$

Cet espace est muni de sa norme naturelle. Le résultat principal de [B16] est alors :

Théorème 25. *Soit $\frac{1}{2} \leq \delta < \frac{9}{2}$ et soit $u_0 \in Z_\delta$. Alors il existe $T > 0$ tel que le problème (6.8) possède une unique solution mild $u \in C([0, T], Z_\delta)$.*

Le lien avec le théorème 25 et le résultat de Furioli et Terraneo est illustré par les caractérisations suivantes (avec les équivalences des normes), établies dans [B16] :

$$X_\delta = Z_\delta, \quad \text{si } \frac{1}{2} < \delta < \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad \delta \neq \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \\ X_\delta = Z_\delta \cap \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^3) : \int f = 0 \right\}, \quad \text{si } \frac{7}{2} < \delta < \frac{9}{2}.$$

Un corollaire est le résultat suivant : pour $\frac{1}{2} < \delta < \frac{9}{2}$, dans le théorème 25 on peut remplacer l'espace Z_δ par X_δ . On retrouve ainsi une extension du résultat de Furioli et Terraneo : les conditions $\frac{3}{2} < \delta < \frac{9}{2}$ et $\delta \neq \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ de [94] sont maintenant relaxées par $\frac{1}{2} < \delta < \frac{9}{2}$.

Par des méthodes de découpage en couronnes dyadiques, on peut voir que les éléments de Z_δ sont $o(|x|^{-\delta+1/2})$ pour $|x| \rightarrow \infty$. Nous pouvons alors éclaircir le rôle des restrictions sur le paramètre δ : la condition $\delta \geq \frac{1}{2}$ est naturelle : elle empêche que $u \rightarrow \infty$ pour $|x| \rightarrow \infty$. D'autre part, la condition $\delta < \frac{9}{2}$ est optimale : dans le cas des équations de Navier–Stokes, par exemple, on ne peut avoir $u \in C([0, T], Z_{9/2})$ que si la donnée initiale vérifie des conditions algébriques supplémentaires, comme celles trouvées dans la section 1.1.1.

Liste des travaux présentés

- [B1] L. Brandolese, Y. Meyer, *On the instantaneous spreading for the Navier-Stokes system in the whole space*, Contr. Optim. Calc. Var. **8**, pp. 273–285 (2002)
- [B2] L. Brandolese, *Asymptotic behavior of the energy and pointwise estimates for solutions to the Navier-Stokes equations*, Rev. Mat. Iberoamericana **20**, 223–256 (2004)
- [B3] L. Brandolese, *Space-time decay of Navier-Stokes flows invariant under rotations*, Math. Ann. **329**, 685–706 (2004)
- [B4] L. Brandolese, F. Vigneron, *New asymptotic profiles of nonstationary solutions of the Navier–Stokes system*, J. Math. Pures Appl. **88**, 64–86 (2007).
- [B5] L. Brandolese *Concentration-Diffusion effects in viscous incompressible flows*, Indiana Univ. Math. J. **58**, N.2, 789–806 (2009).
- [B6] L. Brandolese, F. Vigneron, *On the localization of the velocity and the magnetic field in the MHD equations*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **137 A**, 475–495 (2007).
- [B7] L. Brandolese, M. E. Schonbek, *Large time decay and growth of solutions to a Boussinesq system*, Trans. Amer. Math. Soc. (à paraître).
- [B8] L. Brandolese, *Atomic decomposition for the vorticity of a viscous flow in the whole space*, Math. Nachr. **273**, 28–42 (2004)
- [B9] C. Bjorland, L. Brandolese, D. Iftimie, M. E. Schonbek, *L^p -solutions of the steady-state Navier–Stokes equations with rough external forces*, Comm. Part. Diff. Equ. (à paraître).
- [B10] H.-O. Bae, L. Brandolese, *On the effect of external forces on incompressible fluid motions at large distances*, Ann. Univ. Ferrara (2009).
- [B11] L. Brandolese, *Fine properties of self-similar solutions of the Navier–Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **192**, N.3, 375–401 (2009)
- [B12] L. Brandolese, G. Karch, *Far-field asymptotics of solutions to convection equations with anomalous diffusion*, J. Evol. Equ. **8**, 307–326 (2008)
- [B13] P. Biler, L. Brandolese *On the parabolic-elliptic limit of the doubly parabolic Keller–Segel system modelling chemotaxis*, Studia Math., **193**, N.3, 241–261 (2009).
- [B14] P. Biler, L. Brandolese, *Global existence and finite time blow up for some model of interacting particles* Colloq. Math. **106**, N.2, 293–303 (2006).
- [B15] L. Brandolese, *Poisson kernels and sparse wavelet expansions*, Proc. Amer. Math. Soc. **133**, N. 11, 3345–3353 (2005)
- [B16] L. Brandolese, *Application of homogeneous realized Sobolev spaces to Navier-Stokes*, SIAM J. Math. Anal., **37**, N.2, 673–683 (2005).

Autres travaux

Actes de colloque, et Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie de Sciences de Paris

[B17] L. Brandolese, *On the localization of symmetric and asymmetric solutions of the Navier–Stokes equations in \mathbb{R}^n* , C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **t.332**, pp. 125–130 (2001)

[B18] L. Brandolese, *Localisation de la vorticité et applications au comportement asymptotique de Navier-Stokes*, Journées Equations aux dérivées partielles, Forges-les-eaux, pp. III 1–13 (2002)

[B19] L. Brandolese, *Weighted- L^2 spaces and strong solutions to the Navier-Stokes equations*, Progr. Nonlinear Diff. Eq. Appl. **61**, 27–35 (2005).

[B20] H.-O. Bae, L. Brandolese, B. J. Jin, *Asymptotic behavior for the Navier–Stokes equations with nonzero external forces*, Nonlinear analysis **71**, N. 12, e292–e302 (2009). Doi : 10.1016/j.na.2008.10.074.

Bibliographie

- [1] H. Abidi and T. Hmidi, *On the global well-posedness for Boussinesq system*, J. Differential Equations **233** (2007), no. 1, 199–220.
- [2] H. Abidi, T. Hmidi, and S. Keraani, *On the global regularity of the axisymmetric Navier–Stokes–Boussinesq system*. preprint, arXiv :0908 :0894v1.
- [3] N. Alibaud, G. Karch, and C. Imbert, *Asymptotic properties of entropy solutions to fractal Burgers equations*, SIAM J. Math. Anal. (à paraître).
- [4] C. Amrouche, V. Girault, M. E. Schonbek, and T. P. Schonbek, *Pointwise decay of solutions and of higher derivatives to Navier–Stokes equations*, SIAM J. Math. Anal. **31** (2000), no. 4, 740–753.
- [5] P. Auscher, S. Dubois, and P. Tchamitchian, *On the stability of global solutions to Navier–Stokes equations in the space*, J. Math. Pures Appl. (9) **83** (2004), no. 6, 673–697.
- [6] H.-O. Bae and L. Brandolese, *On the effect of external forces on incompressible fluid motions at large distances*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. **55** (2009), no. 2, 225–238.
- [7] H.-O. Bae, L. Brandolese, and B. J. Jin, *Asymptotic behavior for the Navier–Stokes equations with nonzero external forces*, Nonlinear analysis **71** (2009), no. 12 (Electronique. Doi :10.1016/j.na.2008.10.074), e292–e302.
- [8] H.-O. Bae and B. J. Jin, *Temporal and spatial decays for the Navier–Stokes equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **135** (2005), no. 3, 461–477.
- [9] H.-O. Bae and B. J. Jin, *Upper and lower bounds of temporal and spatial decays for the Navier–Stokes equations*, J. Differential Equations **209** (2005), no. 2, 365–391.
- [10] J. T. Beale, T. Kato, and A. Majda, *Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations*, Comm. Math. Phys. **94** (1984), no. 1, 61–66.
- [11] P. Biler, *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles. III*, Colloq. Math. **68** (1995), no. 2, 229–239.
- [12] ———, *Local and global solvability of some parabolic systems modelling chemotaxis*, Adv. Math. Sci. Appl. **8** (1998), no. 2, 715–743.
- [13] ———, *A note on the paper of Y. Naito : “Asymptotically self-similar solutions for the parabolic system modelling chemotaxis” [in Self-similar solutions of nonlinear PDE, 149–160, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2006 ; MR2295185]*, Self-similar solutions of nonlinear PDE, Banach Center Publ., vol. 74, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2006, pp. 33–40.
- [14] P. Biler and L. Brandolese, *Global existence versus blow up for some models of interacting particles*, Colloq. Math. **106** (2006), no. 2, 293–303.
- [15] ———, *On the parabolic-elliptic limit of the doubly parabolic Keller–Segel system modelling chemotaxis*, Studia Math. **193** (2009), no. 3, 241–261.
- [16] P. Biler, M. Cannone, I. A. Guerra, and G. Karch, *Global regular and singular solutions for a model of gravitating particles*, Math. Ann. **330** (2004), no. 4, 693–708.
- [17] P. Biler, L. Corriaz, and J. Dolbeault, *Large mass self-similar solutions of the parabolic-parabolic Keller–Segel model of chemotaxis*, J. Math. Biol. (à paraître).
- [18] P. Biler, G. Karch, Ph. Laurençot, and T. Nadzieja, *The 8π -problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in a disc*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **27** (2006), no. 1, 133–147.
- [19] ———, *The 8π -problem for radially symmetric solutions of a chemotaxis model in the plane*, Math. Methods Appl. Sci. **29** (2006), no. 13, 1563–1583, DOI 10.1002/mma.743. MR2249579 (2007f :35156)
- [20] P. Biler, G. Karch, and W. A. Woyczyński, *Asymptotics for conservation laws involving Lévy diffusion generators*, Studia Math. **148** (2001), 171–192.
- [21] ———, *Critical nonlinearity exponent and selfsimilar asymptotics for Lévy conservation laws*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non-linéaire **18** (2001), 613–637.

- [22] A Biswas and D Swanson, *Navier–Stokes equations and weighed convolution inequalities in groups*, Comm. Part. Diff. Equ. **35** (2010), 555–589.
- [23] C. Bjorland, L. Brandolese, D. Iftimie, and M. E. Schonbek, *L^p -solutions of the steady-state Navier–Stokes equations with rough external forces*, Comm. Part. Diff. Equ. (à paraître), 555–589.
- [24] C. Bjorland and M. E. Schonbek, *Existence and stability of steady-state solutions with finite energy for the Navier–Stokes equation in the whole space*, Nonlinearity **22** (2009), no. 7, 1615–1637.
- [25] A. Blanchet, José A. Carrillo, and N. Masmoudi, *Infinite time aggregation for the critical Patlak–Keller–Segel model in \mathbb{R}^2* , Comm. Pure Appl. Math. **61** (2008), no. 10, 1449–1481.
- [26] A. Blanchet, J. Dolbeault, and B. Perthame, *Two-dimensional Keller–Segel model : optimal critical mass and qualitative properties of the solutions*, Electron. J. Differential Equations (2006), No. 44, 32 pp.
- [27] G. Bourdaud, *Localisation et multiplicateurs des espaces de Sobolev homogènes*, Manuscripta Math. **60** (1988), 93–130.
- [28] J. Bourgain and N. Pavlović, *Ill-posedness of the Navier–Stokes equations in a critical space in 3D*, J. Funct. Anal. **255** (2008), no. 9, 2233–2247.
- [29] L. Brandolese, *On the localization of symmetric and asymmetric solutions of the Navier–Stokes equations in \mathbb{R}^n* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), no. 2, 125–130.
- [30] ———, *Localisation, Oscillations et comportement asymptotique pour les équations de Navier–Stokes*, Thèse. ENS de Cachan (2001).
- [31] ———, *Localisation de la vorticité et applications au comportement asymptotique des solutions de Navier–Stokes*, (Forges-les-Eaux, 2002), Univ. Nantes, Nantes, 2002, pp. Exp. No. III, 13.
- [32] ———, *Atomic decomposition for the vorticity of a viscous flow in the whole space*, Math. Nachr. **273** (2004), 28–42.
- [33] ———, *Space-time decay of Navier–Stokes flows invariant under rotations*, Math. Ann. **329** (2004), no. 4, 685–706.
- [34] ———, *Asymptotic behavior of the energy and pointwise estimates for solutions to the Navier–Stokes equations*, Rev. Mat. Iberoamericana **20** (2004), no. 1, 223–256.
- [35] ———, *Application of the realization of homogeneous Sobolev spaces to Navier–Stokes*, SIAM J. Math. Anal. **37** (2005), no. 2, 673–683.
- [36] ———, *Poisson kernels and sparse wavelet expansions*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 11, 3345–3353.
- [37] ———, *Weighted L^2 -spaces and strong solutions of the Navier–Stokes equations in \mathbb{R}^3* , Trends in partial differential equations of mathematical physics, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 61, Birkhäuser, Basel, 2005, pp. 27–35, DOI 10.1007/3-7643-7317-2 3, (to appear in print).
- [38] ———, *Concentration-diffusion effects in viscous incompressible flows*, Indiana Univ. Math. J. **58** (2009), no. 2, 789–806.
- [39] ———, *Fine properties of self-similar solutions of the Navier–Stokes equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **192** (2009), no. 3, 375–401.
- [40] L. Brandolese and G. Karch, *Far field asymptotics of solutions to convection equation with anomalous diffusion*, J. Evol. Equ. **8** (2008), no. 2, 307–326.
- [41] L. Brandolese and Y. Meyer, *On the instantaneous spreading for the Navier–Stokes system in the whole space*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **8** (2002), 273–285. A tribute to J. L. Lions.
- [42] L. Brandolese and M. E. Schonbek, *Large time decay and growth of solutions to a Boussinesq system*, Trans. Amer. Math. Soc. (à paraître).
- [43] L. Brandolese and F. Vigneron, *New asymptotic profiles of nonstationary solutions of the Navier–Stokes system*, J. Math. Pures Appl. (9) **88** (2007), no. 1, 64–86.
- [44] ———, *On the localization of the magnetic and the velocity fields in the equations of magnetohydrodynamics*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **137** (2007), no. 3, 475–495.
- [45] H. Brezis, L. A. Peletier, and D. Terman, *A very singular solution of the heat equation with absorption*, Arch. Rational Mech. Anal. **95** (1986), no. 3, 185–209.
- [46] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), no. 6, 771–831.
- [47] V. Calvez and L. Corrias, *The parabolic–parabolic Keller–Segel model in \mathbb{R}^2* , Comm. Math. Sci. **6** (2008), no. 2, 417–447.
- [48] J. R. Cannon and E. DiBenedetto, *The initial value problem for the Boussinesq equations with data in L^p* , Approximation methods for Navier–Stokes problems (Proc. Sympos., Univ. Paderborn, Paderborn, 1979), Lecture Notes in Math., vol. 771, Springer, Berlin, 1980, pp. 129–144.

- [49] M. Cannone, *Ondelettes, paraproducts et Navier-Stokes*, Diderot Editeur, Paris, 1995. With a preface by Yves Meyer.
- [50] ———, *Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier–Stokes equations*, Handbook of mathematical fluid dynamics. Vol. III. Edited by S.J. Friedlander and D. Serre, Elsevier (2004), 161–244.
- [51] M. Cannone, C. He, and G. Karch, *Slowly decaying solutions to incompressible Navier–Stokes system*, Gakuto International Series. Mathematical Sciences and applications **20** (2010). À paraître.
- [52] M. Cannone and G. Karch, *Smooth or singular solutions to the Navier–Stokes system ?*, J. Differential Equations **197** (2004), no. 2, 247–274.
- [53] ———, *About the regularized Navier–Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **7** (2005), no. 1, 1–28.
- [54] M. Cannone and Y. Meyer, *Littlewood–Paley decomposition and Navier–Stokes equations*, Methods Appl. Anal. **2** (1995), no. 3, 307–319.
- [55] M. Cannone, Y. Meyer, and F. Planchon, *Solutions auto-similaires des équations de Navier–Stokes*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1993–1994, École Polytech., Palaiseau, 1994, pp. Exp. No. VIII, 12.
- [56] M. Cannone and F. Planchon, *Self-similar solutions for Navier–Stokes equations in \mathbf{R}^3* , Comm. Partial Differential Equations **21** (1996), no. 1-2, 179–193.
- [57] A. Carpio, *Large-time behavior in incompressible Navier–Stokes equations*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), no. 2, 449–475.
- [58] Th. Cazenave, F. Dickstein, and F. B. Weissler, *Chaotic behavior of solutions of the Navier–Stokes system in \mathbf{R}^N* , Adv. Differential Equations **10** (2005), no. 4, 361–398.
- [59] Th. Cazenave and F. B. Weissler, *Asymptotically self-similar global solutions of the nonlinear Schrödinger and heat equations*, Math. Z. **228** (1998), no. 1, 83–120.
- [60] A. Cheskidov, D. D. Holm, E. Olson, and E. S. Titi, *On a Leray- α model of turbulence*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **461** (2005), no. 2055, 629–649.
- [61] D. Chae, *Global regularity for the 2D Boussinesq equations with partial viscosity terms*, Adv. Math. **203** (2006), no. 2, 497–513, DOI 10.1016/j.aim.2005.05.001. MR2227730 (2007e :35223)
- [62] D. Chamorro, *Remarks on a fractional diffusion transport equation with application to the dissipative super-critical quasi-geostrophic equations* (2010). preprint, arXiv :1007.3919v1.
- [63] J.-Y. Chemin and I. Gallagher, *Wellposedness and stability results for the Navier–Stokes equations in \mathbf{R}^3* , Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26** (2009), no. 2, 599–624.
- [64] ———, *Large, global solutions to the Navier–Stokes equations, slowly varying in one direction*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 6, 2859–2873.
- [65] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer, and S. Semmes, *Compensated compactness and Hardy spaces*, J. Math. Pures Appl. (9) **72** (1993), no. 3, 247–286.
- [66] P. Constantin and C. Fefferman, *Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier–Stokes equations*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), no. 3, 775–789.
- [67] D. Córdoba, C. Fefferman, and R. de la Llave, *On squirt singularities in hydrodynamics*, SIAM J. Math. Anal. **36** (2004), no. 1, 204–213.
- [68] P. Constantin, A. J. Majda, and E. Tabak, *Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar*, Nonlinearity **7** (1994), no. 6, 1495–1533.
- [69] R. Danchin, *Analyse numérique et harmonique d’un problème de mécanique des fluides*, Thèse de Doctorat. Ecole polytechnique (1996).
- [70] ———, *A note on well-posedness for Camassa–Holm equation*, J. Differential Equations **192** (2003), no. 2, 429–444.
- [71] R. Danchin and M. Paicu, *Les théorèmes de Leray et de Fujita–Kato pour le système de Boussinesq partiellement visqueux*, Bull. Soc. Math. France **136** (2008), no. 2, 261–309.
- [72] ———, *Existence and uniqueness results for the Boussinesq system with data in Lorentz spaces*, Phys. D **237** (2008), no. 10-12, 1444–1460.
- [73] ———, *Global well-posedness issues for the inviscid Boussinesq system with Yudovich’s type data*, Comm. Math. Phys. **290** (2009), no. 1, 1–14.
- [74] C. De Lellis and L. Székelyhidi, *The Euler equations as a differential inclusion*, Ann. of Math. (2) **170** (2009), no. 3, 1417–1436.
- [75] C. de Lellis, T. Kappeler, and Peter Topalov, *Low-regularity solutions of the periodic Camassa–Holm equation*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 1-3, 87–126.
- [76] R. DeVore, *Nonlinear approximation*, Acta Numer. (1998), 1–99.

- [77] S. Y. Dobrokhotov and A. I. Shafarevich, *Parametrix and asymptotic behavior of localized solutions of Navier-Stokes equations in \mathbf{R}^3 that are linearized on a smooth flow*, Mat. Zametki **51** (1992), no. 1, 72–82 (Russian); English transl., Math. Notes **51** (1992), no. 1-2, 47–54.
- [78] ———, *Some integral identities and remarks on the decay at infinity of the solutions to the Navier-Stokes equations in the entire space*, Russian J. Math. Phys. **2** (1994), no. 1, 133–135.
- [79] ———, *On the behavior of an incompressible fluid velocity field at infinity*, Izv. Ross. Akad. Nauk Mekh. Zhidk. Gaza **4** (1996), 38–42 (Russian); English transl., Fluid Dynam. **31** (1996), no. 4, 511–514 (1997).
- [80] D. Donoho, I. M. Johnstone, G. Kerckhacharian, and D. Picard, *Wavelet shrinkage : asymptopia ?*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B **57** (1995), 301–369.
- [81] J. Droniou and C. Imbert, *Fractal first order partial differential equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. **182** (2006), 299–331.
- [82] L. Escauriaza, G. A. Serëgin, and V. Šverák, *$L_{3,\infty}$ -solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness*, Uspekhi Mat. Nauk **58** (2003), no. 2(350), 3–44 (Russian); English transl., Russian Math. Surveys **58** (2003), no. 2, 211–250.
- [83] L. Escauriaza, G. Serëgin, and V. Šverák, *Backward uniqueness for parabolic equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **169** (2003), no. 2, 147–157.
- [84] E. B. Fabes, B. F. Jones, and N. M. Rivière, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^p* , Arch. Rational Mech. Anal. **45** (1972), 222–240.
- [85] J. Fan and Y. Zhou, *A note on regularity criterion for the 3D Boussinesq system with partial viscosity*, Appl. Math. Lett. **22** (2009), no. 5, 802–805.
- [86] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 26, Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [87] E. Feireisl and M. E. Schonbek. En préparation.
- [88] F. Filbet, *A finite volume scheme for the Patlak-Keller-Segel chemotaxis model*, Numer. Math. **104** (2006), no. 4, 457–488, DOI 10.1007/s00211-006-0024-3. MR2249674 (2007e :92002)
- [89] M Frazier, B. Jawerth, and G. Weiss, *Littlewood–Paley theory and the study of function spaces*, CBMS Regional Con. Series in Math., vol. 79, American Math. Soc., Providence, 1991.
- [90] Y. Fujigaki and T. Miyakawa, *On solutions with fast decay of nonstationary Navier-Stokes system in the half-space*, Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, I, Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 1, Kluwer/Plenum, New York, 2002, pp. 91–120.
- [91] ———, *Asymptotic profiles of nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in \mathbb{R}^n and \mathbb{R}_+^n* , Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku **1225** (2001), 14–33. Mathematical analysis in fluid and gas dynamics (Japanese) (Kyoto, 2000).
- [92] ———, *Asymptotic profiles of nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in the whole space*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), no. 3, 523–544.
- [93] ———, *Asymptotic profiles of nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in the half-space*, Methods Appl. Anal. **8** (2001), no. 1, 121–157.
- [94] G. Furioli and E. Terraneo, *Molecules of the Hardy space and the Navier–Stokes equations*, Funk. Ekvac. **45** (2002), no. 22, 141–160.
- [95] G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I et II*, Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 38 et 39, Springer-Verlag, New York, 1994. Linearized steady problems.
- [96] I. Gallagher and Th. Gallay, *Uniqueness for the two-dimensional Navier-Stokes equation with a measure as initial vorticity*, Math. Ann. **332** (2005), no. 2, 287–327.
- [97] I. Gallagher, D. Iftimie, and F. Planchon, *Asymptotics and stability for global solutions to the Navier-Stokes equations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **53** (2003), no. 5, 1387–1424.
- [98] Th. Gallay and C. E. Wayne, *Long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on \mathbb{R}^3* , R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **360** (2002), no. 1799, 2155–2188. Recent developments in the mathematical theory of water waves (Oberwolfach, 2001).
- [99] ———, *Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on \mathbb{R}^2* , Arch. Ration. Mech. Anal. **163** (2002), no. 3, 209–258.
- [100] ———, *Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation*, Comm. Math. Phys. **255** (2005), no. 1, 97–129.
- [101] M.-H. Giga, Y. Giga, and J. Saal, *Nonlinear partial differential equations*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 79, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2010. Asymptotic behavior of solutions and self-similar solutions. MR2656972

- [102] Y. Giga and T. Kambe, *Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), no. 4, 549–568.
- [103] Y. Giga, K. Inui, J. Kato, and S. Matsui, *Remarks on the uniqueness of bounded solutions of the Navier-Stokes equations*, Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part 6 (Catania, 2000), 2001, pp. 4151–4156.
- [104] Y. Giga, S. Matsui, and O. Sawada, *Global existence of two-dimensional Navier-Stokes flow with non-decaying initial velocity*, J. Math. Fluid Mech. **3** (2001), no. 3, 302–315.
- [105] Y. Giga and T. Miyakawa, *Navier-Stokes flow in \mathbb{R}^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces*, Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), no. 5, 577–618.
- [106] Y. Giga, T. Miyakawa, and H. Osada, *Two-dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **104** (1988), no. 3, 223–250.
- [107] B. Guo and G. Yuan, *On the suitable weak solutions for the Cauchy problem of the Boussinesq equations*, Nonlinear Anal. **26** (1996), no. 8, 1367–1385, DOI 10.1016/0362-546X(94)00350-Q. MR1377668 (97b :35152)
- [108] C. He and T. Miyakawa, *On L^1 -summability and asymptotic profiles for smooth solutions to Navier-Stokes equations in a 3D exterior domain*, Math. Z. **245** (2003), no. 2, 387–417.
- [109] ———, *On two-dimensional Navier-Stokes flows with rotational symmetries*, Funkcial. Ekvac. **49** (2006), no. 2, 163–192.
- [110] ———, *Nonstationary Navier-Stokes flows in a two-dimensional exterior domain with rotational symmetries*, Indiana Univ. Math. J. **55** (2006), no. 5, 1483–1555.
- [111] ———, *On weighted-norm estimates for nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in a 3D exterior domain*, J. Differential Equations **246** (2009), no. 6, 2355–2386.
- [112] C. He and Z. Xin, *On the decay properties of solutions to the non-stationary Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **131** (2001), no. 3, 597–619.
- [113] ———, *Partial regularity of suitable weak solutions to the incompressible magnetohydrodynamic equations*, J. Funct. Anal. **227** (2005), no. 1, 113–152.
- [114] ———, *On the self-similar solutions of the magneto-hydro-dynamic equations*, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. **29** (2009), no. 3, 583–598.
- [115] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, *A blow-up mechanism for a chemotaxis model*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **24** (1997), no. 4, 633–683.
- [116] A. A. Himonas, G. Misiołek, G. Ponce, and Y. Zhou, *Persistence properties and unique continuation of solutions of the Camassa-Holm equation*, Comm. Math. Phys. **271** (2007), no. 2, 511–522.
- [117] T. Hmidi and F. Rousset, *Global well-posedness and asymptotic behavior for a convection problem, in \mathbb{R}^n* . preprint, arXiv :0912.1353v1.
- [118] S. Jaffard and Y. Meyer, *On the pointwise regularity of functions in critical Besov spaces*, J. Funct. Anal. **175** (2000), 415–434.
- [119] W. Jäger and S. Luckhaus, *On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992), no. 2, 819–824.
- [120] B. Jourdain, S. Méléard, and W. Woźczyński, *A probabilistic approach for nonlinear equations involving the fractional Laplacian and singular operator*, Potent. Anal. **23** (2005), 55–81.
- [121] B. B. Kadomtsev, *Tokamak plasma : a complex physical system*, 1992.
- [122] G. Karch and N. Prioux, *Self-similarity in viscous Boussinesq equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 3, 879–888.
- [123] J. Kato, *The uniqueness of nondecaying solutions for the Navier-Stokes equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **169** (2003), no. 2, 159–175.
- [124] T. Kato, *Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in \mathbf{R}^m , with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), no. 4, 471–480.
- [125] ———, *Strong solutions to the Navier-Stokes equations in Morrey spaces*, Bol. Soc. Bras. Mat. **22** (1992), no. 2, 127–155.
- [126] T. Kato and H. Fujita, *On the nonstationary Navier-Stokes system*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **32** (1962), 243–260.
- [127] S. Kida, *Three-dimensional Periodic Flows with High-Symmetry*, J. Phys. Soc. Japan **54** (1985), 2132–2136.
- [128] G. Kyriazis and P. Petrushev, *New bases for Triebel-Lizorkin and Besov spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 2, 749–786.

- [129] H. Koch and D. Tataru, *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Adv. Math. **157** (2001), no. 1, 22–35.
- [130] V. Kolokoltsov, *Symmetric stable laws and stable-like jump-diffusions*, Proc. London Math. Soc **80** (2000), 1–77.
- [131] H. Kozono, *L^1 -solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains*, Math. Ann. **312** (1998), no. 2, 319–340.
- [132] H. Kozono and M. Yamazaki, *The stability of small stationary solutions in Morrey spaces of the Navier-Stokes equation*, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), no. 4, 1307–1336.
- [133] ———, *Exterior problem for the Navier-Stokes equations, existence, uniqueness and stability of stationary solutions*, Theory of the Navier-Stokes equations, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., vol. 47, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998, pp. 86–98.
- [134] I. Kukavica, *On local uniqueness of weak solutions of the Navier-Stokes system with bounded initial data*, J. Differential Equations **194** (2003), no. 1, 39–50.
- [135] I. Kukavica and J. J. Torres, *Weighted bounds for the velocity and the vorticity for the Navier-Stokes equations*, Nonlinearity **19** (2006), no. 2, 293–303.
- [136] ———, *Weighted L^p decay for solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 4-6, 819–831.
- [137] P. G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, vol. 431, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.
- [138] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), no. 1, 193–248.
- [139] D. Li and Y. G. Sinai, *Blow ups of complex solutions of the 3D Navier-Stokes system and renormalization group method*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **10** (2008), no. 2, 267–313.
- [140] Pierre-Louis Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 3, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Incompressible models; Oxford Science Publications.
- [141] ———, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 10, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Compressible models; Oxford Science Publications.
- [142] A. Mahalov, B. Nicolaenko, and T. Shilkin, *$L_{3,\infty}$ -solutions to the MHD equations*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **336** (2006), no. Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezh. Vopr. Teor. Funkts. 37, 112–132, 275–276; English transl., J. Math. Sci. (N. Y.) **143** (2007), no. 2, 2911–2923.
- [143] J. Málek, J. Nečas, M. Pokorný, and M. E. Schonbek, *On possible singular solutions to the Navier-Stokes equations*, Math. Nachr. **199** (1999), 97–114.
- [144] F. Marchand and P. G. Lemarié-Rieusset, *Solutions auto-similaires non radiales pour l'équation quasi-géostrophique dissipative critique*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **341** (2005), no. 9, 535–538.
- [145] K. Masuda, *Weak solutions of Navier-Stokes equations*, Tohoku Math. J. (2) **36** (1984), no. 4, 623–646.
- [146] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs. I et II*, Actualités Mathématiques., Hermann, Paris, 1990. Ondelettes.
- [147] ———, *Wavelets, paraproducts, and Navier-Stokes equations*, Current developments in mathematics, 1996 (Cambridge, MA), Int. Press, Boston, MA, 1997, pp. 105–212.
- [148] ———, *Un problème mathématique lié à la compression*, ENS de Cachan. Manuscrit (1999).
- [149] ———, *Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution equations. The fifteen Dean Jaqueline B. Lewis Memorial Lectures*, Vol. 22, 2002.
- [150] W. Miller, *Symmetry groups and their applications*, Academic Press, New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 50.
- [151] J. R. Miller, M. O'Leary, and M. E. Schonbek, *Nonexistence of singular pseudo-self-similar solutions of the Navier-Stokes system*, Math. Ann. **319** (2001), no. 4, 809–815.
- [152] T. Miyakawa, *Application of Hardy space techniques to the time-decay problem for incompressible Navier-Stokes flows in \mathbb{R}^n* , Funkcial. Ekvac. **41** (1998), no. 3, 383–434.
- [153] ———, *On space-time decay properties of nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in \mathbf{R}^n* , Funkcial. Ekvac. **43** (2000), no. 3, 541–557.
- [154] ———, *Notes on space-time decay properties of nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in \mathbb{R}^n* , Funkcial. Ekvac. **45** (2002), no. 2, 271–289.
- [155] ———, *On upper and lower bounds of rates of decay for nonstationary Navier-Stokes flows in the whole space*, Hiroshima Math. J. **32** (2002), no. 3, 431–462.

- [156] T. Miyakawa and M. E. Schonbek, *On optimal decay rates for weak solutions to the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^n* , Proceedings of Partial Differential Equations and Applications (Olomouc, 1999), 2001, pp. 443–455.
- [157] S. Montgomery-Smith, *Finite time blow up for a Navier-Stokes like equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 10, 3025–3029.
- [158] T. Ogawa, S. V. Rajopadhye, and M. E. Schonbek, *Energy decay for a weak solution of the Navier-Stokes equation with slowly varying external forces*, J. Funct. Anal. **144** (1997), no. 2, 325–358.
- [159] Yūki Naito, *Asymptotically self-similar solutions for the parabolic system modelling chemotaxis*, Self-similar solutions of nonlinear PDE, Banach Center Publ., vol. 74, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2006, pp. 149–160.
- [160] K. Ohkitani and J. D. Gibbon, *Numerical study of singularity formation in a class of Euler and Navier-Stokes flows*, Phys. Fluids **12** (2000), no. 12, 3181–3194.
- [161] M. Oliver and E. S. Titi, *Remark on the rate of decay of higher order derivatives for solutions to the Navier-Stokes equations in \mathbf{R}^n* , J. Funct. Anal. **172** (2000), no. 1, 1–18.
- [162] V. Peller, *Hankel operators of the class S_p , investigations on the rate of rational approximations and other applications*, Math. Sb. **122** (1980), 481–510.
- [163] R. B. Pelz, *Locally self-similar, finite-time collapse in a high symmetry vortex filament model*, Phys. Rev. E **55** (1997), no. 2, 1617–1626.
- [164] ———, *Discrete groups, symmetric flows and hydrodynamic blowup*, Tubes, sheets and singularities in fluid dynamics (Zakopane, 2001), Fluid Mech. Appl., vol. 71, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, pp. 269–283.
- [165] Pelz. R. B., *Extended series analysis of full octahedral flow : numerical evidence for hydrodynamic blowup*, Fluid Dyn. Res. **33** (2003), 207.
- [166] R. B. Pelz, Y. Gulak, J. M. Greene, and O. N. Boratav, *On the finite-time singularity problem in hydrodynamics*, Fundamental problematic issues in turbulence (Monte Verita, 1998), Trends Math., Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 33–40.
- [167] P. Petruchev, *Multivariate n -term rational and piecewise polynomial approximation*, J. Approx. Theory **121** (2003), no. 1, 128–197.
- [168] F. Planchon, *Asymptotic behavior of global solutions to the Navier-Stokes equations in \mathbf{R}^3* , Rev. Mat. Iberoamericana **14** (1998), no. 1, 71–93.
- [169] E. R. Priest, *Solar magnetohydrodynamics*, Geophysics and Astrophysics monographs, vol. 21, Reidel, Dordrecht, 1982.
- [170] N. Prioux, *Asymptotic stability results for systems of nonlinear evolution equations*, Adv. Math. Sci. Appl. **17** (2007), no. 1, 37–65.
- [171] A. Raczyński, *Stability property of the two-dimensional Keller-Segel model*, Asymptot. Anal. **61** (2009), no. 1, 35–59.
- [172] F. Ribaud and A. Youssfi, *Global solutions and self-similar solutions of semilinear wave equation*, Math. Z. **239** (2002), no. 2, 231–262.
- [173] O. Sawada and Y. Taniuchi, *A remark on L^∞ solutions to the 2-D Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. **9** (2007), no. 4, 533–542.
- [174] V. Scheffer, *An inviscid flow with compact support in space-time*, J. Geom. Anal. **3** (1993), no. 4.
- [175] A. Shnirelman, *On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation*, Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997), no. 12, 1261–1286.
- [176] M. E. Schonbek, *L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **88** (1985), no. 3, 209–222.
- [177] ———, *Lower bounds of rates of decay for solutions to the Navier-Stokes equations*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no. 3, 423–449.
- [178] M. E. Schonbek, T. P. Schonbek, and Endre Süli, *Large-time behaviour of solutions to the magnetohydrodynamics equations*, Math. Ann. **304** (1996), no. 4, 717–756.
- [179] P. Secchi, *On the stationary and nonstationary Navier-Stokes equations in \mathbf{R}^n* , Ann. Mat. Pura Appl. (4) **153** (1988), 293–305 (1989).
- [180] J. Serrin, *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **9** (1962), 187–195.
- [181] V. Šverák, *On Landau solutions of the Navier–Stokes equations*. preprint, arxiv :math/0604550.
- [182] L. Ting, *On the application of the integral invariants and decay law for the vorticity distributions*, J. Fluid Mech. **127** (1983), 497–506.

- [183] F. Vigneron, *Spatial decay of the velocity field of an incompressible viscous fluid in \mathbb{R}^d* , *Nonlinear Anal.* **63** (2005), no. 4, 525–549.
- [184] ———, *Localisation et décroissance des champs de la mécanique des fluides et des plasmas & Espaces fonctionnels associés à une famille de champs de vecteurs*, Thèse. Ecole polytechnique (2006).
- [185] F. B. Weissler, *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p* , *Indiana Univ. Math. J.* **29** (1980), no. 1, 79–102.
- [186] M. Wiegner, *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on \mathbf{R}^n* , *J. London Math. Soc. (2)* **35** (1987), no. 2, 303–313.
- [187] P. B. Yale, *Geometry and symmetry*, Holden-Day, San Francisco, Calif., 1968.
- [188] M. Yamazaki, *Solutions in the Morrey spaces of the Navier-Stokes equation with time-dependent external force*, *Funkcial. Ekvac.* **43** (2000), no. 3, 419–460.
- [189] T. Yoneda, *Ill-posedness of the 3D-Navier-Stokes equations in a generalized Besov space near BMO^{-1}* , *J. Funct. Anal.* **258** (2010), no. 10, 3376–3387.
- [190] Y. Zhou, *A remark on the decay of solutions to the 3-D Navier-Stokes equations*, *Math. Methods Appl. Sci.* **30** (2007), no. 10, 1223–1229.