Licence 3-ième année **13 janvier 2010**
2009–2010

Corrigé de l'examen de Géométrie élémentaire

Exercice 1 On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et on considère les hyperplans $H_{ij} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\, x_i = x_j\}$, $1 \leq i < j \leq n$. On notera $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ l'ensemble des vecteurs de la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{R}^n$.
Notons G le sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ engendré par les réflexions orthogonales r_{ij} d'hyperplans H_{ij}.

1. Trouver le complement orthogonal de H_{ij}. Puis donner la matrice de r_{ij} exprime dans la base canonique.

   Soit $1 \leq k \leq n$, tel que $k \neq i, j$. On voit immédiatement que le vecteur $e_i - e_j$ est orthogonal à H_{ij}. Puisque $\dim H_{ij} = n - 1$ on obtient que $\dim H_{ij}^{\perp} = 1$. Donc $H_{ij}^{\perp} = \mathbb{R}(e_i - e_j)$. D'où $r_{ij}(e_i - e_j) = e_j - e_i$. Mais $r_{ij}(e_i + e_j) = e_i + e_j$ (car $e_i + e_j \in H_{ij}$). On a alors $r_{ij}(e_i) = e_j$ et $r_{ij}(e_j) = e_i$. Comme $r_{ij}(e_k) = e_k$ si $k \neq i, j$, on en déduit la matrice de r_{ij} exprimée dans la base canonique,

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 && 0 &&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&& 0 && 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

   où les coefficients diagonaux égaux à zéro sont en position i et j, et tous les coefficients implicites sont égaux à zéro.

2. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par l'action de G (i.e. $\forall g \in G,\ g(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$). En déduire un morphisme de groupe $\varphi : G \to S_n$, où S_n désigne le groupe des permutations à n éléments.

   Nous venons de montrer que les réflexions r_{ij} stabilisent $\mathcal{B}$. Le groupe G étant engendré par ces éléments, il stabilise $\mathcal{B}$ également. Ainsi G agit sur $\mathcal{B}$, et par définition d'une action de groupe, on a un morphisme

$$\varphi : G \to \{f : \mathcal{B} \to \mathcal{B} | f \text{ bijective}\}.$$

   Comme $\mathcal{B}$ est de cardinal n, le groupe de ses bijections est isomorphe à S_n, d'où le morphisme annoncé.

3. Montrer que φ est un isomorphisme de groupe.
Le morphisme φ est de noyau réduit à l'identité, car la seule transformation linéaire fixant une base est l'identité. D'autre part, φ est surjective car l'image des réflexions r_{ij} sont les transpositions de i et j, qui engendrent le groupe S_n (on aurait également pu démontrer la surjectivité en montrant que les deux groupes ont même cardinal). Ainsi φ est bien un isomorphisme.

4. Montrer que les éléments de G correspondent dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ aux matrices ayant un seul coefficient non nul par ligne et par colonne, ce coefficient étant égal à 1.
Les matrices r_{ij} (voir la partie 1) ont pour propriété d'avoir un seul coefficient non nul par ligne et par colonne, ce coefficient étant égal à 1. On voit aisément que cette propriété est stable par produit, et donc est satisfaite par tout élément de G. Réciproquement, si g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ correspondant dans la base canonique à une telle matrice alors $g(e_i) = e_j$ et $g(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. En utilisant 3 on conclut que $g \in G$.

Exercice 2

1. Soit $H = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \, x_0 + \ldots + x_n = 1\}$. Montrer que H est un sous espace de l'espace affine $\mathbb{R}^{n+1}$.
On a $H = (1, 0, \ldots, 0) + \overrightarrow{H}$, où $\overrightarrow{H}$ est l'hyperplan vectoriel
$$\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \, x_0 + \cdots + x_n = 0\}.$$
Il en découle que H est un sous espace affine de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Soit X un espace affine réel de dimension n et soit $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ une base de X (i.e. la famille de vecteurs $(\overrightarrow{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_i})_{1 \le i \le n}$ est libre). Soit
$$s : H \to X, \ (x_0, \ldots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_n \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix},$$
où $\begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_n \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ est le barycentre de points pondérés $(\mathbf{p}_i, x_i)_{0 \le i \le n}$. Montrer que s est une bijection affine.
Soit $(x_0, \ldots, x_n) \in H$ et $m = s((x_0, \ldots, x_n))$. On a alors $\sum_{i=0}^n x_i \overrightarrow{m\mathbf{p}_i} = \overrightarrow{0}$, i.e. $m = \mathbf{p}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_i}$. Or, l'application définie sur $\overrightarrow{H}$ par $\overrightarrow{s}((x_0, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_i}$ est trivialement linéaire, d'où s est une application affine. De plus, $(\overrightarrow{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_i})_{1 \le i \le n}$ étant libre, le noyau de $\overrightarrow{s}$ est l'ensemble des éléments de $\overrightarrow{H}$ de la forme $(x_0, 0, \ldots, 0)$, il se trouve donc être réduit à zéro. Comme $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{X}$ sont de même dimension il en découle que $\overrightarrow{s}$ est un isomorphisme linéaire, et s une bijection affine.

   Si $\mathbf{m} = s((x_0, \ldots, x_n))$ alors $\{x_0, \ldots, x_n\}$ sont les *coordonnées barycentriques* de $\mathbf{m}$ par rapport à $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$.

3. Montrer que si $f : X \to X$ est une bijection affine alors les coordonnées barycentriques de $\mathbf{m}$ par rapport à $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ coïncident avec les coordonnées barycentriques de $f(\mathbf{m})$ par rapport à $\{f(\mathbf{p}_0), f(\mathbf{p}_1), \ldots, f(\mathbf{p}_n)\}$.

Soit $(x_0, \ldots, x_n)$ les coordonnées barycentriques de $\mathbf{m}$ par rapport à $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$. On a alors $\sum_{i=0}^n x_i \overrightarrow{m\mathbf{p}_i} = \overrightarrow{0}$. En appliquant $\overrightarrow{f}$, la partie linéaire de f, à cette égalité, on obtient $\sum_{i=0}^n x_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathbf{mp}_i}) = \overrightarrow{0}$. Or, par définition de $\overrightarrow{f}$, on a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathbf{mp}_i}) = \overrightarrow{f(\mathbf{m})f(\mathbf{p}_i)}$. En substituant dans la somme précédente on est conduit à $\sum_{i=0}^n x_i \overrightarrow{f(\mathbf{m})f(\mathbf{p}_i)} = \overrightarrow{0}$, ce qui montre que $f(\mathbf{m})$ a pour coordonnées barycentriques $(x_0, \ldots, x_n)$ par rapport à $\{f(\mathbf{p}_0), f(\mathbf{p}_1), \ldots, f(\mathbf{p}_n)\}$, comme attendu.

4. Soit $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ et $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ deux bases de X. Soient $\mathbf{m} \in X$, $\{x_0, \ldots, x_n\}$ les coordonnées barycentriques de $\mathbf{m}$ par rapport à $\mathbf{P}$ et $\{y_0, \ldots, y_n\}$ les coordonnées barycentriques de $\mathbf{m}$ par rapport à $\mathbf{Q}$. Pour chaque $0 \leq i \leq n$, soit $\{\mathbf{q}_{i0}, \mathbf{q}_{i1}, \ldots, \mathbf{q}_{in}\}$ les coordonnées barycentriques de $\mathbf{q}_i$ par rapport à $\mathbf{P}$. Montrer que

$$x_i = \sum_{i=0}^n q_{ij} y_i.$$

Par définition des coordonnées barycentriques, on obtient, en reprenant les notations de l'énoncé, $\sum_{i=0}^n y_i \overrightarrow{\mathbf{mq}_i} = \overrightarrow{0}$ et $\sum_{j=0}^n q_{ij} \overrightarrow{\mathbf{q}_i \mathbf{p}_j} = \overrightarrow{0}$. En introduisant le point $\mathbf{m}$ dans la seconde relation, on en déduit que $\overrightarrow{\mathbf{mq}_i} = \sum_{j=0}^n q_{ij} \overrightarrow{\mathbf{mp}_j}$. Nous pouvons alors substituer $\overrightarrow{\mathbf{mq}_i}$ dans la première égalité obtenue, et aboutir à $\sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^n q_{ij} y_i\right) \overrightarrow{\mathbf{mp}_j} = \overrightarrow{0}$. Cela montre que $\sum_{i=0}^n q_{ij} y_i$ est la i^{me} coordonnée barycentrique de $\mathbf{m}$ par rapport à $\mathbf{P}$, et par unicité des coordonnées barycentriques (montrée à la question 2) on obtient $x_j = \sum_{i=0}^n q_{ij} y_i$.

Exercice 3 On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure affine euclidienne. On considère l'enveloppe convexe E des 4 points suivants : $A = (1, 1, 1), B = (-1, -1, 1), C = (-1, 1, -1)$ et $D = (1, -1, -1)$.

1. Montrer que E coïncide avec un tétraèdre régulier en précisants ses sommets.
   Le tétraèdre T de sommets A, B, C et D est un convexe contenant ces quatre points. Ainsi $E \subset T$. Réciproquement, E contient le segment AB ainsi que tout segment joignant C à un point de AB. Ainsi E contient le triangle ABC, ainsi que tout segment joignant D à un point de ABC. Autrement dit E contient le T. Donc $E = T$. On vérifie aisément que les arêtes du tétraèdre T sont toutes de même longueur. Donc $E = T$ est un tétraèdre régulier.
2. Étant donné une bijection affine g de $\mathbb{R}^3$, quelle est la relation entre l'enveloppe convexe de $\{g(A), g(B), g(C), g(D)\}$ et E ? Justifier votre réponse. Que peut-on dire de cet enveloppe si $g \in G$?
   D'après le cours, étant donnée une application affine g, l'enveloppe convexe de $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ et $g(D)$ est égale à l'image de l'enveloppe convexe de A, B, C et D par g, c.à.d. $g(E)$. Donc, si $g \in G$ alors l'enveloppe convexe de $g(A), g(B), g(C)$ et $g(D)$ est E.
3. Démontrer que G préserve l'ensemble $\{A, B, C, D\}$. En considérant S_4 comme le groupe des permutations de $\{A, B, C, D\}$, en déduire l'existence d'un morphisme de groupes $\psi : G \to S_4$.
   Soit $g \in G$. Notons que l'enveloppe convexe de $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ et $g(D)$ est

– *d'une part (voir l'argument de 1) un tétraèdre de sommets $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ et $g(D)$,*
– *d'autre part (voir 2) E, qui est (d'après 1) un tétraèdre de sommets A, B, C et D.*
Donc g préserve l'ensemble $\{A, B, C, D\}$. Pour démontrer l'existence de ψ on applique l'argument de l'exercice 1.2.

4. Montrer que G est un sous-groupe de $GL(3, \mathbb{R})$.
L'isobaricentre de $\{A, B, C, D\}$ est 0. Si g préserve $\{A, B, C, D\}$ alors g préserve l'isobaricentre de $\{A, B, C, D\}$ (proposition du cours), i.e. $g(0) = 0$. Donc, $G \leq GL(3, \mathbb{R})$.
5. Pour chaque transposition $\tau \in S_4$ trouver un $g_\tau \in G$ tel que $\psi(g_\tau) = \tau$.
Soit τ la transposition qui permute les sommets A et B. Soit H le plan contenant les points C, D et le milieu du segment $[AB]$. Alors la réflexion orthogonale par rapport à H fixe C et D, et permute A et B. Les cinq cas qui restent sont analogues.
6. En déduire que
   (a) ψ est surjectif ;
   Selon 5, $\psi(G)$ contient toutes les transpositions de S_4. Les transpositions de S_4 engendrent S_4. D'où le résultat.
   (b) ψ est un isomorphisme ;
   Si $g \in \ker(\psi)$ alors g fixe A, B, C et D, qui sont 4 point non coplanaires. Donc $g = \mathrm{Id}$. Par conséquent ψ est injectif, c'est donc isomorphisme d'après le point précédent.
   (c) G est un sous-groupe de $O(3)$.
   Soit $g \in G$. Comme $G \leq GL(3, \mathbb{R})$ alors on peut identifier g et son application linéaire L_g. Pour voir que $g \in O(3)$, il suffit de vérifier que g préserve le produit scalaire sur une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$. Dans la mesure où g envoie une arête du tétraèdre E sur une arête de E, et où le tétraèdre E est régulier (toutes les arêtes ont même longueur et l'angle entre deux arêtes vaut toujours $\pi/3$), alors g préserve le produit scalaire entre les vecteurs de la base. Ainsi $G \leq O(3)$.
7. On note $\varepsilon : S_4 \to \mathbb{Z}_2$ la signature et det le déterminant. Montrer que pour tout $g \in G$ on a $\varepsilon(\psi(g)) = \det(g)$, et en déduire que le groupe $G^+ = G \cap \mathrm{O}^+(3)$ des isométries directes qui préservent E est d'ordre 12.
La composition de ε et ψ est un morphisme de groupe. Comme il coïncide avec le déterminant sur les réflexions r_{ij} pour tout i, j, et que ces dernières engendrent le groupe G, l'égalité $\varepsilon \circ \psi = \det$ s'ensuit. Le sous-groupe des isométries directes est donc isomorphe au sous-groupe alterné A_4 des permutations paires, qui est d'ordre 12.
8. Décrire explicitement les 12 isométries de G^+.

   1. *l'identité ;*
   2. *la symétrie orthogonale d'axe (Ox) ;*
   3. *la symétrie orthogonale d'axe (Oy) ;*
   4. *la symétrie orthogonale d'axe (Oz) ;*

5. *la rotation d'axe* (OA) *et d'angle* $\pi/3$ *;*
6. *la rotation d'axe* (OB) *et d'angle* $\pi/3$ *;*
7. *la rotation d'axe* (OC) *et d'angle* $\pi/3$ *;*
8. *la rotation d'axe* (OD) *et d'angle* $\pi/3$ *;*
9. *la rotation d'axe* (OA) *et d'angle* $-\pi/3$ *;*
10. *la rotation d'axe* (OB) *et d'angle* $-\pi/3$ *;*
11. *la rotation d'axe* (OC) *et d'angle* $-\pi/3$ *;*
12. *la rotation d'axe* (OD) *et d'angle* $-\pi/3$*.*

Remarque : l'axe (Ox) *est aussi la droite qui passe par le milieu* I *de l'arête* AD *et le milieu* J *de l'arête* BC*. De même,* (Oy) *et* (Oz) *passent par les milieux de deux arêtes opposées.*