ENTRAINEMENT ALGÈBRE (LOGIQUE-APPLICATIONS-COMPLEXES)

Enoncé

Exercice 1

On considère la proposition

$$(P) \quad \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 2 \Rightarrow \exists y \geq 2, x \geq y)\,.$$

1) Ecrire la négation de (P).
2) La proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$.
1) L'application f est-elle injective ? Justifiez votre réponse.
2) L'application f est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.
3)La fonction f est-elle bijective ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3

1) Trouver les racines du polynôme $z^2 - 2iz - 4i\sqrt{3}$.
2) Chercher une racine réelle du polynôme $z^3+(2-2i)z^2-4i(\sqrt{3}+1)z-8i\sqrt{3}$.
3) Trouver toutes les racines du polynôme $z^3+(2-2i)z^2-4i(\sqrt{3}+1)z-8i\sqrt{3}$
4) Donner les modules et des arguments de ces racines.

Exercice 4

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$(1+x)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)x^2}{2}$$

Correction

Exercice 1

On considère la proposition

$$(P) \quad \forall x \in \mathbb{R}, (x \geq 2 \Rightarrow \exists y \geq 2, x \geq y).$$

1) Ecrire la négation de (P).

$non(P) \equiv \exists x \in \mathbb{R}, (x \geq 2 \text{ et } \forall y \geq 2, x < y)$

2) La proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

La proposition (P) est vraie. En effet, quel que soit un réel x, si x est supérieur ou égal à 2 alors en posant $y = x$ on obtient que $y \geq 2$ et $x \geq y$.
Remarque : on aurait aussi pû poser $y = 2$, on aurait encore obtenu que $y \geq 2$ et $x \geq y$.

Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$.

1) L'application f est-elle injective ? Justifiez votre réponse.

$f(0, 1) = 1 = f(1, 0)$, c'est-à-dire que $1 \in \mathbb{R}_+$ admet au moins deux antécédents par f qui sont $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Par conséquent f n'est pas injective.

2) L'application f est-elle surjective ? Justifiez votre réponse.

Soit $z \in \mathbb{R}_+$. Posons $(x, y) = (\sqrt{z}, 0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. On obtient que $f(x, y) = \sqrt{z}^2 = z$. Cela prouve que tout réel positif ou nul possède un antécédent par f. Ainsi, f est surjective.
Autre démonstration : soit $z \in \mathbb{R}_+$. Le lieu des points du plan de coordonnées (x, y) telles que $x^2 + y^2 = z$ est le cercle de centre l'origine et de rayon $\sqrt{z}$. L'ensemble des antécédents de z par f est donc l'ensemble des couples de coordonnées des points de ce cercle, et est non-vide. Par conséquent f est surjective.

3)La fonction f est-elle bijective ? Justifiez votre réponse.

La fonction f n'est pas injective, donc elle n'est pas bijective.

Exercice 3

1) Trouver les racines du polynôme $z^2 - 2iz - 4i\sqrt{3}$.

- Commençons par chercher $\Delta \in \mathbb{C}$ un nombre complexe dont le carré soit le discriminant du trinôme considéré.
Méthode : soit $\Delta = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $\Delta^2 = (-2i)^2 - (-4i\sqrt{3}) = -4 + 16i\sqrt{3}$. Alors on a

$$(1) \qquad x^2 - y^2 = 4 \quad \text{et}$$
$$(2) \qquad 2xy = 16\sqrt{3}$$

Par ailleurs, $x^2 + y^2 = |\Delta^2| = \sqrt{4^2 + 16^2 \times 3} = 4\sqrt{1 + 4^2 \times 3} = 4\sqrt{49} = 28$. Ainsi en y ajoutant l'égalité (1) on obtient $2x^2 = 24$, d'où l'on déduit que $x = \pm 2\sqrt{3}$. Si on prend par exemple $x = 2\sqrt{3}$, alors d'après (2) $y = 4$.

Posons maintenant $\Delta = 2\sqrt{3} + 4i$ et vérifions : $\Delta^2 = (2\sqrt{3} + 4i)^2 = -4 + 16i\sqrt{3}$.

- Ainsi les racines du polynôme considéré sont $z_1 = \frac{1}{2}(2i + 2\sqrt{3} + 4i) = \sqrt{3} + 3i$ et $z_2 = \frac{1}{2}(2i - 2\sqrt{3} - 4i) = -\sqrt{3} - i$.

2) Chercher une racine réelle du polynôme $z^3 + (2-2i)z^2 - 4i(\sqrt{3}+1)z - 8i\sqrt{3}$.

Posons $z_0 = -2$ et calculons :
$$z_0^3 + (2-2i)z_0^2 - 4i(\sqrt{3}+1)z_0 - 8i\sqrt{3} = (-2)^3 + (2-2i)(-2)^2 - 4i(\sqrt{3}+1)(-2) - 8i\sqrt{3} = 0$$
Donc $z_0 = -2 \in \mathbb{R}$ est une racine du polynôme considéré.

3) Trouver toutes les racines du polynôme $z^3 + (2-2i)z^2 - 4i(\sqrt{3}+1)z - 8i\sqrt{3}$

Remarquons que $(z+2)(z^2 - 2iz - 4i\sqrt{3}) = z^3 + (2-2i)z^2 - 4i(\sqrt{3}+1)z - 8i\sqrt{3}$. Par conséquent les racines de ce polynôme sont $z_0 = -2$, $z_1 = \sqrt{3} + 3i$ et $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

4) Donner les modules et des arguments de ces racines.

$|z_0| = 2$
Comme $-2 \in \mathbb{R}_-$, $\mathrm{Arg}(z_0) = \pi[2\pi]$.

$|z_1| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$
$z_1 = 2\sqrt{3}(1/2 + i\sqrt{3}/2) = 2\sqrt{3}(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3)$, donc $\mathrm{Arg}(z_1) = \pi/3[2\pi]$.

$|z_2| = \sqrt{3+1} = 2$
$z_2 = 2(-\sqrt{3}/2 - i/2) = 2(\cos\pi + \pi/6 + i\sin\pi + \pi/6)$, donc $\mathrm{Arg}(z_2) = 7\pi/6[2\pi]$.

Exercice 4

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$(1+x)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)x^2}{2}$$

- si $n = 2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1+x)^n = 1+x^2+2x \geq 1+x^2 = 1+\frac{n(n-1)x^2}{2}$. Par conséquent, la proposition à démontrer est vraie si $n = 2$.

- supposons maintenant que la proposition soit vérifiée pour un certain entier $n \geq 2$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+\frac{n(n-1)x^2}{2})(1+x) = 1+\frac{(n+1)nx^2}{2}+\frac{n(n-1)x^3-2x^2+2x}{2}$$

Ainsi, pour montrer que la proposition est vérifiée au rang $n+1$, il suffit de démontrer que $n(n-1)x^3 - 2x^2 + 2x$ est positif ou nul quel que soit $x \in \mathbb{R}_+$. x étant positif ou nul, $n(n-1)x^3 - 2x^2 + 2x = x(n(n-1)x^2 - 2x + 2)$ a le même signe que $n(n-1)x^2 - 2x + 2$. Le discriminant de ce trinôme vaut $4 - 8n(n-1) < 0$, donc ce trinôme est de signe constant, en l'occurence ici positif. CQFD.