Applications
Injections, surjections, bijections : étude d'exemples

Exercice 1
Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^+ & \to & \mathbf{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & [0,2] \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Exercice 2
1) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : $f(x) = x + x^3$. Cette fonction est-elle bijective ?
2) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : $g(x) = x^2 + x^3$. Cette fonction est-elle injective, surjective ?
3) Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par : $h(x) = x + x^4$. Cette fonction est-elle injective, surjective ?

Exercice 3
Soit f l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie pour tout x réel par :

$$f(x) = |2 + x| + |2 - x| - 4.$$

1) Tracer la courbe représentative de f.
2) L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?
3) Soit g l'application de $[2, +\infty[$ vers $\mathbf{R}^+$ définie comme étant la restriction de f à $[2, +\infty[$.
   a) Justifier pourquoi on peut restreindre l'ensemble d'arrivée de g à $\mathbf{R}^+$.
   b) Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 4
Soit :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & E(\frac{n}{2}) \end{array}$$

(on note E la fonction partie entière).
Les applications f et g sont-elles injectives, surjectives ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 5
Soit $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y\}$ et $\Delta = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u^2 - 4v \geq 0\}$.
On définit $\varphi : D \to \mathbf{R}^2$ par : $\varphi(x, y) = (x + y, xy)$.
1) Montrer qu'il est possible de restreindre φ à une application de D vers Δ.
2) Montrer que cette restriction est une bijection.

Injections, surjections, bijections : résultats généraux

Exercice 6
Soit X, Y et Z trois ensembles ; soit f une application de X vers Y et g une application de Y vers Z.
1) Montrer que si f et g sont injectives, $g \circ f$ aussi.
2) Montrer que si f et g sont surjectives, $g \circ f$ aussi.
3) Montrer que si $g \circ f$ est injective, f aussi.
4) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, g aussi.

Exercice 7
Soit X et Y deux ensembles, et f une application de X vers Y. On suppose qu'il existe une et une seule application g telle que $g \circ f = Id_X$.
On suppose enfin que X possède au moins deux éléments. Montrer que f est une bijection.

Exercice 8
Soit X un ensemble et f une application de X vers lui-même. On suppose que $f \circ f = f$.
1) Montrer que si f est injective, alors $f = Id_X$.
2) Montrer que si f est surjective, alors $f = Id_X$.

Exercice 9
Soit X un ensemble et f une application de X vers lui-même. On suppose que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Exercice 10
Soit X et Y des ensembles, soit f une application de X vers Y et g une application de Y vers X.
On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective.

1) Montrer que f est bijective.

2) Montrer que g est bijective.

Exercice 11
Soit X, Y et Z trois ensembles ; soit f une application de X vers Y et g une application de X vers Z. On définit une application h de X vers $Y \times Z$ en posant, pour tout x de X :

$$h(x) = (f(x), g(x)).$$

1) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

2) Montrer que même si f et g sont toutes deux surjectives, h peut ne pas être surjective.

Exercice 12
Soit $f\colon X \to Y$ une application.
Montrer que :

1) f est surjective $\Leftrightarrow$ Pour tout ensemble Z et toutes applications u et v de Y vers Z, $u \neq v$ entraîne $u \circ f \neq v \circ f$.

2) f est injective $\Leftrightarrow$ Pour tout ensemble W et toutes applications u et v de W vers X, $u \neq v$ entraîne $f \circ u \neq f \circ v$.

Image d'une partie, image réciproque d'une partie : étude d'exemples

Exercice 13
Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par :

$$f(1) = 4,\ f(2) = 1\ f(3) = 2\ f(4) = 2.$$

1) Déterminer $f(A)$ pour $A = \{2\}$, pour $A = \{1, 2, 3, 4\}$, pour $A = \{1, 3\}$.

2) Déterminer $f^{-1}(B)$ pour $B = \{2\}$, pour $B = \{1, 2, 3, 4\}$, pour $B = \emptyset$.

3) L'application f^{-1} existe-t-elle ?

Exercice 14

1) Soit f l'application de $\mathbf{R}^*$ vers $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Déterminer $f(\mathbf{R}^*)$, $f(]0, 1])$, $f^{-1}(]0, 1])$, $f^{-1}([-1, 1])$.

2) Soit g l'application de $\mathbf{R}$ vers $[-1, 1]$ définie par $f(x) = \cos(\pi x)$. Déterminer $g(\mathbf{N})$, $g^{-1}(\{0\})$, $g^{-1}(\{1\})$, $g^{-1}([-1, -1/\sqrt{2}[)$.

Exercice 15

1) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x$. Pour $a \in \mathbf{R}$, dessiner $f^{-1}(\{a\})$.

2) Soit $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $g(x, y) = x + y$. Pour deux entiers naturels $n < m$, dessiner $g^{-1}(\{n\})$ puis $g^{-1}(\{n, n + 1, \ldots, m\})$.

3) Soit $h\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $h(x, y) = x^2 + y^2$. Pour $a \in \mathbf{R}$, dessiner $f^{-1}(\{a^2\})$.

Image d'une partie, image réciproque d'une partie : résultats généraux

Exercice 16
Soit X et Y deux ensembles et f une application de X vers Y

1) Montrer les inclusions suivantes :
Pour toute partie A de X, $A \subset f^{-1}[f(A)]$ et
Pour toute partie B de Y, $f[f^{-1}(B)] \subset B$.

2) Montrer que les énoncés analogues mais “dans l'autre sens” (c'est-à-dire les énoncés :
Pour toute partie A de X, $f^{-1}[f(A)] \subset A$ et
Pour toute partie B de Y, $B \subset f[f^{-1}(B)]$.)
peuvent être faux.

3) Montrer les égalités suivantes :
Pour toute partie A de X, $f(A) = f(f^{-1}[f(A)])$ et
Pour toute partie B de Y, $f^{-1}(f[f^{-1}(B)]) = f^{-1}(B)$.

4) Imaginez pour chacun des énoncés du 2) une hypothèse sur f qui le rende vrai.

Exercice 17
Soit E un ensemble et X une partie de E. Soit f une application de E dans E ; on notera $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ et ainsi de suite.
On suppose que $f(X) \subset X$.

1) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $f^n(X) \subset X$.

2) Montrer que s'il existe un $k \geq 1$ tel que $f^k(X) = X$, alors $f(X) = X$.

Exercice 18
Soit X, Y deux ensembles et f une application de X vers Y.
Montrer que f est injective si et seulement si, pour toutes parties A et B de X, on a :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Exercices au sein d'ensembles d'ensembles

Exercice 19
Soit E un ensemble non vide. Les applications suivantes sont elles injectives ? Sont-elles surjectives ?

$$\begin{array}{llll} f_1 : \mathcal{P}(E) & \to \mathcal{P}(E)^2 \\ \quad X & \mapsto (X, \emptyset) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} f_2 : \mathcal{P}(E) & \to \mathcal{P}(E)^2 \\ \quad X & \mapsto (X, C_E X) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} f_3 : \mathcal{P}(E)^2 & \to \mathcal{P}(E) \\ \quad (X,Y) & \mapsto X \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f_4 : \mathcal{P}(E)^2 & \to \mathcal{P}(E) \\ \quad (X,Y) & \mapsto X \cap Y \end{array} \qquad \begin{array}{ll} f_5 : \mathcal{P}(E)^2 & \to \mathcal{P}(E) \\ \quad (X,Y) & \mapsto X \cup Y \end{array} \qquad \begin{array}{ll} f_5 : \mathcal{P}(E)^2 & \to \mathcal{P}(E)^2 \\ \quad (X,Y) & \mapsto (Y,X) \end{array}$$

Exercice 20
Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.
On considère $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

1) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

2) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

3) Lorsque f est bijective, donner une formule simple pour f^{-1}.

Exercice 21
Soit E un ensemble et x_0 un élément fixé de E.
On définit une application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ en posant $f(A) = A \cup \{x_0\}$ si $x_0 \notin A$ et $f(A) = A \setminus \{x_0\}$ si $x_0 \in A$.
Montrer que f est une bijection.

Exercice 22
Soit $\mathcal{P}_5$ l'ensemble des parties à 5 éléments de $\mathbf{N}$ et soit $\mathcal{F}_5$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ vers $\mathbf{N}$.
On définit une application Φ de $\mathcal{F}_5$ vers $\mathcal{P}_5$ en posant, pour f élément de $\mathcal{F}_5$, $\Phi(f) = f(\{1, 2, 3, 4, 5\})$.
Montrer que Φ est une bijection.