

# INTÉGRABILITÉ ET ALGÈBRES QUANTIQUES

DAMIEN CALAQUE

## 1. SYSTÈMES LOCAUX ET ÉQUATIONS DE KNIZHNIK-ZAMOLODCHIKOV

### 1.1. Faisceaux.

#### 1.1.1. Définition et exemples.

Soit  $X$  un espace topologique, qu'on supposera localement connexe et localement connexe par arcs.

**Définition 1.1.** *Un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  est la donnée*

- d'un ensemble de sections  $\mathcal{F}(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,
- d'applications de restrictions  $r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  pour toute inclusion  $V \subset U$ ,

satisfaisant les conditions suivantes :

(associativité)  $r_{V,W} \circ r_{U,V} = r_{U,W}$  si  $W \subset V \subset U$ ,

(recollement) soit  $U$  un ouvert de  $X$ ,  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $U$  par des ouverts, et  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ ,  $i \in I$ , des sections tels que pour tout  $(i, j) \in I^2$ ,

$$r_{U_i, U_{ij}}(s_i) = r_{U_j, U_{ij}}(s_j).$$

Alors il existe une unique section  $s \in \mathcal{F}(U)$  telle que  $r_{U, U_i}(s) = s_i$  quel que soit  $i \in I$ .

On parle de faisceau en groupes (resp. en espace vectoriels, en algèbres, etc...) si les ensembles des section sont des groupes (resp. des espace vectoriels, des algèbres, etc...) et si les applications de restriction sont des homomorphismes de groupes (resp. des applications linéaires, des morphismes d'algèbres, etc...).

En l'absence d'ambiguïté, on note  $s|_V := r_{U,V}(s)$  la restriction d'une section  $s \in \mathcal{F}(U)$  à un plus petit ouvert  $V \subset U$ .

**Exemples 1.2.** (i)  $X \supset U \mapsto C^0(U) = \{\text{fonctions continues sur } U\}$  définit un faisceau (en algèbres).

(ii)  $X \supset U \mapsto C^\infty(U)$ , avec  $X$  une variété différentiable (par exemple un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ), définit un faisceau (en algèbres).

(iii)  $X \supset U \mapsto \text{Hol}(U)$ , avec  $X$  une variété analytique complexe (par exemple un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ ), définit un faisceau (en algèbres).

(iv)  $\mathbb{R} \supset U \mapsto \{\text{fonctions continues et intégrables sur } U\}$  n'est PAS un faisceau sur  $\mathbb{R}$ .

(v) soit  $p : Y \rightarrow X$  un homéomorphisme local, c.-a.-d. une application continue telle que pour tout  $y \in Y$  il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $y$  tel que  $p|_W$  est un homéomorphisme sur son image. On note  $\mathcal{F}(U)$  l'ensemble des applications continues  $s : U \rightarrow p^{-1}(U)$  telle que  $p \circ s = \text{id}_U$ , qu'on appelle les sections de  $p$ . Montrer que la restriction de  $s$  à un plus petit ouvert  $V \subset U$  est à valeurs dans  $p^{-1}(V)$ . En déduire que  $\mathcal{F}$  est un faisceau sur  $X$ .

(vi) soit  $E$  un ensemble fixé.  $X \supset U \mapsto E$ , avec  $r_{U,V} = \text{id}_E$ , est un faisceau. On note ce faisceau  $\underline{E}$ , qu'on qualifie de faisceau constant.

(vii) soit  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $X$  et  $U$  un ouvert de  $X$ . Alors  $\mathcal{F}|_U : U \supset V \mapsto \mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$  définit un faisceau sur  $U$ , qu'on appelle la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $U$ .

Un morphisme de faisceaux  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est la donnée d'applications  $f(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ , pour tout les ouverts  $U \subset X$ , qui commute aux restrictions :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow r_{U,V} & & \downarrow r_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

On dit que  $f$  est un isomorphisme si  $f(U)$  est un isomorphisme quel que soit  $U$ .

### 1.1.2. Recoller des faisceaux.

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts. Étant donné un faisceau  $\mathcal{F}_i$  sur chaque  $U_i$  tel que pour tout couple  $(i, j)$  tel que<sup>1</sup>  $U_{ij} \neq \emptyset$  on ait un isomorphisme de faisceaux  $\varphi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$ , nous donnons maintenant une condition suffisante pour “recoller” les faisceaux  $\mathcal{F}_i$  en un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  :

$$(1.1) \quad \varphi_{ii} = \text{id} \quad \text{et} \quad (\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij})|_{U_{ijk}} = \varphi_{ik}|_{U_{ijk}}$$

Pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , on définit  $\mathcal{F}(U)$  comme l'ensemble des  $(s_i)_{i \in I}$  tels que  $s_i \in \mathcal{F}_i(U_i \cap U)$  et  $\varphi_{ij}(s_i|_{U_{ij}}) = s_j|_{U_{ij}}$ .

**Exercice 1.3.** Montrer que  $\mathcal{F}$  défini comme précédemment est un faisceau sur  $X$ .

Deux tels faisceaux  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  recollé à l'aide de données locales  $(\mathcal{F}_i, \varphi_{ij})$  et  $(\mathcal{G}_i, \psi_{ij})$  pour un même recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  sont isomorphes si il existe des isomorphismes  $f_i : \mathcal{F}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}|_{U_i}$  satisfaisant la suivante :

$$(1.2) \quad \psi_{ij} \circ f_i|_{U_{ij}} = \varphi_{ij}$$

### 1.1.3. Tiges et tirés-en-arrière.

Soit  $x \in X$  et  $\mathcal{F}$  un faisceau sur  $X$ . La tige  $\mathcal{F}_x$  de  $\mathcal{F}$  en  $x$  est le quotient de la réunion disjointe des  $\mathcal{F}(U)$  pour  $U \ni x$  par la relations d'équivalence suivante : deux sections  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ ,  $i = 1, 2$ , sont équivalentes si il existe un ouvert  $V \supset U_1 \cap U_2 \ni x$  sur lesquels leurs restrictions coïncident :  $s_1|_V = s_2|_V$ .

Les éléments de la tige  $\mathcal{F}_x$  sont appelés les germes de sections de  $\mathcal{F}$  en  $x$ .

Étant donné une application continue  $f : Y \rightarrow X$  entre deux espaces topologiques et un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$ , on peut construire un faisceau  $f^*\mathcal{F}$  sur  $Y$ , appelé tiré-en-arrière de  $\mathcal{F}$  le long de  $f$ , qui est tel que  $(f^*\mathcal{F})_y = \mathcal{F}_{f(y)}$ . On n'explicite pas cette construction pour les faisceaux (qui est un peu compliquée) dans la mesure où nous verrons une construction *ad hoc* plus simple dans le cas des systèmes locaux.

## 1.2. Systèmes locaux et groupe fondamental.

### 1.2.1. Définition et exemple principal.

**Définition 1.4.** Un système local sur  $X$  est un faisceau  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels localement isomorphe à un faisceau constant du type  $\underline{\mathbb{C}}^n$ . Plus précisément, quel que soit  $x \in X$  il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  tel que  $\mathcal{L}|_U \cong \underline{\mathbb{C}}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$  n'est pas nécessairement fixé).

Par conséquent, étant donné un système local  $\mathcal{L}$  sur  $X$  il existe un recouvrement  $(U_i)_i$  de  $X$  par des ouverts tels que  $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \underline{\mathbb{C}}^{n_i}$ . Pour tout couple  $(i, j)$  tel que  $U_{ij} \neq \emptyset$ , notons  $\varphi_{ij} : \mathbb{C}^{n_i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{n_j}$  l'isomorphisme suivant:

$$\underline{\mathbb{C}}^{n_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{U_i} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{L}|_{U_{ij}} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{L}|_{U_j} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{C}}^{n_j}.$$

<sup>1</sup>Pour un suite d'indices  $i_1, \dots, i_k$ , on note  $U_{i_1 \dots i_k} := U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$ .

De plus la condition d'associativité impose que

$$(1.3) \quad \varphi_{ii} = \text{id} \quad \text{et} \quad \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$$

pour tout triplet  $(i, j, k)$  tel que  $U_{ijk} \neq \emptyset$ . Dans ce contexte une section  $s \in \mathcal{L}(U)$  correspond à la donnée d'un vecteur  $v_i \in \mathbb{C}^{n_i}$  pour chaque  $i$  tel que  $U_i \cap U \neq \emptyset$  satisfaisant la condition de recollement suivante :  $\varphi_{ij}(v_i) = v_j$  pour tout couple  $(i, j)$  tel que  $U_{ij} \cap U \neq \emptyset$ .

Réciproquement, la donnée d'un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  par des ouverts et d'isomorphismes de transition  $\varphi_{ij} : \mathbb{C}^{n_i} \rightarrow \mathbb{C}^{n_j}$  satisfaisant (1.3) suffit à définir un système local sur  $X$ .

**Remarque 1.5.** *Si  $X$  est connexe alors  $n_i = n_j$  quels que soient  $i$  et  $j$ .*

**Exercice 1.6.** Supposons que  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  et considérons un système complet d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre à coefficients holomorphes :

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = K_i(f) \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\}, K_i \in \text{Hol}(X, \text{End}(V))),$$

où  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Pour tout ouvert  $U \in X$  on note  $\mathcal{S}(U)$  l'ensemble des solutions de ce système d'EDP.  $\mathcal{S}$  définit un faisceau en  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels sur  $X$  (avec les applications de restrictions évidentes).

Montrer que  $\mathcal{S}$  est un système local si et seulement si le système d'EDP est intégrable (on dit aussi compatible) :

$$\frac{\partial K_i}{\partial z_j} - \frac{\partial K_j}{\partial z_i} = [K_i, K_j] \quad (\text{quels que soient } i \text{ et } j).$$

### 1.2.2. Tiré-en-arrière et représentation de monodromie.

Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application continue et  $\mathcal{L}$  un système local sur  $X$ . Donnons-nous un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $X$  par des ouverts tels que  $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \underline{\mathbb{C}^{n_i}}$ , et notons  $\varphi_{ij} : \mathbb{C}^{n_i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{n_j}$  les isomorphismes de transition.

Le tiré-en-arrière  $f^*\mathcal{L}$  de  $\mathcal{L}$  par  $f$  peut être décrit de la manière suivante (on peut prendre cette description comme une définition de  $f^*\mathcal{L}$ ) : on considère le recouvrement de  $Y$  donné par les ouverts  $V_i := f^{-1}(U_i)$ , et on exige que  $(f^*\mathcal{L})|_{V_i} = \underline{\mathbb{C}^{n_i}}$  avec les mêmes isomorphismes de transition  $\varphi_{ij} : \mathbb{C}^{n_i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{n_j}$  que pour  $\mathcal{L}$ .

On considère maintenant le cas particulier où  $Y = [0, 1]$ . Pour tout chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ , on a alors un système local  $\mathcal{V} := \gamma^*\mathcal{L}$  sur  $[0, 1]$ .

**Lemme 1.7.** *Tout système local  $\mathcal{V}$  sur  $[0, 1]$  est isomorphe au faisceau constant  $\underline{\mathcal{V}}_0$ .*

*Démonstration.* On recouvre  $[0, 1]$  par des intervalles ouverts  $U_k \subset [0, 1]$ ,  $k = 1, \dots, l$ , tels que  $0 \in U_1$ ,  $1 \in U_l$ ,  $U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$ , et  $\mathcal{V}|_{U_k} \cong \underline{\mathbb{C}^{n_k}}$ . Montrons maintenant que  $\mathcal{V}$  est isomorphe au faisceau constant  $\underline{\mathbb{C}^{n_1}}$ .

Quel que soit  $k \in \{1, \dots, l\}$ , on définit par l'isomorphisme

$$f_k : \underline{\mathbb{C}^{n_1}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{C}^{n_k}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}|_{U_k},$$

où le premier isomorphisme est donné par  $\varphi_{(k-1)k} \circ \dots \circ \varphi_{23} \circ \varphi_{12} : \mathbb{C}^{n_1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{n_k}$ . Il est assez facile de vérifier que la condition (1.2) est satisfaite, et que l'on peut ainsi recoller ces données locales pour obtenir un isomorphisme de faisceaux  $f : \underline{\mathcal{V}}_0 \cong \underline{\mathbb{C}^{n_1}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}$ .  $\square$

On obtient ainsi, en considérant les tiges en 1 des faisceaux, un isomorphisme

$$g := f_1 : \mathcal{V}_0 = (\underline{\mathcal{V}}_0)_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_1.$$

**Exercice 1.8.** *Montrer que cet isomorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixes du chemin.*

En particulier, si  $\gamma$  est un lacet basé en  $x \in X$  (i.e.  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ ) alors on récupère un automorphisme de  $\mathcal{V}_0 = \mathcal{L}_x$ , qui reste ne dépend que de la classe d'homotopie à point base fixe du lacet. On obtient ainsi une application

$$\rho_{\mathcal{L}} : \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} GL(\mathcal{L}_x).$$

**Exercice 1.9.** *Montrer que cette application est un morphisme de groupes (le produit  $[\gamma_1][\gamma_2]$  des classes de deux lacets dans le groupe fondamental est donné par la classe  $[\gamma_1\gamma_2]$  de leur concaténation, où on parcourt  $\gamma_1$  en premier).*

$\rho$  définit donc une représentation du groupe fondamental  $\pi_1(X, x)$ , qu'on appelle représentation de monodromie.

**Exemple 1.10.** Revenons à l'exemple de l'exercice 1.6. Soit  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin différentiable. Dans ce cas  $\gamma^*\mathcal{L}$  est le système local dont les sections sont les solutions de l'équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre suivante :

$$(1.4) \quad f' = K(f) \quad \left( K = \sum_{i=1}^n \gamma_i' K_i \in C^\infty([0, 1], V) \right).$$

Ainsi l'isomorphisme  $\mathcal{V}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_1$  est l'application qui, à un vecteur "condition initiale" donné  $v_0$  associe la valeur  $v_1$  au temps 1 de l'unique solution  $f$  de (1.4) telle que  $f(0) = v_0$ .

### 1.3. Équations de Knizhnik-Zamolodchikov et groupes de tresses.

On pose  $Y = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \text{ si } i \neq j\}$  et  $X = Y/S_n$ , où l'action du groupe symétrique  $S_n$  sur  $Y$  est la suivante :

$$\sigma \cdot (z_1, \dots, z_n) := (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}).$$

#### 1.3.1. Les équations de Knizhnik-Zamolodchikov.

Soit  $\mathfrak{g}$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie,  $h \in \mathbb{C}$  et  $t \in S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ . Plus précisément,  $t = \sum_i x_i \otimes y_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  satisfait les deux conditions suivantes :

- (symétrie)  $t^{2,1} := \sum_\nu y_\nu \otimes x_\nu = \sum_\nu x_\nu \otimes y_\nu = t$  ;
- (invariance) pour tout  $a \in \mathfrak{g}$ ,  $[a \otimes 1 + 1 \otimes a, t] = \sum_\nu ([a, x_\nu] \otimes y_\nu + x_\nu \otimes [a, y_\nu]) = 0$ .

**Remarque 1.11.** *Pour la seconde condition, le crochet de Lie considéré dans le membre le plus à gauche est le commutateur dans l'algèbre  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ .*

Soit  $V_1, \dots, V_n$  des représentations de  $\mathfrak{g}$ . On considère le système complet d'équations aux dérivées partielles suivant, dites équations de Knizhnik-Zamolodchikov :

$$(1.5) \quad \frac{\partial f}{\partial z_i} = h \underbrace{\sum_{j|j \neq i} \frac{t^{i,j}}{z_i - z_j}}_{=: K_i} f \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\}).$$

Ici les équations sont à valeurs dans le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $W := V_1 \otimes \dots \otimes V_n$  et on utilise les notations suivantes :

- $t^{i,j} = \sum_\nu x_\nu^{(i)} \circ y_\nu^{(j)}$  ;
- plus généralement si  $f = f_1 \otimes \dots \otimes f_m \in U(\mathfrak{g})^{\otimes m}$ , avec  $m \leq n$ , alors pour toute combinaison  $(i_1, \dots, i_m)$  de  $m$  éléments dans  $\{1, \dots, n\}$  on définit

$$f^{i_1, \dots, i_m} = f_1^{(i_1)} \circ \dots \circ f_m^{(i_m)} \in \text{End}(W);$$

- pour tout  $a \in U(\mathfrak{g})$  et tout  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$a^{(i)} := \text{id}_{V_1} \otimes \dots \otimes \text{id}_{V_{i-1}} \otimes a \otimes \text{id}_{V_{i+1}} \otimes \dots \otimes \text{id}_{V_n} \in \text{End}(W),$$

et il est aisé de constater que  $a^{(i)}$  et  $b^{(j)}$  commutent si  $i \neq j$ .

**Proposition 1.12.** *Le système (1.5) est intégrable :*

$$h \frac{\partial K_i}{\partial z_j} - h \frac{\partial K_j}{\partial z_i} = h^2 [K_i, K_j].$$

*Démonstration.* Nous allons montrer que  $\frac{\partial K_i}{\partial z_j} - \frac{\partial K_j}{\partial z_i} = 0 = [K_i, K_j]$ .

On commence par le plus facile :

$$\frac{\partial K_i}{\partial z_j} - \frac{\partial K_j}{\partial z_i} = \frac{t^{i,j} - t^{j,i}}{(z_i - z_j)^2} = 0.$$

La dernière égalité est une conséquence de la symétrie de  $t$ .

Continuons :

$$\begin{aligned} [K_i, K_j] &= \left[ \sum_{k|k \neq i} \frac{t^{i,k}}{z_i - z_k}, \sum_{l|l \neq j} \frac{t^{j,l}}{z_j - z_l} \right] \\ &= \left[ \sum_{(k,l)|\{k,l\} \neq \{i,j\}} \frac{t^{i,k}}{z_i - z_k}, \sum_{l|l \neq j} \frac{t^{j,l}}{z_j - z_l} \right] + \left[ \sum_{k|k \neq i} \frac{t^{i,k}}{z_i - z_k}, \frac{t^{j,i}}{z_j - z_i} \right] \\ &\quad + \left[ \frac{t^{i,j}}{z_i - z_j}, \sum_{k|k \neq j} \frac{t^{j,k}}{z_j - z_k} \right] \\ &= \sum_{(i,j,k)|\#\{i,j,k\}=3} \left( \left[ \frac{t^{i,k}}{z_i - z_k}, \frac{t^{j,k}}{z_j - z_k} \right] + \left[ \frac{t^{i,k}}{z_i - z_k}, \frac{t^{i,j}}{z_j - z_i} \right] + \left[ \frac{t^{i,j}}{z_i - z_j}, \frac{t^{j,k}}{z_j - z_k} \right] \right) \end{aligned}$$

Dans la dernière égalité nous avons utilisé le fait que  $t^{i,k}$  et  $t^{j,l}$  commutent si  $i, j, k, l$  sont tous distincts deux à deux. Nous allons maintenant utiliser le lemme suivant pour montrer que chaque terme de la somme principale est nulle.

**Lemme 1.13.** *Si  $i, j, k$  sont tous distincts deux à deux alors  $[t^{i,j}, t^{i,k} + t^{j,k}] = 0$ .*

*Démonstration du lemme.* Il suffit de faire la démonstration pour  $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ , et ce dans  $U(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ . On calcule :

$$\begin{aligned} [t^{1,2}, t^{1,3} + t^{2,3}] &= [t \otimes 1, \sum_{\nu} (x_{\nu} \otimes 1 \otimes y_{\nu} + 1 \otimes x_{\nu} \otimes y_{\nu})] \\ &= \sum_{\nu} [t, x_{\nu} \otimes 1 + 1 \otimes x_{\nu}] \otimes y_{\nu} = 0. \end{aligned}$$

La toute dernière égalité est une conséquence de l'invariance de  $t$ . □

*Fin de la démonstration de la proposition.* En appliquant deux fois le lemme précédent on trouve que

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{t^{i,k}}{z_i - z_k}, \frac{t^{j,k}}{z_j - z_k} \right] + \left[ \frac{t^{i,k}}{z_i - z_k}, \frac{t^{i,j}}{z_j - z_i} \right] + \left[ \frac{t^{i,j}}{z_i - z_j}, \frac{t^{j,k}}{z_j - z_k} \right] \\ &= \left[ \frac{t^{i,k}}{z_i - z_k}, \frac{t^{j,k}}{z_j - z_k} \right] + \left[ \frac{t^{i,k}}{z_i - z_k}, \frac{t^{j,k}}{z_i - z_j} \right] - \left[ \frac{t^{i,k}}{z_i - z_j}, \frac{t^{j,k}}{z_j - z_k} \right] \\ &= [t^{i,k}, t^{j,k}] \left( \frac{1}{(z_i - z_k)(z_j - z_k)} + \frac{1}{(z_i - z_k)(z_i - z_j)} - \frac{1}{(z_i - z_j)(z_j - z_k)} \right) \end{aligned}$$

Or la fraction rationnelle à l'intérieur de la parenthèse est identiquement nulle. La démonstration de la proposition est donc terminée. □

### 1.3.2. Un système local sur le quotient $X = Y/S_n$ .

D'après la proposition que nous venons de démontrer, nous avons un système local  $\mathcal{L}^{KZ}$  sur  $Y$  dont les sections sont les solutions des équations de Knizhnik-Zamolodchikov. Ainsi, on obtient une représentation de monodromie

$$\pi_1(Y, \bullet) \longrightarrow GL(W).$$

Afin d'obtenir une représentation de  $\pi_1(X, \bullet)$  on choisit des modules  $V_1 = \dots = V_n =: V$  identiques. De cette manière les sections de  $\mathcal{L}^{KZ}$  (i.e. les solutions des équations de K-Z) sont équipés d'une action du groupe symétrique  $S_n$ , qui agit par permutation des facteurs. On note alors  $\overline{\mathcal{L}^{KZ}}$  le faisceau défini sur  $X$  dont de la manière suivante :  $\overline{\mathcal{L}^{KZ}}(U)$  est l'espace des solutions holomorphes  $f : p^{-1}(U) \rightarrow W$  (i.e.  $f \in \mathcal{L}^{KZ}(p^{-1}(U))$ ) telles que

$$(1.6) \quad f(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}) = \sigma \cdot f(z_1, \dots, z_n).$$

Si  $\tilde{U}$  est un ouvert  $S_n$ -invariant de  $X$  (i.e. si  $\tilde{U}$  est de la forme  $p^{-1}(U)$ ) alors les solutions holomorphes des équations de K-Z définies sur  $\tilde{U}$  satisfaisant (1.6) sont dites  $(S_n)$ -équivariantes.

**Proposition 1.14.**  $\overline{\mathcal{L}^{KZ}}$  est un système local sur  $X$ , dont la tige au-dessus de tout point est  $W$ .

*Démonstration.* Remarquons que  $S_n$  agit librement sur  $Y$ . Ainsi pour tout  $x \in X$  pour un ouvert  $U \ni x$  assez petit on a  $f^{-1}(U) \cong U \times S_n$ . C'est-à-dire que si on choisit  $y \in Y$  tel que  $p(y) = x$  alors il existe un ouvert  $V \ni y$  tel que  $f^{-1}(U) = \coprod_{\sigma \in S_n} \sigma(V)$ . Ainsi on a  $\overline{\mathcal{L}^{KZ}}|_U \cong \mathcal{L}^{KZ}|_V$ . De plus, quitte à restreindre  $U$  on peut supposer que  $\mathcal{L}^{KZ}|_V \cong \underline{\mathbb{C}^n}$ .

On voit par ailleurs que la tige de  $\overline{\mathcal{L}^{KZ}}$  au-dessus de  $x$  est identique à la tige de  $\mathcal{L}^{KZ}$  au-dessus de  $y$ , qui est  $W$ .  $\square$

Nous obtenons donc une représentation de monodromie

$$\rho_{KZ}^h : \pi_1(X, \bullet) \longrightarrow GL(V^{\otimes n}).$$

En supposant que  $h$  est un paramètre formel (plutôt qu'un nombre complexe) on obtient

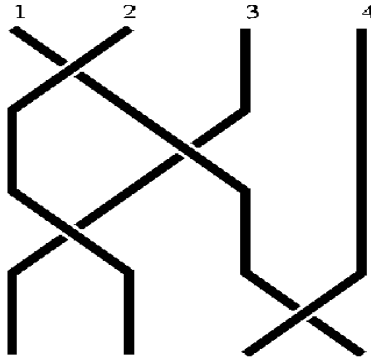
$$\rho_{KZ}^h : \pi_1(X, \bullet) \longrightarrow GL(V^{\otimes n})[[h]].$$

### 1.3.3. Le groupe des tresses $B_n$ .

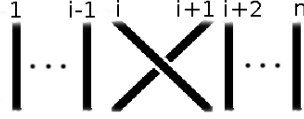
Considérons un point base  $y = (z_1, \dots, z_n) \in Y$  pour lequel les  $z_i$  sont des réels tels que  $0 < z_1 < \dots < z_n < 1$ . On note  $x = p(y) \in X$  et on définit  $B_n := \pi_1(X, x)$ , le groupe des tresses à  $n$  brins.

Nous allons maintenant donner une présentation de  $B_n$  par générateurs et relations. Dans la prochaine section on explique comment obtenir des représentations de ce groupe à partir de données purement algébriques.

Remarquons déjà qu'on peut représenter tout élément de  $B_n$  par un diagramme de tresse comme suit :



Ici le croisement élémentaire



noté  $\sigma_i$  a pour inverse le croisement élémentaire opposé (i.e. où  $i$ -ième brin passe derrière le  $(i+1)$ -ième) et représente la classe d'homotopie  $[\sigma_i]$  du chemin  $\gamma(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$  défini par  $z_k(t) = z_k$  pour  $k \neq i, j$  et<sup>2</sup>

$$z_i(t) = \frac{z_i(1 + e^{it\pi}) + z_{i+1}(1 - e^{it\pi})}{2} \quad \text{et} \quad z_{i+1}(t) = \frac{z_i(1 - e^{it\pi}) + z_{i+1}(1 + e^{it\pi})}{2}.$$

La concaténation des lacets (i.e. le produit dans  $B_n$ ) se traduit ici par la concaténation des diagrammes, et on peut vérifier graphiquement les faits suivants :

- (1) les tresses élémentaires  $\sigma_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) et leurs inverses engendrent tous les diagrammes de tresses *via* la concaténation ;
- (2) si  $|i-j| \geq 2$  alors les diagrammes  $\sigma_i\sigma_j$  et  $\sigma_j\sigma_i$  représentent la même classe de lacets;
- (3) les diagrammes  $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$  et  $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$  représentent la même classe de lacets.

On a donc un homomorphisme surjectif du groupe engendré par les  $\sigma_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) avec les relations

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad (|i-j| \geq 2) \quad \text{et} \quad \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad (\forall i),$$

vers  $B_n$ , donné par  $\sigma_i \mapsto [\sigma_i]$ .

**Théorème 1.15.** *Ce morphisme est un isomorphisme.*

On ne donnera pas la démonstration de ce théorème.

## 2. BIGÈBRES ET ÉQUATION DE YANG-BAXTER

### 2.1. Bigèbres.

#### 2.1.1. Définition et exemples.

**Définition 2.1.** Une *bigèbre* est la donnée d'une algèbre associative unitaire  $(B, m, 1)$ , d'un coproduit  $\Delta : B \rightarrow B \otimes B$ , et d'une coïmité  $\epsilon : B \rightarrow k$ , satisfaisant les propriétés suivantes :

- (1)  $\Delta$  est coassociatif :

$$(\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta;$$

- (2)  $\Delta$  est coïmitaire, de coïmité  $\epsilon$  :

$$(\epsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = \text{id} = (\text{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta;$$

- (3)  $\Delta$  est un morphisme d'algèbres unitaires : pour tout  $a, b \in B$

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) \quad \text{et} \quad \Delta(1) = 1 \otimes 1.$$

Ici on note  $xy$  le produit de deux éléments dans une algèbre donnée  $A$ , et  $B \otimes B$  est l'algèbre unitaire ayant produit  $(a \otimes b)(a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$  et unité  $1 \otimes 1$  ;

- (4)  $\epsilon$  est un morphisme d'algèbres unitaires :

$$\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b) \quad \text{et} \quad \epsilon(1) = 1.$$

À partir de maintenant on utilisera souvent les notations suivantes :

- $\Delta^{(n)} := (\Delta \otimes \text{id}^{\otimes(n-1)}) \circ (\Delta \otimes \text{id}^{\otimes(n-2)}) \circ \dots \circ \Delta : B \rightarrow B^{\otimes(n+1)}$  pour le coproduit itéré  $n$ -fois (grâce à la coassociativité l'ordre dans lequel on l'itère importe peu) ;

<sup>2</sup>Topologiquement parlant,  $z_i$  passe "en-dessous" de  $z_{i+1}$  dans le plan complexe.

- $\Delta(b) = b' \otimes b''$ , où une somme est implicitement entendue (i.e. que  $b'$  et  $b''$  ne sont pas à proprement parler des éléments de  $B$ ) ;
- plus généralement on note  $\Delta^{(n)}(b) = b' \otimes b'' \otimes b''' \otimes \dots \otimes b^{(n+1)}$  ;

**Exemples 2.2.** (i) Soit  $(G, *, e)$  un groupe fini. On considère  $\mathcal{F}(G)$  l'algèbre (commutative) des applications définies sur  $G$  et à valeurs dans  $k$ . On définit le coproduit et la coïunité comme suit :  $\epsilon(f) = f(e)$  et

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{F}(G) &\longrightarrow \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(G \times G) \\ f &\longmapsto (\Delta(f) : (x, y) \mapsto f(x * y)). \end{aligned}$$

C'est un exercice de vérifier que  $(\mathcal{F}(G), \Delta, \epsilon)$  est une bigèbre. On laisse également le lecteur se convaincre que  $\Delta^{(n)}(f)$  est la fonction définie sur  $G^{\times(n+1)}$  par  $(x_0, \dots, x_n) \mapsto f(x_0 * \dots * x_n)$ .

(ii) Soit  $(G, *, e)$  un groupe fini. On considère l'algèbre  $kG$  du groupe  $G$ , i.e. l'algèbre engendrée par les éléments  $g \in G$  du groupe avec les relations  $gh = g * h$  ( $g, h \in G$ ). c'est une algèbre associative unitaire, l'unité étant donnée par  $e$ . Dans la mesure où le coproduit et la coïunité d'une bigèbre sont des morphismes d'algèbres, il suffit de les définir sur les générateurs. On pose donc  $\Delta(g) = g \otimes g$  et  $\epsilon(g) = 1$  pour tout  $g \in G$ . C'est encore une fois un exercice de vérifier que  $(kG, \Delta, \epsilon)$  est une bigèbre<sup>3</sup>. On peut aussi facilement voir que  $\Delta^{(n)}(g) = g^{\otimes(n+1)}$  pour tout générateur  $g \in G$ .

(iii) Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Son algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{g})$  est une algèbre associative unitaire. Rappelons que  $U(\mathfrak{g})$  est l'algèbre associative unitaire engendrée par les éléments  $x \in \mathfrak{g}$  avec pour relations  $xy - yx = [x, y]$  ( $x, y \in \mathfrak{g}$ ). Pour définir  $\Delta$  et  $\epsilon$  il suffit de poser  $\Delta(1) = 1 \otimes 1$  et  $\epsilon(1) = 1$ , et de les donner sur les générateurs  $x \in \mathfrak{g}$ . On choisit de poser  $\epsilon(x) = 0$  et  $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ . Il faut maintenant vérifier qu'ils sont bien définis, et ici seul le cas de  $\Delta$  nécessite un calcul :

$$\begin{aligned} \Delta(xy - yx) &= (x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y) - (y \otimes 1 + 1 \otimes y)(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\ &= xy \otimes 1 + x \otimes y + y \otimes x + 1 \otimes xy - (yx \otimes 1 + y \otimes x + x \otimes y + 1 \otimes yx) \\ &= (xy - yx) \otimes 1 + 1 \otimes (xy - yx) = [x, y] \otimes 1 + 1 \otimes [x, y] = \Delta([x, y]). \end{aligned}$$

La vérification des propriétés restantes (coassociativité et coïunitarité de  $\Delta$ ) sont laissées en exercice au lecteur.

### 2.1.2. Représentations d'une bigèbre.

Soit  $(B, \Delta, \epsilon)$  une bigèbre. Étant données deux représentations  $V, W$  de  $B$ , le coproduit  $\Delta$  nous permet de faire agir  $B$  sur leur produit tensoriel  $V \otimes W$  : pour  $b \in B$ ,  $v \in V$  et  $w \in W$ ,

$$(2.1) \quad b \cdot (v \otimes w) := \Delta(b) \cdot (v \otimes w) = (b' \cdot v) \otimes (b'' \cdot w).$$

**Lemme 2.3.** *L'équation (2.1) définit sur  $V \otimes W$  une structure de  $B$ -module.*

*Démonstration.* Le résultat découle du fait que  $\Delta$  est un morphisme d'algèbres :

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot (v \otimes w)) &= \Delta(a) \cdot (\Delta(b) \cdot (v \otimes w)) = (\Delta(a)\Delta(b)) \cdot (v \otimes w) \\ &= \Delta(ab) \cdot (v \otimes w) = (ab) \cdot (v \otimes w). \end{aligned}$$

Le lemme est démontré. □

**Exercice 2.4.** *Montrer que, étant données trois représentations  $V_1, V_2, V_3$  de  $B$ , l'identité  $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \rightarrow V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$  est un isomorphisme de  $B$ -modules (utiliser la coassociativité de  $\Delta$ ).*

<sup>3</sup>Par définition  $\Delta$  et  $\epsilon$  sont des morphismes d'algèbres. De plus on a immédiatement que  $\Delta$  et  $\epsilon$  sont unitaires. par conséquent il reste simplement à vérifier d'une part que  $\Delta$  et  $\epsilon$  sont bien définis (i.e. préservent les relations définissant  $kG$ ) et d'autre part que  $\Delta$  est coassociatif et unitaire d'unité  $\epsilon$ . Dans les deux cas ce n'est pas très compliqué.



On remarque également que  $k$  est naturellement une représentation de  $B$ , où la structure de module provient de la coïté  $\epsilon : B \rightarrow k$  (qui est, rappelons-le, un morphisme d'algèbres). Ce module est appelé le module unité (parfois aussi le module "trivial").

Les représentations d'une bigèbre forment l'exemple emblématique de catégorie monoïdale (une notion que nous abordons plus loin).

**Exemples 2.5.** Reprenons deux des exemples donnés en 2.2.

Tout d'abord l'exemple (iii) : une représentation de  $U(\mathfrak{g})$  est un  $\mathfrak{g}$ -module, et la structure de  $\mathfrak{g}$ -module usuelle sur le produit tensoriel de deux  $\mathfrak{g}$ -modules coïncide avec celle induite par le coproduit. De plus le  $\mathfrak{g}$ -module trivial usuel est précisément le module unité.

Ensuite l'exemple (ii) : une représentation de  $kG$  est un  $G$ -module, et l'action diagonale de  $G$  sur le produit tensoriel de deux  $G$ -modules est exactement celle induite par le coproduit. Ici le  $G$ -module trivial usuel est aussi le module unité.

## 2.2. Bigèbres quasi-triangulaires.

Étant donnés deux  $B$ -modules  $V$  et  $W$ , si la transposition  $\tau : V \otimes W \rightarrow W \otimes V ; v \otimes w \mapsto w \otimes v$  est un isomorphisme de  $k$ -modules, ce n'est pas pour autant un morphisme de  $B$ -modules (à moins que  $\Delta$  soit cocommutative, i.e.  $\Delta(b) = b' \otimes b'' = b'' \otimes b' =: \Delta^{\text{op}}(b)$ ).

Cette observation motive l'introduction d'une classe particulière de bigèbres.

**Définition 2.6.** Une bigèbre quasi-triangulaire est la donnée d'une bigèbre  $(B, \Delta, \epsilon)$  et d'un élément inversible  $R \in (B \otimes B)^\times$  tel que

- (1) pour tout  $b \in B$ ,  $\Delta^{\text{op}}(b)R = R\Delta(b)$  ;
- (2)  $(\Delta \otimes \text{id})(R) = R^{1,3}R^{2,3}$  ;
- (3)  $(\text{id} \otimes \Delta)(R) = R^{1,3}R^{1,2}$ .

Les deux dernières identités ont lieu dans  $B^{\otimes 3}$ , et on utilise toujours la notation suivante dans  $B^{\otimes n}$  : si  $R = \sum_i a_i \otimes b_i$  alors  $R^{i,j} := a^{(i)}b^{(j)}$  ( $i \neq j$ ) ; et pour tout  $b \in B$  et  $1 \leq k \leq n$ ,  $b^{(k)} := 1^{\otimes(k-1)} \otimes b \otimes 1^{\otimes(n-k-1)}$ .

Ainsi on constate que si  $(B, R)$  est une bigèbre quasi-triangulaire alors l'identité (1) de la définition implique que  $\sigma := \tau \circ R : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$  est un isomorphisme de  $B$ -modules. En effet,

$$b \cdot (\sigma(v \otimes w)) = \tau \circ (\Delta^{\text{op}}(b)R) \cdot (v \otimes w) = \tau \circ (R\Delta(b)) \cdot (v \otimes w) = \sigma(b \cdot (v \otimes w)).$$

Nous abordons plus loin la signification des identités (2) et (3) de la définition. Néanmoins les deux résultats qui suivent donnent un premier aperçu de la richesse de cette structure algébrique.

**Proposition 2.7.** Si  $(B, R)$  est une bigèbre quasi-triangulaire, alors  $R$  satisfait l'équation de Yang-Baxter quantique :

$$(2.2) \quad R^{1,2}R^{1,3}R^{2,3} = R^{2,3}R^{1,3}R^{1,2}.$$

*Démonstration.* On calcule :

$$R^{1,2}R^{1,3}R^{2,3} = R^{1,2}(\Delta \otimes \text{id})(R) = (\Delta^{\text{op}} \otimes \text{id})(R)R^{1,2} = R^{2,3}R^{1,3}R^{1,2}.$$

Dans la dernière égalité on a utilisé l'image par la transposition  $\tau \otimes \text{id}$  de l'identité (2) de la définition 2.6.  $\square$

**Corollaire 2.8.** Si  $(B, R)$  est une bigèbre quasi-triangulaire et si  $V$  est une représentation de  $B$ , alors pour tout  $n \geq 2$  l'application linéaire

$$\begin{aligned} B_n &\longrightarrow GL(V^{\otimes n}) \\ \sigma_i &\longmapsto \sigma^{i,i+1} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes, i.e. définit une représentation de  $B_n$ .

*Démonstration.* En réalité ce résultat est valable pour toute paire  $(V, R)$ , où  $V$  est un  $k$ -module et  $R \in GL(V \otimes V)$  vérifie l'équation de Yang-Baxter quantique (2.2) dans  $GL(V^{\otimes 3})$ .

La relation  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ ,  $|i - j| \geq 2$ , est préservée de manière évidente. Il reste donc à vérifier que la relation  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$  l'est également. Il suffit de le faire pour  $n = 3$  (et donc avec  $i = 1$ ) :

$$\begin{aligned} \sigma^{1,2} \sigma^{2,3} \sigma^{1,2} &= \tau^{1,2} R^{1,2} \tau^{2,3} R^{2,3} \tau^{1,2} R^{1,2} = \tau^{1,2} \tau^{2,3} \tau^{1,2} R^{2,3} R^{1,3} R^{1,2} \\ &= \tau^{1,2} \tau^{2,3} \tau^{1,2} R^{1,2} R^{1,3} R^{2,3} \quad (\text{ici on a utilisé Yang-Baxter}) \\ &= \tau^{1,2} \tau^{1,3} R^{1,3} R^{1,2} \tau^{2,3} R^{2,3} = \tau^{2,3} R^{2,3} \tau^{1,2} R^{1,2} \tau^{2,3} R^{2,3} \\ &= \sigma^{2,3} \sigma^{1,2} \sigma^{2,3}. \end{aligned}$$

Le corollaire est démontré.  $\square$

**2.3. Algèbres de Hopf, dualité, et double.** Dans ce paragraphe on présente une procédure permettant d'obtenir une bigèbre quasi-triangulaire (et donc des représentations du groupe des tresses) à partir d'une bigèbre donnée satisfaisant quelques propriétés supplémentaires.

### 2.3.1. Algèbres de Hopf.

**Définition 2.9.** Une *algèbre de Hopf* est une bigèbre  $(B, \Delta, \epsilon)$  munie d'un morphisme d'algèbres unitaires  $S : B \rightarrow B^{\text{op}}$  (i.e.  $S(ab) = S(b)S(a)$  et  $S(1) = 1$ ) tel que

$$\epsilon \circ S = S \quad \text{et} \quad \Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta^{\text{op}},$$

et qui satisfait

$$(S \otimes \text{id}) \circ \Delta = 1 \circ \epsilon = (\text{id} \otimes S) \circ \Delta.$$

$S$  est appelé l'*antipode*.

Ici on note  $B^{\text{op}}$  l'algèbre unitaire qui a pour espace vectoriel sous-jacent  $B$ , unité 1 et produit  $*$  donné par  $a * b = ba$ .

**Exemples 2.10.** Reprenons les exemples 2.2.

Dans l'exemple 2.2.(i) on peut munir  $\mathcal{F}(G)$  de l'antipode suivante : pour toute fonctions  $f$  sur  $G$  et tout élément  $g \in G$  on pose  $S(f)(g) := f(g^{-1})$ . C'est un exercice facile de vérifier que  $(\mathcal{F}(G), S)$  devient ainsi une algèbre de Hopf.

On peut également munir la bigèbre  $kG$  (exemple 2.2.(ii)) d'une antipode définie sur la base  $(g)_{g \in G}$  par  $S(g) = g^{-1}$ . C'est une fois de plus un exercice de vérifier que  $S$  satisfait les axiomes de la définition 2.9.

Enfin (exemple 2.2.(iii)) la bigèbre  $U(\mathfrak{g})$  est aussi une algèbre de Hopf avec  $S$  définie sur les générateurs  $x \in \mathfrak{g}$  par  $S(x) = -x$ . Nous devons vérifier que  $S$  est bien définie, i.e. que la relation  $xy - yx = [x, y]$  est préservée ; il suffit pour cela de calculer :

$$S(xy - yx) = S(y)S(x) - S(x)S(y) = (-y)(-x) - (-x)(-y) = [y, x] = -[x, y] = S([x, y]).$$

Vérifions que les conditions de la définition 2.9 sont bien remplies, il suffit pour cela de le faire sur les générateurs  $x \in \mathfrak{g}$ . On a tout d'abord  $\epsilon(S(x)) = \epsilon(-x) = 0 = \epsilon(x)$  et  $(S \otimes S)(\Delta(x)) = (-x) \otimes 1 + 1 \otimes (-x) = \Delta(S(x))$ . Ensuite (ici on utilise la notation  $\Delta(x) = x' \otimes x''$ )

$$S(x')x'' = (-x) + x = 0 = x + (-x) = x'S(x'') \quad \text{et} \quad \epsilon(x) = 0.$$

### 2.3.2. La construction du double.

Soit  $(H, m, 1, \Delta, \epsilon)$  une bigèbre de dimension finie (i.e. qui est un  $k$ -module libre de dimension finie). Son dual  $H^*$  est alors naturellement muni d'une structure de bigèbre, ayant pour multiplication  $\Delta^* : H^* \otimes H^* = (H \otimes H)^* \rightarrow H^*$ , pour unité  $\epsilon^* : k \rightarrow H^*$  (autrement dit,  $1_{H^*} = \epsilon$ ), pour coproduit  $m^* : H^* \rightarrow (H \otimes H)^* = H^* \otimes H^*$ , et pour coïunité  $1^* : H^* \rightarrow k$  (autrement dit,  $\epsilon_{H^*}(\xi) = \xi(1)$ ).<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Il convient de remarquer que si  $H$  n'est pas un  $k$ -module libre de type fini alors on a  $H^* \otimes H^* \subset (H \otimes H)^*$ .

Si  $H$  est de surcroît munie d'une antipode  $S$  qui en fait une algèbre de Hopf, alors  $S^* : H^* \rightarrow H^*$  est une antipode qui fait de la bigèbre  $H^*$  décrite précédemment une algèbre de Hopf.

On suppose maintenant donnée une algèbre de Hopf  $(H, S)$  de dimension finie ayant une antipode bijective. Nous allons définir une structure de bigèbre quasi-triangulaire sur  $D(H) := H \otimes H^*$ . Commençons par expliciter la structure de bigèbre sur  $D(H)$  :

- le produit de deux éléments  $a \otimes \xi$  et  $b \otimes \eta$  est donné par la formule suivante :

$$(2.3) \quad (a \otimes \xi) \cdot (b \otimes \eta) := \xi'''(S^{-1}(b'))\xi'(b''')ab'' \otimes \xi''\eta.$$

Ici on a utilisé les notations  $\Delta_H^{(2)}(b) = b' \otimes b'' \otimes b'''$  et  $\Delta_{H^*}^{(2)}(\xi) = \xi' \otimes \xi'' \otimes \xi'''$  ;

- l'unité pour ce produit est  $1_{D(H)} := 1_H \otimes 1_{H^*} = 1_H \otimes \epsilon_H$  ;
- le coproduit d'un élément  $a \otimes \xi$  est donné par

$$\Delta_{D(H)}(a \otimes \xi) := (a' \otimes \xi') \otimes (a'' \otimes \xi''),$$

où  $\Delta_H(b) = b' \otimes b''$  et  $\Delta_{H^*}(\xi) = \xi' \otimes \xi''$  ;

- la coïunité pour ce coproduit est  $\epsilon_{D(H)}(a \otimes \xi) = \epsilon_H(a)\epsilon_{H^*}(\xi) = \epsilon_H(a)\xi(1_H)$ .

**Remarque 2.11.** *Le produit d'unité par (2.3) peut être également caractérisé comme suit :  $(a \otimes 1_{H^*}) \cdot (b \otimes 1_{H^*}) = ab \otimes 1_{H^*}$ ,  $(1_H \otimes \xi) \cdot (1_H \otimes \eta) = 1_H \otimes \xi\eta$ ,  $(a \otimes 1_{H^*}) \cdot (1_H \otimes \xi) = a \otimes \xi$ , et*

$$(1_H \otimes \xi) \cdot (a \otimes 1_{H^*}) = \xi'''(S^{-1}(a'))\xi'(a''')a'' \otimes \xi''.$$

On définit ensuite  $R := \text{id} \in H \otimes H^* \subset D(H) \otimes D(H)$ . Étant donnée une base  $(e_i)_{i \in I}$  de  $H$  et une base duale  $(\xi^i)_{i \in I}$  de  $H^*$ , on a  $R = \sum_{i \in I} (e_i \otimes 1_{H^*}) \otimes (1_H \otimes \xi^i)$ .

**Théorème 2.12.** *Avec les produit, unité, coproduit et coïunité définis ci-dessus,  $D(H)$  est une bigèbre. De plus  $(D(H), R)$  est une bigèbre quasi-triangulaire.*

*Démonstration.* La vérification des axiomes d'une bigèbre est laissée en **exercice**. Il reste à montrer que  $R$  est inversible et satisfait les trois conditions de la définition 2.6.

Posons  $\bar{R} := \sum_{i \in I} (e_i \otimes 1_{H^*}) \otimes (1_H \otimes (\xi^i \circ S_H))$  ; on a alors

$$R\bar{R} = \sum_{i,j \in I} (e_i e_j \otimes 1_{H^*}) \otimes (1_H \otimes \xi^i(\xi^j \circ S_H)).$$

Considérons l'application  $\phi : H \rightarrow H$  définie par  $\phi(x) := \sum_{i,j} e_i e_j (\xi^i(\xi^j \circ S_H))(x)$ . Rappelons que  $\sum_i e_i \xi^i(x) = x$  et calculons

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{i,j \in I} e_i e_j (\xi^i \otimes (\xi^j \circ S_H))(\Delta_H(x)) = \sum_{i \in I} e_i \xi^i(x') \sum_{j \in I} e_j \xi^j(S_H(x'')) \\ &= x' S_H(x'') = 1_H \epsilon_H(x) = 1_H 1_{H^*}(x). \end{aligned}$$

Donc  $R\bar{R} = (1_H \otimes 1_{H^*}) \otimes (1_H \otimes 1_{H^*})$ . On démontre exactement de la même manière que  $\bar{R}R = (1_H \otimes 1_{H^*}) \otimes (1_H \otimes 1_{H^*})$ .  $R$  est donc inversible, et  $R^{-1} = \bar{R}$ .

En utilisant l'identité  $\sum_{i,j} e_i \otimes e_j \otimes \xi^i \xi^j = \sum_i e'_i \otimes e''_i \otimes \xi^i$  on trouve que<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} R^{1,3}R^{2,3} &= \sum_{i,j \in I} (e_i \otimes 1_{H^*}) \otimes (e_j \otimes 1_{H^*}) \otimes (1_H \otimes \xi^i \xi^j) \\ &= \sum_{i \in I} (e'_i \otimes 1_{H^*}) \otimes (e''_i \otimes 1_{H^*}) \otimes (1_H \otimes \xi^i) = (\Delta \otimes \text{id})(R). \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Cette identité se démontre comme suit : on remarque que

$$\sum_{i,j} (e_i \otimes e_j)(\xi^i \xi^j)(x) = \sum_{i,j} (e_i \xi^i(x')) \otimes (e_j \xi^j(x'')) = x' \otimes x'' = \Delta(x) = \sum_i (e'_i \otimes e''_i) \xi^i(x).$$

On démontre exactement de la même manière que  $R^{1,3}R^{1,2} = R^{1,23}$ .

Il reste donc à montrer que la condition (1) de la définition 2.6 est également vérifiée. [...]  $\square$

2.3.3. *Dualité et double en dimension infinie.*

**Définition 2.13.** Deux algèbres de Hopf sont dites *en dualité* si il existe une forme bilinéaire non-dégénérée

$$\langle -, - \rangle : H \times \tilde{H} \longrightarrow k$$

telle que quels que soient  $a, b \in H$  et  $\xi, \eta \in \tilde{H}$ , on a

- $\langle 1, \xi \rangle = \tilde{\epsilon}(\xi)$  et  $\langle a, \tilde{1} \rangle = \epsilon(a)$ ,
- $\langle ab, \xi \rangle = \langle a \otimes b, \Delta(\xi) \rangle = \langle a, \xi' \rangle \langle b, \xi'' \rangle$  et  $\langle a, \xi \eta \rangle = \langle \Delta(a), \xi \otimes \eta \rangle = \langle a', \xi \rangle \langle a'', \eta \rangle$ ,
- $\langle S(a), \xi \rangle = \langle a, \tilde{S}(\xi) \rangle$ .

Ici non-dégénérée signifie que les applications

$$H \longrightarrow (\tilde{H})^* ; a \longmapsto \langle a, - \rangle \quad \text{et} \quad \tilde{H} \longrightarrow H^* ; \xi \longmapsto \langle -, \xi \rangle$$

sont injectives.

Une algèbre de Hopf  $H$  de dimension finie et sa duale  $H^*$  sont évidemment en dualité.

**Exercice 2.14.** Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  et  $G = SL(n, \mathbb{C})$ . Posons  $H := U(\mathfrak{g})$  et  $\tilde{H} := k[G]$  l'algèbre des fonctions régulières sur le groupe algébrique  $G$ .

(1) Comme algèbre,  $k[G] = k[e_{ij} | i, j = 1, \dots, n] / \langle \det((e_{ij})_{i,j}) - 1 \rangle$  et sa structure d'algèbre de Hopf provient de la structure de groupe sur  $G$  (le coproduit et la co-unité sont les mêmes que dans l'exemple 2.2.(i) et l'antipode est donnée dans l'exemple 2.10). Montrer que  $\Delta(e_{ij}) = \sum_k e_{ik} e_{kj}$ ,  $\epsilon(e_{ij}) = \delta_{ij}$  et que  $S(e_{ij})$  est donné par le mineur  $m_{ji}$  de la matrice  $(e_{kl})_{k,l}$  (qui est bien un polynôme en les variables  $e_{kl}$ ).

(2) L'inclusion d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  induit un morphisme d'algèbres (associatives)  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ , et pour tout élément  $a \in U(\mathfrak{g})$  on note  $a_{ij}$  les coefficients de son image dans  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Montrer que

$$\langle a, e_{ij} \rangle := a_{ij}$$

définit une dualité de Hopf entre  $U(\mathfrak{g})$  et  $k[G]$ .

(3) Montrer que cette construction se généralise au cas d'un groupe algébrique complexe  $G \subset GL(n, \mathbb{C})$  et de son algèbre de Lie  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ .

### 3. GROUPES QUANTIQUES ET DÉFORMATIONS

#### 3.1. Déformations.

3.1.1. *Modules topologiquement libres.*

3.1.2. *Déformations de structures algébriques.*

3.1.3. *La notion de limite semi-classique.*

#### 3.2. Rappels sur les algèbres de Lie semi-simples.

3.2.1. *La présentation de Serre.*

3.2.2. *Construction de  $U(\mathfrak{g})$  comme un double.*

#### 3.3. Groupes quantiques.

## REFERENCES

- [1] P. Etingof, I. Frenkel et A. Kirillov, *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Math. Surveys and Monographs, vol. 58, AMS, Providence, RI, 1998.
- [2] P. Etingof et O. Schiffmann, *Lectures on quantum groups*, International Press of Boston Inc, U.S.
- [3] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics **155**, Springer-Verlag, New York, 1995.