Fiche 1 bis - Action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\hat{\mathbb{C}}$

A. On introduit $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le plan complété par un point, dit à l'infini. Nous n'utiliserons que cette définition ensembliste de $\hat{\mathbb{C}}$. Ajoutons tout de même qu'il est appelé plan projectif et correspond à l'ensemble des droites vectorielles complexes de $\mathbb{C}^2$. Il s'identifie via la projection stéréographique à la sphère $\mathbb{S}^2$.
Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ des matrices de type 2×2 à coefficients complexes et de déterminant 1 agit sur $\hat{\mathbb{C}}$ via

$$\begin{array}{rcl} \phi\ : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \hat{\mathbb{C}} & \to & \hat{\mathbb{C}} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d}. \end{array}$$

Par définition, la fonction $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est prolongée à $\hat{\mathbb{C}}$ par $h(\infty) = \frac{a}{c}$ et $h(-\frac{d}{c}) = \infty$. Les bijections de $\hat{\mathbb{C}}$ ainsi obtenues sont appelées homographies et forment un groupe.

1. Montrer que ϕ définit une action du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sur $\hat{\mathbb{C}}$.
2. Montrer que les groupes des translations, $\{z \mapsto z+b \mid b \in \mathbb{C}\}$, et des similtudes, $\{z \mapsto az+b \mid a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}\}$, sont des sous-groupes du groupe des homographies (donner les sous-groupes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ correspondant).
3. Montrer que le groupe engendré par les similitudes et par $z \mapsto \frac{1}{z}$ est le groupe des homographies. Donner l'interprétation géométrique de cette dernière transformation.

B. On nomme cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ les cercles de $\mathbb{C}$ et droites de $\hat{\mathbb{C}}$ les droites de $\mathbb{C}$ auxquelles on adjoint le point ∞. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des cercles de $\hat{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de $\hat{\mathbb{C}}$.

1. Montrer que l'équation d'un cercle est de la forme $a|z|^2 + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$, où $a, c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Montrer que l'équation d'une droite est donnée par la même expression mais avec $a = 0$.
2. Montrer que le groupe des similitudes agit transitivement sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Ces actions sont-elles simples ?
3. Quelle est l'image de la droite $\{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 2\}$ par la transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$?
4. Montrer que les homographies préservent $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$, et déduire de ce qui précède que le groupe des homographies agit transitivement sur $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. Cette action est-elle simple ?