Calcul vectoriel et matriciel

***Exercice 1** On considère l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et les trois vecteurs

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$
$$\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$$
$$\vec{w} = 7\vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k}.$$

Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{u}$, $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.(\vec{u} \wedge \vec{v})$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$, $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

***Exercice 2** L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les vecteurs

$$\vec{u} = (1/2)\vec{i} + (\sqrt{3}/2)\vec{k}$$
$$\vec{v} = (\sqrt{3}/2)\vec{i} - (1/2)\vec{k}$$
$$\vec{w} = -\vec{j}.$$

1. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
2. Calculer les normes de $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, puis les produits scalaires $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$.

***Exercice 3** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 2, 0)$ et $v_2 = (-6, 0, 2)$.
- Montrer que $\{v_1, v_2\}$ est libre.
- Trouver $v_3 \in \mathbb{R}$ tel que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.
- Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 L'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Etablir l'identité :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}.$$

Indication : effectuer un calcul composante par composante.

***Exercice 5** Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$.
1. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{AM}.\vec{AB} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{AM}.\vec{BM} = 0$. (Indication : introduire le point I milieu de $[AB]$.)
3. Représenter ces deux ensembles sur un dessin.
4. Considérer le mêmes questions dans $\mathbb{R}^3$

***Exercice 6** Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^3$.
1. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{0}$.

***Exercice 7** Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de l'espace à trois dimensions.
1. Etablir l'identité
$$\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 + \|\vec{U} - \vec{V}\|^2 = 2(\|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2).$$
2. Montrer que pour que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient orthogonaux, il faut et il suffit que
$$\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2.$$

***Exercice 8** Trouver l'angle θ entre les vecteurs joignant (dans un repère orthonormé) l'origine aux points $P_1 \equiv (1,2,3)$ et $P_2 \equiv (2,-3,-1)$.

***Exercice 9** On considère dans un repère orthonormé les trois points $P_1 \equiv (1,1,1)$, $P_2 \equiv (1,2,3)$ et $P_3 \equiv (0,0,2)$. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs $\vec{u} = O\vec{P}_1$, $\vec{v} = O\vec{P}_2$ et $\vec{w} = O\vec{P}_3$.

***Exercice 10** Ecrire les équations de la droite passant par $P_0 \equiv (1,2,3)$ et parallèle à $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$. Soient $A \equiv (3,1,-1)$ et $B \equiv (1/2, 9/4, 4)$. Lequel de ces points est situé sur la droite ?

***Exercice 11** Soient P_0 et P_1 deux points de l'espace $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'un point P appartient au segment P_0P_1 si et seulement si

$$\text{il existe } t \in [0,1] \text{ tel que :} \qquad \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OP_1}.$$

Trouver une expression pour l'ensemble des points appartenant au segment de $\mathbb{R}^2$ entre $P_0 \equiv (1,2)$ et $P_1 \equiv (3,5)$.

***Exercice 12** Soit $P_0 \equiv (1,2,3)$. Ecrire l'équation du plan

1. passant par P_0 et orthogonal à $\vec{u} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$.
2. passant par P_0 et parallèle à $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.
3. passant par P_0, $P_1 \equiv (3,-2,1)$ et $P_2 \equiv (5,0,-4)$.

Exercice 13 Montrer que le module de la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$ est égale à $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|}$. Trouver la plus courte distance d séparant le point $P_0 \equiv (1,2,3)$ et le plan d'équation $3x - 2y + 5z - 10 = 0$.

***Exercice 14** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Quels sont les produits matriciels possibles ? En calculer au moins cinq.
- Parmi les matrices A, B, C, D, E et leurs produits, lesquelles sont carrées et lesquelles sont symétriques ?

***Exercice 15** Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer l'inverse lorsqu'il existe.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Fonctions de plusieurs variables

1 Lignes de niveau et fonctions partielles

***Exercice 16** Soit $k \in \mathbb{R}$; et f une fonction de deux variables, définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$. On rappelle que l'ensemble $\{(x,y) \in \mathcal{D}_f;\ \text{tel que } f(x,y) = k\}$ est la *ligne de niveau* k de la fonction f.

1. Trouver les lignes de niveaux 0, 1, -1, 2 et 3 de la fonction fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et les représenter graphiquement. Même question avec $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $f(x,y) = \dfrac{2y}{x}$.
2. Pour la fonction $f(x,y) = x-y-|x-y|$, tracer les lignes de niveau pour $k \in \mathbb{R}$, traiter séparément les cas $k = 0$ et $k > 0$ et $k < 0$.

***Exercice 17** Soit F une fonction de $D \in \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $A = (a,b)$ un point intérieur de D. Les fonctions :

$$x \mapsto f(x,b) \text{ et } y \mapsto f(a,y)$$

définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a et b, sont appelées les fonctions partielles associées à f au point A.

Trouver les fonctions partielles aux points $(0,0)$ et $(1,2)$ de $g_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $g_2 = xy$ et de $g_3(x,y) = x^2y - 1$.

2 Limites de fonctions de deux variables

***Exercice 18** Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{2xy - y^2}{x^2+y^2}$. Etudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, avec $m \in \mathbb{R}$. En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 19 Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ donné.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'equation $y = x^2$.
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 20 Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites :

$$(A) \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y); \quad (B) \lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x,y)); \quad (C) \lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x,y)).$$

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{\sin x}{y}, \quad f_4(x,y) = \frac{\sin y}{x}.$$

Démontrer qu'en $(0,0)$

– Deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième existe.
– Une de ces trois limites peut exister sans les deux autres existent.
– (B) et (C) peuvent exister sans être égales.
– Si (A) et (B) existent alors elles sont égales.

***Exercice 21** Étudier la limite à l'origine de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

Exercice 22 Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes pour $(x,y) \to (0,0)$ et (x,y) appartenant à l'ensemble de définition :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|},$$

$$f(x,y) = \frac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{y\ln(y-x^2)}, \qquad f(x,y) = x^y$$

2.1 Utilisation des coordonnées polaires

RAPPEL Soit $g\colon \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\to \mathbb{R}$. Supposons que

$$\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta) = \ell \qquad \text{(indépendante de } \theta).$$

On dit que *la limite est uniforme en* θ si :

$$\text{il existe } G\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ telle que } \quad \begin{cases} |g(\rho,\theta)-\ell| \le G(\rho), & \forall\, \rho > 0 \\ \lim_{\rho\to 0^+} G(\rho) = 0. \end{cases}$$

Cette condition assure que, si $f(x,y) = g(\rho,\theta)$ (avec $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$), alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$$

Exercice 23 Pour chacune des fonctions $g : \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\to \mathbb{R}$ suivantes, calculer $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta)$. On précisera si :

1. La limite est indépendente de θ
2. La limite est uniforme pour $\theta \in [0,2\pi[$

$$g(\rho,\theta) = \frac{\rho}{\sin\theta + 3}, \qquad g(\rho,\theta) = \begin{cases} \rho\ln(\rho\sin(\theta)), & \text{si } \theta \in]0,\pi[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la fonction $f(x,y)$ définie par $f(x,y) = g(\rho,\theta)$.

***Exercice 24** Calculer les limites à l'origine des fonctions suivantes, à l'aide d'un passage aux coordonnées polaires.

$$f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}.$$

Exercice 25 Calculer les limites pour $(x,y) \to \infty$ des fonctions suivantes

$$f(x,y) = \frac{x\arctan y}{x^2+y^2+1}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2},$$

$$f(x,y) = (1+|x|+|y|)\sin(y^2), \qquad f(x,y) = ye^x + \ln|y|.$$

Calcul différentiel

***Exercice 26** Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

a) $f_1(x,y) = 3xy + e^y$ b) $f_2(x,y) = y\sin(2xy+1)$, c) $f_3(x,y) = e^{\sin(2x)+xy}$,
d) $f_4(x,y) = \sqrt{x^2+\cos y+1}$, e) $f_5(x,y) = \ln(x^2y^2)$.

***Exercice 27** Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ suivant le vecteur $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ au point $A \equiv (2,1)$.

***Exercice 28** Trouver les pentes des sections de la surface $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$ obtenues par les plan passant par le point $(1,1,1)$ et parallèles aux plans xOz et yOz.

***Exercice 29** Trouver les différentielles de $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$ et de $Z = x\sin y - y\sin x$.

***Exercice 30** La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts). Si $E = 200$ volt et $R = 8$ ohm, quelle est la modification de la puissance si E decroît de 5 volt et R de 0.2 ohm ? Comparer les résultats obtenus (a) avec un calcul exact, (b) avec l'approximation fournie par la différentielle.

***Exercice 31 (Fonctions composées)** Soit $z(x) = f(x, y(x))$, où f est une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ et y une fonction dérivable dans $\mathbb{R}$. Trouver une expression pour $z'(x)$. Appliquer la formule aux cas particuliers

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ et $y = e^{3x}$.
2. $f(x,y) = xy^2 + x^2y$ et $y = \ln x$.

Exercice 32 Trouver la dérivée par rapport à t de

1. $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ où $x = \sin t,\ y = \cos t$;
2. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ où $x = e^{-t},\ y = e^t$.

***Exercice 33** Soient F et G deux fonctions de classe C^2 dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$. On pose $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$. Montrer que u est une solution de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 34

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $F : (x,y) \to F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$.
   (a) Calculer $\Delta F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$. L'operateur Δ s'appelle le *laplacien*.
   (b) Déterminer toutes les applications f telles que $\Delta F = r$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : (x,y) \mapsto g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
3. Exprimer le laplacien en coordonnées polaires.
   [Indication : poser le changement de variables $\phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$]

Extrema

Exercice 35

1. Etudier les extrema relatifs (locaux) de $f(x,y) = x^2+xy+y^2+2x+3y$. Admet-elle des extrema absolus (globaux) ?
2. Même question pour

$$\begin{array}{llll} (a) & f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3 & (b) & f(x,y) = xe^y + ye^x \\ (c) & f(x,y) = (3x+4y)e^{-(x^2+y^2)} & (d) & f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3 \\ (e) & f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy & (f) & f(x,y) = x^3 + 3xy - y^2 + y + 1 \end{array}$$

Exercice 36 *Epreuve de Novembre 2003.* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. Déterminer les extrema relatifs (locaux) de la fonction f.
2. La fonction f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter le segment de droite L défini par

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \leq x \leq 0,\ y = x+1\}.$$

Déterminer les extrema absolus de la restriction de f à L et préciser en quels points de L ils sont atteints.

Exercice 37 *Epreuve de Mai 2001.* On considère la fonction

$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

1. Etudier les extréma relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. *Suggestion :* on pourra utiliser les symétries de la fonction $f(x,y)$ pour réduire le nombre de cas à étudier.
2. Démontrer que $f(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to \infty$.
3. Déduire de ce qui précède l'existence des extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer les extréma globaux.

Exercice 38 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Représenter $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x+y \leq 1\}$
   Justifier l'existence d'un maximum absolu M et d'un minimum absolu m pour la restriction de f à T. Les déterminer.

Exercice 39 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. Montrer que $f(x,y) \leq 2r^2 - \dfrac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x,y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a-t-il un minimum global ?

Exercice 40 On considère la fonction

$$f(x,y) = 1 + (x + \sqrt{2}y)^2 + ax^4 \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Déterminer les valeurs du paramètre a telles que l'origine soit (i) un point de col (ii) un point de minimum local.

Exercice 41 Ecrire les formules de Taylor d'ordre 2 pour $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2+\frac{4}{3}z^3+xy-2x-y+1$, centrées aux points critiques de f. Déterminer ensuite la nature de ces points.

Exercice 42 Etudier la nature des points critiques des fonctions définies par

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z, \\ g(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + 2x - 2y - 4z + 5, \\ h(x,y,z) &= 2x^2y - y^2 - x^4 - z^2. \end{aligned}$$

Champs de vecteurs

Exercice 43 Démontrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&a.\ \mathrm{div}(f\overrightarrow{u}) = f\mathrm{div}(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}f,\\
&b.\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\mathrm{grad}}g + g\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}f,\\
&c.\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}f \wedge \overrightarrow{u} + f\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{u}.
\end{aligned}$$

Exercice 44 $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ étant des vecteurs constants, calculer $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{B}\wedge\overrightarrow{r}))$.

Exercice 45 Pour quelle fonction $f(x)$ la divergence de $\overrightarrow{V} = xz\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + f(z)\overrightarrow{k}$ est-elle égale à z ?

Exercice 46 Soit f une fonction et $\vec{V}$ un champ de vecteurs, tous deux de classe C^2 dans un ouvert de l'espace. Le champs vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\nabla f + \overrightarrow{\mathrm{rot}}V)$ est égale à :

a)$\vec{0}$, **b**)$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V})$, **c**)$\nabla f \wedge \vec{V}$.

Exercice 47 Pour un champ de vecteurs $\vec{B} = xy^2\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} + 3yz^2\vec{k}$, trouver $\mathrm{div}\vec{B}$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}$.

Exercice 48 Déterminer si les champs suivants sont des champs de gradients, si oui déterminer leurs potentiels scalaires.

1. $\vec{V}(x,y) = (y,x)$
2. $\vec{V}(x,y) = (3x^2y + 2x + y^3, x^3 + 3xy^2 - 2y)$
3. $\vec{V}(x,y) = (\cos(x), \sin(y))$
4. $\vec{V}(x,y) = (y + \dfrac{1}{x}, x + \dfrac{1}{y})$
5. $\vec{V}(x,y) = (x+y, x-y)$
6. $\vec{V}(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$

Exercice 49 A tout point M de $\mathbb{R}^2\{(0,0)\}$, on associe le vecteur unitaire $\vec{u}(M) = \frac{O\vec{M}}{\|O\vec{M}\|}$. En posant $\rho = \|\ O\vec{M}\ \|$, montrer que la divergence de ce champ vectoriel est égale à $1/\rho$.

Exercice 50 Un champ central dans $\mathbb{R}^3$ est donné par $\vec{V}(\vec{x}) = f(r)\vec{x}$ où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ et f est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradients et calculer son potentiel.

Exercice 51 Soit le champ de vecteurs défini dans $\mathbb{R}^3$ par : $\vec{V}(x,y,z) = (yz + x^2y^3, xz + x^3y^2, f(x,y))$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$. Trouver les applications f pour que ce soit un champ de gradients. Calculer alors les potentiels de $\vec{V}(x,y,z)$.

Exercice 52 Dans une région de l'espace, on suppose que la distribution de charge électrique a une densité volumique constante ρ et que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ a une direction fixe (on peut choisir l'axe Ox dans cette direction). Calculer $\overrightarrow{E}$ et le potentiel V. *Indication* Vous devez utiliser les lois de l'électrostatique qui relient les grandeurs étudiées : $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\overrightarrow{V}$. (Ici $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$ est une constante universelle appelée permittivité électrique du vide.)

Courbes paramétrées

Exercice 53 Une particule se déplace le long de la courbe $x = 4\cos t, y = 4\sin t, z = 6t$. Trouver les valeurs absolues de la vitesse et de l'accélération au temps $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 54 Trouver les équations de la tangente et du plan normal à la courbe $x = t - 2, y = 3t^2 + 1, z = 2t^3$, au point où celle-ci coupe le plan yOz.

Exercice 55 Soit $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. Pour tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer l'amplitude de l'angle entre la ligne de niveau de f passant par (a, b) et le vecteur $\nabla f(a, b)$ (on commencera par la détermination du tracé de cette ligne et on déterminera ensuite une paramétrisation).

Exercice 56 Paramétrer la courbe $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Exercice 57 La *spirale logarithmique* est définie par $\gamma(t) = (e^{at}\cos t, e^{at}\sin t)$

1. Dessiner la spirale logarithmique.
2. Montrer que la spirale logarithmique fait un angle constant avec la droite joignant un point courant à l'origine.
3. Calculer la longueur de l'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(t)$.
4. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0, 0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
5. Montrer que la longueur de l'arc entre 0 et t a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.

Exercice 58

1. Déterminer la longueur de l'arc de courbe (appellée *cycloïde*) défini par
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \qquad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$
2. On considère l'hélice circulaire à pas constant définie par
$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{cases}$$
   - Montrer que la tangente forme avec l'axe Oz un angle constant.
   - Calculer la longueur d'un spire d'hélice ($t \in [0, 2\pi]$).

Exercice 59

1. Soit Γ la courbe paramétrée en coordonnées polaires par $\rho = \rho(t)$ et $\theta = \theta(t)$, où $t \in [a, b]$. Montrer que la longueur de Γ est
$$\int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}\, dt.$$
En déduire une formule pour la longueur d'une courbe définie en *forme polaire* (c'est à dire, une courbe paramétrée par $\rho = \rho(\theta)$).
2. Tracer et calculer la longueur des courbes définies par
$$\begin{aligned} &\rho = \theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi \\ &\rho = 2(1 + \cos\theta), \qquad -\pi \le \theta \le \pi \qquad \textit{(cardioïde).} \end{aligned}$$
Ces paramétrisations sont-elles régulières ? La droite tangente à ces courbes en $(0, 0)$ existe-t-elle ?

Intégrales curvilignes. Intégrales doubles

Exercice 60 Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_C (2x - y)dx + (x + y)dy$$

où C est le cercle de centre R et de centre O décrit complètement dans le sens direct.

Exercice 61 Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée C constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ décrite dans le sens direct avec

$$I = \int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy.$$

Vérifier le résultat en utilisant la formule de Riemann.

Exercice 62 Calculer l'intégrale curviligne

$$\int \frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2}$$

le long du cercle de centre O et de rayon r.

Exercice 63 Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée C constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ décrite dans le sens direct avec

$$I = \int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy.$$

Vérifier le résultat en utilisant la formule de Riemann.

Exercice 64 Calculer l'intégrale curviligne

$$\int \frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2}$$

le long du cercle de centre O et de rayon r.

Exercice 65 Déterminer l'aire de la partie D du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 66 **a**) Calculer $\displaystyle\int\int_D (x - y)\ dxdy$ où D est une partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = -x$$

b) Calculer la même intégrale au moyen du changement de variables défini par :

$$u = x + y, \qquad v = x - y$$

Exercice 67 Calculer $\int\int_D xy\ dxdy$ où D est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

Exercice 68 Soit $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La droite d'équation $y = x$ délimite dans les carré $[0,1] \times [0,1]$ deux triangles égaux T_1 et T_2. Montrer que en général,

$$\int\int_{T_1} f(x,y)\ dxdy \neq \int\int_{T_2} f(x,y)\ dxdy.$$

Puis, en utilisant le changement de variable $u = y,\ v = x$, montrer que

$$\int\int_{T_1} xy\ dxdy = \int\int_{T_2} xy\ dxdy.$$

Exercice 69 Soit D le quart de disque unité défini par :

$$D = \{(x,y)| \quad 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale :

$$I = \int\int_D (4 - x^2 - y^2)\ dxdy.$$

Exercice 70 Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

Exercice 71 Trouver le centre de gravité de la surface plane délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

Exercice 72 Déterminer le centre de gravité de la surface située à l'exterieur du cercle de rayon 1 et délimitée par la cardioïde $\rho = 1 + \cos\theta$.

Exercice 73 Calculer $I = \iint_D \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \dfrac{y^2}{2} \leq x \leq 2\}$

Exercice 74

Soit $I = \iint_{T_a} \sqrt{xy}\, e^{-x-y}\, dxdy$. avec $T_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a\}$ et $a > 0$. On considère le changement de variables $\begin{cases} x = tu \\ y = (1-t)u \end{cases}$

Calculer I.

Exercice 75 Aire en coordonnées polaires

Soit D le domaine limité par $r = p(\phi)$ avec $0 \leq \phi \leq 2\pi$; et le segment $\begin{cases} \phi = 0 \\ p(0) \leq r \leq p(2\pi) \end{cases}$

1. Montrer que $\mathcal{A}(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} p^2(\phi)\, d\phi$
2. Aire de la cardioïde : $r = 1 + \sin(\phi)$.
3. Aire de l'escargot ; $r = a\phi$
4. Dessiner les lignes de coordonnées $r = \mathcal{C}^{te}$ et $\phi = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des x, y
5. Dessiner les lignes de coordonnées $x = \mathcal{C}^{te}$ et $y = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des r, ϕ.

Surfaces. Théorèmes de Stokes et Ostrogradski

Exercice 76 Equation du plan tangent en A(1,0,1) à la surface $S = \begin{cases} x = u - v \\ y = uv \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$

Déterminer une équation cartésienne de cette surface.

Exercice 77 Déterminer les plans qui sont tangents à la surface $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ et parallèles au plan d'équation $x + 4y + 6z = 0$.

Exercice 78 Déterminer les plans qui sont tangents à la surface $xy = z$ et au cercle d'équations $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$

Exercice 79 Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, -z)$ à travers la deme-sphère

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 80 Soit $R > 0$. Calculer l'intégrale de surface $\iint_S (x + y + z)\, d\sigma$, où S est la surface d'équation définie par $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et $z \geq 0$.

Exercice 81 On considère l'intégrale $\int_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz$, où C est le cercle d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Calculer cette intégrale en appliquant la formule de Stokes. Retrouver le résultat à l'aide d'un calcul direct.

Exercice 82 Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ le long de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

1. directement. 2. En utilisant la formule de Stokes

Exercice 83 Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ à travers la sphère

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

1. directement. 2. A l'aide le la formule d'Ostrogradski.

Exercice 84 On considère la boîte cylindique S composée du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ et $0 \leq z \leq h$ et de deux disques de rayon R aux niveau $z = 0$ et $z = h$ ($R > 0$ et $h > 0$). Soit $\vec{V}$ le champ de vecteurs défini par

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}.$$

1. Déterminer si $\vec{V}$ est un champ de gradient.
2. Déterminer si $\vec{V}$ est le rotationnel d'un autre champ de vecteurs.
3. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S directement.
4. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradski.