Université Claude Bernard Lyon 1

Licence “Mathématiques et informatique”

Première année

UE Math I-ALGEBRE

Année 2006-2007

CHAPITRE 5

Arithmétique

Exercice 1 Donner tous les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de -12.

Exercice 2 Montrer que pour tout entier n, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

Exercice 3 Montrer que pour tout entier n, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6 et $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 60.

Exercice 4 Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs dont le PGCD est 35 et le PPCM est 210.

Exercice 5 Soit n un entier positif. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

-i- n est un carré (i.e. il existe un entier m tel que $n = m^2$).

-ii- $\sqrt{n}$ est un entier.

-iii- $\sqrt{n}$ est un rationnel.

Exercice 6 Calculer le PGCD de 48 et 210, et de 81 et 237. Dans chaque cas exprimer l'identité de Bezout.

Exercice 7 Soient a, b et c trois entiers tels que a et b ne sont pas tous deux nuls. En utilisant l'identité de Bezout, démontrer que l'équation $ax + by = c$ a au moins une solution $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ si et seulement si PGCD(a, b) divise c.

Exercice 8 (a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $58x + 21y = 0$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $58x + 21y = 1$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $14x+35y=21$.

(d) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $637x+595y=29$.

Exercice 9 Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 13 & [19] \\ n & \equiv & 6 & [12] \end{array}\right.$$

Exercice 10 Donner un exemple de trois nombres entiers p, q, a tels que $p|a$, $q|a \not\Longrightarrow pq|a$. Quelle hypothèse peut-on rajouter pour que l'implication devienne vraie ?

Exercice 11 Donner un exemple de trois nombres entiers p, a, b tels que $p|ab \not\Longrightarrow p|a$ ou $p|b$. Quelle hypothèse peut-on rajouter pour que l'implication devienne vraie ?

Exercice 12 1. Calculer les tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n=5$ et $n=6$.

2. Lister les éléments inversibles dans chaque cas.

Exercice 13 Trouver l'inverse de 6 modulo 37.

Exercice 14 (a) Montrer que $3^{512}-2^{256}$ est un multiple de 7.

(b) Montrer que $2^{70}+3^{70}$ est un multiple de 13.

Exercice 15 (a) Soit n un entier. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 7 ?

(b) Existe-il des couples (x, y) d'entiers tels que $7x-4y^3=1$?

Exercice 16 Calculer le dernier chiffre de 7^{25}. Même question avec $7^{100!}$.

Exercice 17 Quel est le dernier chiffre de 1997^{2002} dans l'écriture décimale ? Dans l'écriture diadique ? Dans l'écriture triadique ?

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que n^2 divise $(n+1)^n-1$.

Exercice 19 (a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $13x+2 \equiv 0[97]$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^5 \equiv 3[7]$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv x[6]$.

Exercice 20 (Sujet juin 2005) On considère un entier n supérieur ou égal à 3.

(a) Montrer que, quel que soit l'entier x, les carrés des nombres x et $n-x$ sont congrus modulo n.

(b) On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ des restes modulo n, et c l'application de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui à un reste modulo n associe son carré. Cette application est-t-elle injective ? Est-elle surjective ?

(c) Dresser la table des carrés modulo 7.

(d) Montrer que l'équation $x^2-6xy+2y^2=7003$ n'a pas de solutions (x, y) entières (exprimer le premier membre comme un carré modulo 7).