Exercice 67
Montrer que les deux familles de vecteurs suivantes :

$$((1,2,-1,3),(2,4,1,-2),(3,6,3,-7)) \text{ et } ((1,2,-4,11),(2,4,-5,14))$$

engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 68
On note H le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u = (1,2,3,0) \text{ et } v = (1,0,-1,5).$$

1) Donner une base de H.

2) Compléter explicitement cette base de H en une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 69
Soit $E = \{ (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x = 2y - z \text{ et } t = x + y + z \}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et en déterminer une base.

Exercice 70
Soit $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$. Soit m un réel et soit les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_3$ de $\mathbf{R}^3$ ayant pour coordonnées dans $\underline{e}$ les matrices respectives :

$$\mathrm{mat}_{\underline{e}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{mat}_{\underline{e}}(u_2) = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{mat}_{\underline{e}}(u_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Discuter, en fonction de la valeur du paramètre m, si (u_1, u_2, u_3) constitue ou non une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 71
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :
$u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1,-1)$, $u_3 = (1,3,1,3)$,
$u_4 = (1,2,0,2)$, $u_5 = (1,2,1,2)$, $u_6 = (3,1,3,1)$.
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3) et G le sous-espace vectoriel engendré par (u_4, u_5, u_6).
Déterminer une base de F, de G, de $F + G$, de $F \cap G$.

Exercice 72
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :
$a_1 = (0,1,1,1)$, $a_2 = (1,0,1,1)$, $a_3 = (1,1,0,1)$, $a_4 = (1,1,1,0)$.
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (a_1, a_2) et G celui engendré par (a_3, a_4).
Montrer que $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 73
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :
$u_1 = (2,3,0,-1)$, $u_2 = (1,0,0,1)$,
$u_3 = (0,1,0,0)$, $u_4 = (1,2,2,1)$.
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2) et G le sous-espace vectoriel engendré par (u_3, u_4).
Déterminer les sous-espaces $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 74
Même exercice avec :
$u_1 = (1,0,0,1)$, $u_2 = (5,3,0,5)$,
$u_3 = (-1,-1,1,0)$, $u_4 = (0,0,1,1)$.
(On donnera une base de $F \cap G$ et une représentation cartésienne de $F + G$).

Exercice 75
Dans $\mathbf{R}^4$ on note $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$, F la droite de base $(1,2,1,0)$ et G la droite de base $(0,0,1,1)$.
Montrer que $E \oplus F \oplus G = \mathbf{R}^4$.

Exercice 76
Dans $\mathbf{R}^4$, on note $a = (1, -1, 1, 2)$, $b = (0, 1, -1, 3)$, $c = (0, 1, 0, -1)$ et $d = (2, 2, -1, 12)$.
On note $F = \text{Vect}(a, b)$ et $G = \text{Vect}(c, d)$.

1) a) (a, b, c, d) est-il une base de $\mathbf{R}^4$?
   b) A-t-on $F + G = \mathbf{R}^4$?
   c) Déterminer $F \cap G$.
   d) Déterminer une base de $F + G$.

2) On note $e = (0, 0, 0, 1)$, et D la droite engendrée par E.
   a) e est-il élément de $F + G$?
   b) Montrer que $(F + G) \oplus D = \mathbf{R}^4$.

Exercice 77
On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^4$:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,|\, x + 4y - 5z - 2t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,|\, 3x - y + t = 0\}$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$; on admettra sans le démontrer que F est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

2) Déterminer une base de E, puis une base de F.

3) Déterminer une base de $E + F$.

4) Déterminer une base de $E \cap F$.

5) Soit (f_1, f_2, f_3) la base de F déterminée au 2). Expliciter un vecteur f_4 tel que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) soit une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 78
Soit $a = (1, 2, 3, 4)$ et b un autre vecteur de $\mathbf{R}^4$, non donné par l'énoncé. Il est toutefois précisé que b n'est pas colinéaire à a (autrement dit, que a et b ne sont pas proportionnels).
On note $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \,|\, x + y - z - 6t = 0\}$ et F le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par a et b (on admettra sans le démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$).

1) Déterminer les dimensions respectives de E et de F.

2) Montrer que $\dim(E \cap F) \neq 0$.

3) Montrer que $E \cap F \neq F$.

4) Déterminer $\dim(E \cap F)$.

Exercice 79
Soit n un entier et F, G et H trois sous-espaces de $\mathbf{R}^n$ tels que :

$$F \cap G = F \cap H, \qquad F + G = F + H, \qquad G \subset H.$$

Montrer que $G = H$.

Exercice 80
Soit n un entier naturel, et soit F, G et H trois sous-espaces de $\mathbf{R}^n$.

1) Montrer l'inclusion :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H).$$

Expliciter un exemple montrant que cette inclusion peut être stricte.

2) Montrer l'égalité :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap [G + (F \cap H)].$$