Université Claude Bernard Lyon 1 2009-2010
L3 Géométrie élémentaire

Fiche 2 - Constructions à la règle et au compas

Considérons le plan dans lequel nous distinguons deux points : $O = (0, 0)$ et $I = (1, 0)$.

Définition : les points du plan dits <u>constructibles</u> sont énumérés ci-dessous :
- O et I.
- les point d'intersection de droites (M_1M_2) et (N_1N_2) distinctes, pour M_1, M_2, N_1, N_2 des points constructibles.
- les points d'intersection de la droite (M_1M_2) et du cercle $C(N_1, N_2)$ centré en N_1 et passant par N_2, pour M_1, M_2, N_1, N_2 des points constructibles.
- les points d'intersection de cercles $C(M_1, M_2)$ et $C(N_1, N_2)$ distincts, pour M_1, M_2, N_1, N_2 des points constructibles.

Définition : un nombre réel x est dit <u>constructible</u> si c'est l'abscisse d'un point constructible.

À titre d'exercice préliminaire on pourra démontrer qu'un nombre réel x est constructible si et seulement si le point $(x, 0)$ est constructible.

Exercice 1

Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ qui est stable par racine carrée (ce qui signifie que la racine carrée d'un nombre constructible positif est un nombre constructible).

Indication : pour la stabilité par le produit et l'inverse on pourra utiliser Thalès ; pour la stabilité par la racine carrée on pourra utiliser Pythagore.

Vocabulaire
On dira qu'une droite est constructible si elle passe par au moins deux points constructible.
On dira qu'un cercle est constructible si son centre est constructible et qu'il passe par au moins un point constructible.
On dira enfin qu'une figure est constructible si elle peut être tracée à l'aide de droites et de cercles constructibles.

Exercice 2

Montrer que les figures suivantes sont constructibles ?

- un carré d'aire égale à 1.
- un carré d'aire égale à 2.
- un cercle de circonférence égale à π.
- un carré d'aire égale à $\sqrt{2}$.
- un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon 1 centré en l'origine.

Un peu d'algèbre

Soit $K \subset L$ une inclusion de corps. En particulier L est un K-espace vectoriel, et on note $[L : K]$ sa dimension, qu'on appelle aussi degré de L sur K. Si on a $K \subset L \subset M$ alors $[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$.

On dit qu'un élément $a \in L$ est algébrique sur K si il existe un polynôme $P \in K[X]$ tel que $P(a) = 0$. On note alors $K(a)$ le plus petit sous-corps de L contenant a et K. On peut montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire irréductible $Q \in K[X]$ tel que $Q(a) = 0$, appelé polynôme minimal de a, et que $[K(a) : K] = deg(Q)$.

Exemple : $\sqrt{2}$ est un algébrique sur $\mathbb{Q}$, de degré 2. En effet, $\sqrt{2}$ est racine de $X^2 - 2$.

Critère de Wantzel (admis) : tout nombre constructible est algébrique, et son degré est une puissance de 2.

On admettra également que π n'est pas algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 3

Les figures suivantes sont-elles constructibles ?

- un carré d'aire égale à $\sqrt[3]{2}$.
- un cercle de circonférence égale à 1.
- un carré inscrit dans le cercle de rayon 1 centré en l'origine.
- un cercle de circonférence égale à $\sqrt{2}$.
- un cercle d'aire égale à $\sqrt{2}\pi^2$.

Angles et polygônes réguliers constructibles

On dit que l'angle orienté de mesure θ est constructible si le point M du cercle de rayon 1 centré en O tel que $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \theta$ est constructible. Cela revient à dire que $\cos(\theta)$ est un nombre constructible.

On dit que le polygône régulier à n côtés est constructible si l'angle orienté de mesure $\frac{2\pi}{n}$ l'est.

Exercice 4 : constructibilité de l'hexagone régulier

Nous allons démontrer que l'hexagone régulier est constructible.

1. Soient m et n des nombres entiers premiers entre eux. Montrer que l'angle orienté de mesure $\frac{2\pi}{mn}$ est constructible si et seulement si les angles orientés de mesures respectives $\frac{2\pi}{m}$ et $\frac{2\pi}{n}$ sont constructibles.
2. Conclure à l'aide de l'exercice 2.
3. Donner une démonstration plus géométrique de la constructiibilité de l'hexagone régulier.

Exercice 5

Le polygône régulier à 2^n côtés est-il constructible ?

Exercice 6 : constructibilité du polygône régulier à 15 côtés

1. Nous allons commencer par démontrer que le pentagone régulier est constructible.

(a) Remarquer que $\omega = e^{2i\pi/5}$ est une racine de $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, et en déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5}) + \frac{1}{2} = 0$.
(b) Montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$ sont les racines de $X^2 + \frac{X}{2} - \frac{1}{4}$.
(c) Conclure.

2. Le polygône régulier à 15 côtés est-il constructible ?
3. Et ceux à 30, 60 et 120 côtés ?

Exercice 7 : le polygône régulier à 9 côtés

1. Posons $\omega = e^{2i\pi/9}$. Démontrer que le degré de ω est algébrique de degré 6 sur $\mathbb{Q}$.
2. Vérifier que $\omega + \frac{1}{\omega} = 2\cos(\frac{2\pi}{9})$, et en déduire que ω est algébrique de degré 2 sur $\mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{9}))$.
3. Conclure en utilisant le critère de Wantzel.
4. En déduire un contre-exemple pour le problème de la trisection de l'angle.