DEVOIR MAISON D'ALGÈBRE
(ARITHMÉTIQUE ET COMPLEXES)

Problème

Pour tout entier naturel non nul n, on note

$$\sigma(n) = \sum_{m|n} m$$

la somme des diviseurs de n. Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est appelé *parfait* si $\sigma(n) = 2n$ (c'est-à-dire s'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même). Dans la première partie du problème, nous allons montrer que pour tout entier $p > 1$ tel que $2^p - 1$ est premier, $2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait. Dans la deuxième partie, nous montrerons que réciproquement, tout nombre parfait pair est de la forme $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, avec $p > 1$ un entier et $2^p - 1$ premier.

Première partie

1) Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n. Montrer que

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} (1 + p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i})$$

2) En déduire que $n \wedge m = 1 \Rightarrow \sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.
3) Soit $p > 1$ un entier tel que $2^p - 1$ est premier. Monter que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait.

Deuxième partie

Soit n un nombre parfait pair.
4) Montrer que $n = 2^{p-1}m$, avec $p > 1$ et m impair tels que $2^p - 1 | m$.
5) Soit $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = (2^p - 1)l$. Montrer que $\sigma(m) = m + l$.
6) En déduire que $l = 1$.
7) Démontrer le résultat attendu : à savoir que m est égal à $2^p - 1$ et est premier.

Exercice

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(z) = 0$, avec $Q(z) = z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 1$.
1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{Q(z)}{z^2} = P(z + \frac{1}{z})$$

où $P(X) = aX^2 + bX + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2) Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.