CORRECTION

Exercice 1. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et non identiquement nulle. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big(\forall k \in \{0,\ldots,n-1\}, \int_a^b t^k f(t)dt = 0\Big) \Longrightarrow \Big(f \text{ change de signe au moins } n \text{ fois sur }]a,b[\Big)$$

- initialisation (n=0): si f ne changeais pas de signe et comme f est non-identiquement nulle, alors on aurait

$$\int_a^b f(t)dt > 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_a^b f(t)dt < 0$$

Par conséquent puisque $\int_a^b f(t)dt = 0$, f change de signe.
- supposons que la propriété voulue est vraie au rang n. Ainsi, si pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$ on a $\int_a^b t^k f(t)dt = 0$, alors par hypothèse de récurrence f change de signe au moins n fois sur $]a,b[$. Notons $x_1,\ldots,x_n$ les points où f change de signe. Posons $P(t) = (t-x_1)\cdots(t-x_n)$. P est un polynôme de degré n qui change de signe en $x_1,\ldots,x_n$ et uniquement en ces points. Par conséquent Pf ne change pas de signe en $x_1,\ldots,x_n$ et

$$\int_a^b P(t)f(t)dt0$$

On en déduit que Pf change de signe (même raisonnement que pour l'initialisation). Notons x_{n+1} l'endroit du changement de signe: on sait que $x_{n+1} \neq x_i$ pour tout $i = 1,\ldots,n$ et donc que P ne change pas de signe en x_{n+1}. Par conséquent, f change de signe en x_{n+1}.

Exercice 2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue convexe. Rappelons *l'inégalité de convexité* : pour tous $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \geq 0$ tels que $\sum \lambda_i = 1$ et pour tous $a_1,\ldots a_n \in \mathbb{R}$,

$$g(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i g(a_i)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on choisit désormais une subdivision à pas constant $(b_1,\ldots,b_n)$ de $[a,b]$, puis on pose $\lambda_i = 1/n$ et $a_i = f(b_i)$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. Ainsi on a

$$\underbrace{g(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(b_i))}_{:=u_n} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} g\circ f(b_i)}_{:=v_n}$$

On remarque ensuite que $(b-a)u_n$ (resp. $(b-a)v_n$) est une somme de Riemann associée à f (resp. $g\circ f$) et donc

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}(v_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g\circ f(t)dt$$

Comme g est continue, $g(u_n)$ converge vers $g(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt)$ et on obtient l'égalité voulue par passage à la limite.

Exercice 3. En effectuant le changement de variable $u = \cos t$ on trouve que

$$I := \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \int_1^{-1} -\frac{\arccos u}{1+u^2}du = \int_{-1}^1 \frac{\arccos u}{1+u^2}du$$

Puis en intégrant par parties avec $f(u) = \arccos u$ et $g(u) = \arctan u$ on a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(u)g'(u)du = [f(u)g(u)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f'(u)g(u)du \\ &= [\arccos u \arctan u]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\arctan u}{\sqrt{1-u^2}}du \end{aligned}$$

On remarque enfin que $\frac{\arctan u}{\sqrt{1-u^2}}$ est une fonction impaire, donc son intégrale entre -1 et 1 est nulle. Finalement,

$$I = \arccos 1 \arctan 1 - \arccos -1 \arctan -1 = 0 - \pi(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{4}$$

Exercice 4. 1) En effectuant le changement de variable $x = \pi/2 - t$ on trouve que $I_n = J_n$.

2) Posons $\alpha = \pi/4$. D'une part

$$0 \leq \int_0^\alpha \sin^n t dt \leq \int_0^\alpha t^n dt \leq \frac{(\pi/4)^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_\alpha^1 \sin^n t dt &= \int_0^\alpha \sin^n(t-\alpha)dt = \int_0^\alpha (\sin t\cos\alpha - \cos t \sin\alpha)^n dt \\ &= (\frac{\sqrt{2}}{2})^n \int_0^\alpha (\cos t - \sin t)^n dt \\ &\leq (\frac{\sqrt{2}}{2})^n \int_0^\alpha dt = \frac{\pi}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Finalement $I_n = J_n$ s'écrit comme la somme de deux suites qui convergent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3) On intègre par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{n+1} t dt = \underbrace{[\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t dt \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)\sin^n t dt = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

Par conséquent $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. En particulier

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)\cdots 1}{(2k)\cdots 2}\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)\cdots 2}{(2k+1)\cdots 3}$$

4) En distingant les cas n pair et n impair on déduit aisément de ce qui précède que $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

5) Pour tout $n \geq 0$ $I_n \geq I_{n+1}$ (car $0 \leq \cos t \leq 1$ pour $t \in [0, \pi/2]$). Par ailleurs

$$\frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donc $I_n \sim I_{n+1}$ et alors d'après la question 4 I_n est equivalent à $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. - Si $k = -1$ alors

$$\int_a^b \frac{\ln x}{x} dx = [\frac{1}{2}(\ln x)^2]_a^b = (\ln b)^2 - (\ln a)^2$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{\ln t}{t} dt = \lim_{x\to 0} (-(\ln x)^2) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$$

- Si $k \neq -1$ on intègre par parties :

$$\int_a^b x^k \ln x dx = [\frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x]_a^b - \int_a^b \frac{x^{k+1}}{k+1}\frac{1}{x} dx = [\frac{x^{k+1}}{k+1}(\ln x - \frac{1}{k+1})]_a^b$$

Par conséquent d'une part

$$\int_x^1 t^k \ln t dt = \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2} - \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} \xrightarrow[x\to 0]{} \begin{cases} -\frac{1}{(k+1)^2} & \text{si} \quad k \geq 0 \\ +\infty & \text{si} \quad k \leq -2 \end{cases}$$

et d'autre part

$$\int_1^x t^k \ln t dt = \frac{1-x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad k \geq 0 \\ \frac{1}{(k+1)^2} & \text{si} \quad k \leq -2 \end{cases}$$

Exercice 6. 1) ϕ est évidemment bilineaire, symétrique et positive. Montrons qu'elle est définie. Si $\phi(f, f) = 0$ alors

$$0 \geq -\int_0^1 f(t)^2 dt = \int_0^1 f'(t)^2 dt \leq 0$$

Par conséquent $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$, et donc $f \equiv 0$.

2) Soient $f \in V$ et $g \in W$. Etant donné que $g = g'$ on a

$$\phi(f, g) = \int_0^1 \big(f(t)g'(t) + f'(t)g(t)\big) dt = \int_0^1 (fg)'(t) dt = f(1)g(1) - f(0)g(0) = 0$$

Exercice 7. Rappelons que que si $\theta \in]2\pi/3, \pi]$ alors $\cos\theta \in]-1/2, -1]$. Supposons maintenant que l'on puisse trouver 3 vecteurs unitaires u_1, u_2, u_3 tels que l'angle formé par u_i et u_j pour $i \neq j$ est toujours strictement supérieur à $2\pi/3$. Alors

$$\begin{aligned} \| u_1 + u_2 + u_3 \| &= \sum_{i=1}^{3} \| u_i \|^2 + \sum_{i \neq j} \| u_i \| \cdot \| u_j \| \cos(u_i, u_j) \\ &= 3 + \sum_{i \neq j} \cos(u_i, u_j) < 3 - \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} = 0 \quad \textbf{Impossible} \end{aligned}$$

Donc par l'absurde, on en déduit le résultat voulu.

Exercice 8. 1) On commence par définir la projection orthogonale sur F

$$p : E \longrightarrow E; x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \varphi(x, e_i) e_i$$

Pour tout $x \in E$, $p(x) \in F$, de plus pour tout $i = 1, \dots, n$

$$\varphi(x - p(x), e_i) = \varphi(x, e_i) - \varphi(x, e_i) = 0$$

ce qui implique que $x - p(x) \in F^{\perp}$. Par conséquent $E = F + F^{\perp}$. De plus le seul élément de F qui soit orthogonal à lui-même est 0 (car φ est définie). Donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ et $E = F \oplus F^{\perp}$.

2) Pour tout $x \in E$ (et d'après la questin précédente)

$$\| x \|^2 = \| p(x) \|^2 + \| x - p(x) \|^2 \geq \| p(x) \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x, e_i)^2$$

Exercice 9. 1) Commençons par remarquer que

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = z + 2t \\ y = 2z + 3t \end{array} \right.$$

On en déduit que $F = \text{vect}(\underbrace{e_1 + 2e_2 + e_3}_{:=v_1}, \underbrace{2e_1 + 3e_2 + e_4}_{:=v_2})$. Par ailleurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de F. Posons maintenant

$$u_1 := \frac{v_1}{\| v_1 \|} \text{ et } u_2 := \frac{v_2 - < u_1, v_2 > u_1}{\| v_2 - < u_1, v_2 > u_1 \|}$$

Par construction, ces vecteurs forment une base orthonormée de F. Dans la base $\mathcal{B}$ cela donne

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} e_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} e_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} e_3 \text{ et } u_2 = \sqrt{\frac{2}{15}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{30}} e_2 - 2\sqrt{\frac{2}{15}} e_3 + \sqrt{\frac{3}{10}} e_4$$

2) La projection orthogonale p_F sur F est donnée par la formule suivante : $p_F(x) = < x, u_1 > u_1 + < x, u_2 > u_2$ pour tout $x \in E$. Calculons les images des vecteurs de la base :

$$p_F(e_1) = \frac{1}{\sqrt{6}} u_1 + \sqrt{\frac{2}{15}} u_2 = \frac{3}{10} e_1 + \frac{2}{5} e_2 - \frac{1}{10} e_3 + \frac{1}{5} e_4$$

$$p_F(e_2) = \sqrt{\frac{2}{3}} u_1 + \frac{1}{\sqrt{30}} u_2 = \frac{2}{15} e_1 + \frac{7}{10} e_2 + \frac{1}{15} e_3 + \frac{1}{10} e_4$$

$$p_F(e_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}u_1 - 2\sqrt{\frac{2}{15}}u_2 = -\frac{1}{10}e_1 + \frac{1}{5}e_2 + \frac{7}{10}e_3 - \frac{2}{5}e_4$$

$$p_F(e_4) = \sqrt{\frac{3}{10}}u_2 = \frac{1}{5}e_1 + \frac{1}{10}e_2 - \frac{2}{5}e_3 + \frac{3}{10}e_4$$

Par conséquent la matrice de p_F dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 3/10 & 2/15 & -1/10 & 1/5 \\ 2/5 & 7/10 & 1/15 & 1/10 \\ 1/10 & 1/15 & 7/10 & -2/5 \\ 1/5 & 1/10 & -2/5 & 3/10 \end{pmatrix}$$