RÉVISIONS

Integration

Exercice 1. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et non identiquement nulle telle que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\int_a^b t^k f(t)dt = 0$$

Démontrer que f change au moins n fois de signe sur $]a, b[$.

Exercice 2. (Inégalité de Jensen) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue convexe. Démontrer que

$$g\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g \circ f(t)dt$$

Exercice 3. Calculer

$$\int_0^\pi \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

Exercice 4. (Intégrales de Wallis) On note $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$.
1) Comparer I_n et J_n.
2) En coupant $[0, \pi/2]$ en $[0, \alpha]$ et $[\alpha, \pi/2]$ (avec α convenablement choisi), démontrer que $I_n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.
3) Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_{2k} et I_{2k+1} en fonction de k.
4) Montrer que pour tout $n > 0$, $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
5) Montrer que $I_n \sim I_{n-1}$. En déduire un équivalent simple de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 5. (Intégrales de Bertrand) Calculer suivant les valeurs de $k \in \mathbb{Z}$ l'intégrale

$$\int_a^b x^k \ln x dx \qquad (0 < a < b)$$

En déduire, quand elles existent, la valeur des limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\int_x^1 x^k \ln x dx \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty}\int_1^x x^k \ln x dx$$

Orthogonalité

Exercice 6. On pose $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continument dérivables de [01] dans $\mathbb{R}$, muni d'une application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)dt$$

1) Démontrer que ϕ défini un produit scalaire.
2) Posons $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f' = f\}$. Montrer que V

et W sont deux espaces vectoriels orthogonaux.

Exercice 7. Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien. Existe-t-il 3 vecteurs unitaires e_1, e_2, e_3 telles que l'angle formé par eux deux à deux soit toujours strictement supérieur à $2\pi/3$?

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel (éventuellement de dimension infinie) muni d'un produit scalaire φ. Soit $u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de vecteurs orthonormés de de E. On pose $F = \mathrm{vect}(u_1, \ldots, u_n)$.
1) Démontrer que $F \oplus F^{\perp} = E$ et que $F^{\perp\perp} = F$.
2) Démontrer que pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x, u_i)^2 \leq \| x \|^2$$

Exercice 9. Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien de dimension 4 muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$. On pose

$$F = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in E, x + y + z + t = 0 \text{ et } x + 2y + 3z + 4t = 0\}$$

1) Trouver une base orthonormée de F.
2) Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F.