

CHAPITRE 4

1 Exemples de groupes, sous-groupes, et morphismes

Exercice 1 1. Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe.

2. Montrer que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

3. $(\{2k, k \in \mathbb{Z}\}, +)$ et $(\{2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}, +)$ sont-ils des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 2 Soit \mathbb{R}^2 muni de l'opération \star définie par :

$$(a, b) \star (a', b') = (a - 2a', b + 3b')$$

Est-ce un groupe ?

Exercice 3 Soit \star la loi de composition définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \star y = x + y - xy$$

1. \mathbb{R} , muni de cette loi est-il un groupe commutatif ?

2. Montrer que $a = 1$ n'est pas un élément régulier de (\mathbb{R}, \star)

3. Calculer $\underbrace{x \star x \star \dots \star x}_n$ pour $n \geq 1$

4. $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \star)$ est-il un groupe commutatif?

Exercice 4 Soit \star la loi de composition définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \star y = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$$

1. Montrer que (\mathbb{R}, \star) est un groupe commutatif.
2. Montrer que $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, \star)$ définie par $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 5 Soit $E =]-1, +1[$ et la loi de composition \star définie sur E par :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$$

1. Montrer que (E, \star) est un groupe commutatif.
2. Montrer que $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (E, \star)$ définie par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 6 Soit E un ensemble fini et soit $S(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E .

1. Si on note \circ l'opération de composition, vérifier que $(S(E), \circ)$ est un groupe.
2. Si $A = \{x, y, z\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$, trouver un isomorphisme de $S(A)$ dans $S(B)$. En déduire que si $|A| = n$, alors $S(A)$ est isomorphe à $S_n = S(\{1, 2, \dots, n\})$.
3. Les éléments de S_n sont appelés des permutations. On note

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la permutation de S_3 qui envoie 1 sur 2, 2 sur 1, et 3 sur 3, et de façon générale

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

Soient p_1 et p_2 deux permutations de S_5 définies par :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer $p_1 \circ p_2$, $p_2 \circ p_1$, et l'inverse de p_1 .

4. Calculer le cardinal de S_n

Exercice 7 Soit ε l'application de S_n dans \mathbb{R} définie par :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

1. Dire pourquoi ε est bien définie et déterminer son image (on pourra montrer que $(\varepsilon(\sigma))^2 = 1$).
2. Montrer que ε est un morphisme de S_n vers un groupe que l'on précisera.

Exercice 8 1. Déterminer par leur table tous les groupes à 2, à 3, et à 4 éléments.

2. Ecrire la table de la loi \circ des isométries d'un triangle équilatéral ABC.

3. Ecrire la table de la loi \circ des permutations d'un ensemble à 3 éléments.

2 Propriétés des groupes, sous-groupes, et morphismes

Exercice 9 Montrer que la composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes.

Exercice 10 Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes d'un même groupe G , montrer que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G .

Exercice 11 Soient (G, \diamond) et (G', \star) deux groupes, et soit f un morphisme de groupes de (G, \diamond) dans (G', \star) .

1. Si e est l'élément neutre de (G, \diamond) et e' est l'élément neutre de (G', \star) , montrer que $f(e) = e'$.
2. Montrer que pour tout x de G , $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$.
3. Soit G_1 un sous-groupe de G . Montrer que $f(G_1)$ est un sous-groupe de G' .
4. On appelle noyau de f et on note $\ker(f)$ l'ensemble $\{g \in G, f(g) = e'\}$. Montrer que $(\ker(f), \diamond)$ est un groupe.
5. Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{e\}$.

Exercice 12 Montrer que si G est un groupe, $\{g \in G, gh = hg \forall h \in G\}$ est un sous-groupe de G .

Exercice 13 Soit G un groupe tel que $\forall g \in G, g^2 = e$ où e est le neutre de G . Montrer que G est commutatif.

Rappel 1 Si G est un groupe fini et H est un sous-groupe de G , alors le cardinal de H divise celui de G . En particulier, l'ordre d'un élément de G divise le cardinal de G .

Exercice 14 On note C_n le sous-groupe de (\mathbb{C}, \times) dont les éléments sont les

$$\left\{ \exp\left(\frac{2\pi ik}{n}\right), k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$$

1. Montrer que tous les sous-groupes finis de (\mathbb{C}, \times) , sont de la forme précédente (On pourra montrer qu'un sous-groupe de cardinal n est contenu dans C_n , puis conclure par cardinalité).
2. Montrer que $C_d \subseteq C_n$ si et seulement si d divise n .
3. Dédurre des deux questions précédentes que le sous-groupe de (\mathbb{C}, \times) engendré par $\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ et $\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$ est C_d , où d est le ppcm de m et de n .

Exercice 15 Soit G est un groupe dont le cardinal p est un nombre premier.

1. Montrer que G est cyclique (i.e. engendré par un élément) donc commutatif.
2. Montrer qu'il existe un isomorphisme de G dans C_p , où C_n est défini comme dans l'exercice 14

3 Anneaux, corps

Exercice 16 1. Vérifier que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire mais que ce n'est pas un corps.

2. Vérifier que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps.

Exercice 17 Soit X un ensemble. Montrer que $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ est un anneau.

Exercice 18 1. Montrer que $\mathcal{A} = (\{a + ib\sqrt{5}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire.

2. Quels sont les éléments inversibles de \mathcal{A} pour l'opération \cdot ?

3. L'anneau \mathcal{A} est-il un corps?

Exercice 19 1. Montrer que $\mathcal{B} = (\mathbb{C}^2, +, \star)$ est un anneau, où $(a, b) \star (a', b') = (aa' - \bar{b}b', ba' + \bar{a}b')$.

2. Montrer que tout élément non nul de \mathcal{B} est inversible (pour \star).

3. \mathcal{B} est-il un corps?