COHOMOLOGIE DE QUILLEN POUR LES COMODULES SUR UN ALGÉBROÏDE DE HOPF

DAMIEN CALAQUE

Résumé. Il s'agit des notes d'un exposé donné dans le cadre d'un séminaire sur les espaces de modules de spectres en anneau, qui s'est déroulé du 22 au 26 janvier 2006 au CIRM (Luminy). Dans cet exposé, il s'agissait de montrer comment définir la cohomologie d'André-Quillen associée à une opérade dans le cadre d'une catégorie de E_*E-comodules. Pour cela, on développe la théorie d'homotopie des comodules sur un algébroïde de Hopf.

Les notes des autres exposées du séminaire sont disponibles à l'adresse url suivante : `http://www.cirm.univ-mrs.fr/videos/2007/programmes/conf02b_Fresse.html`

Table des matières

1. Notations et rappels

(R, Γ) est un algébroïde de Hopf commutatif : on entend par là un cogroupoïde dans les anneaux commutatifs. On note $\Delta : \Gamma \to \Gamma \otimes_R \Gamma$ le coproduit, $\epsilon : \Gamma \to R$ la counité, $\gamma : \Gamma \to \Gamma$ l'antipode, et $s : R \to \Gamma$ (resp. $t : R \to \Gamma$) l'application source (resp. cible).

L'antipode nous permet d'associer à tout (Γ-)comodule à gauche M un comodule à droite Γ_γ (et réciproquement). La multiplication commutative de Γ nous permet d'avoir une structure de comodule à gauche sur tout produit R-tensoriel $M_1 \otimes_R M_2$ de comodules à gauche. Ainsi la catégorie $\mathcal{C}_\Gamma$ des comodules à gauche devient une catégorie monoïdale symétrique.

On suppose dans la suite que Γ est plat comme R-module à droite. Cela nous assure (*cf.* exposé 4) que $\mathcal{C}_\Gamma$ est une catégorie abélienne complète et cocomplète. En vertu du résultat de dualité démontré dans l'exposé 4 (voir également [2, Lemme 3.3]) nous appellerons *dualisables* les comodules qui sont projectifs et finiment engendrés comme A-modules. Etant donné un comodule dualisale M, on note $DM := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Gamma}(M, R)_\gamma$ le comodule dual.

Enfin, on note $\overline{\Gamma} \in \mathcal{C}_\Gamma$ le R-module $\ker \epsilon$ avec Γ-coaction $x \mapsto \Delta(x) - x \otimes 1$.

2. Structure de modèle sur $s\mathcal{C}_\Gamma$

2.1. **Une structure de modèle provisoire sur $s\mathcal{C}_\Gamma$.** On dira qu'un morphisme $f : X \to Y$ dans $s\mathcal{C}_\Gamma$ est une *équivalence faible (resp. fibration) provisoire* si pour tout comodule dualizable M dans $\mathcal{C}_\Gamma$,

$$f_* : \mathrm{map}_{s\mathcal{C}_\Gamma}(M, X) \to \mathrm{map}_{s\mathcal{C}_\Gamma}(M, Y)$$

est une équivalence faible (resp. fibration) d'ensembles simpliciaux. Comme d'habitude, les cofibrations provisoires sont les morphismes qui ont la propriété de relèvement à gauche p/r aux fibrations triviales provisoires.

Lemme 2.1. *Tout objet de $s\mathcal{C}_\Gamma$ est provisoirement fibrant.*

Démonstration. Quels que soient M un comodule dualisable et $X \in s\mathcal{C}_\Gamma$ on a un isomorphisme $\mathrm{map}_{s\mathcal{C}_\Gamma}(M, X)_m \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Gamma}(M, X_m)$. En particulier $\mathrm{map}_{s\mathcal{C}_\Gamma}(M, X)$ est un groupe abélien simplicial, et est donc fibrant. Par conséquent X est provisoirement fibrant. □

A partir de maintenant on suppose que Γ est engendrée par les comodules dualisables (en particulier cela implique que tout objet de $\mathcal{C}_\Gamma$ est un quotient d'une somme directe de comodules dualisables). Alors :

Théorème 2.2. *Munie des equivalences faibles, fibrations et cofibrations provisoires, $s\mathcal{C}_\Gamma$ devient une catégorie de modèle simpliciale.*

Démonstration. Parallèle à celle présentée dans [5, §II.4] : on utilise le fait que tout objet est fibrant. □

Remarque 2.3. *En réalité on peut démontrer que cette structure de modèle existe même sans l'hypothèse d'être engendré par les comodules dualisables. La démonstration suit encore* [5, §II.4]*, mais avec la condition (**) de la page 4.2.*

Par ailleurs (une fois de plus en suivant [5, §II.4]), on peut caractériser les cofibrations : ce sont les retracts des morphismes libres. Un morphisme $f : X \to Y$ est libre si (chaque composante homogène de) son normalisé est une inclusion de facteurs directs dont le conoyau est (isomorphe à) une somme directe de comodules dualisables.

Lemme 2.4. *Toute fibration provisoire est surjective terme à terme.*

Démonstration. Soit $p : X \to Y$ une fibration provisoire et soit $y \in Y_n$. Il existe un comodule dualisable M et une application $f : M \to Y_n$ dont l'image contient y : $y = f(t)$. Comme p est une fibration, alors il existe $g : P \to X_n$ tel que $pg = f$. Posons alors $x = g(t)$. Ainsi $p(x) = y$, et p est surjective. □

2.2. **La bonne structure de modèle sur $s\mathcal{C}_\Gamma$.** On suppose dans la suite que Γ est *bon*; cela signifie qu'il est plat comme R-module à droite, que les comodules dualisables engendrent $\mathcal{C}_\Gamma$, et que pour tout $X \in \mathcal{C}_\Gamma$ provisoirement trivial $\overline{\Gamma} \otimes X$ l'est également.

Dans ce cas on peut démontrer (on peut consulter [4, proposition 3.3.1], ou [2, remark 3.6] pour le cas Adams) que toute équivalence faible provisoire $f : X \to Y$ induit un isomorphisme $\pi_* f : \pi_* X \to \pi_* Y$ d'objets gradués dans $\mathcal{C}_\Gamma$. La réciproque n'étant bien évidemment pas vraie, on veut construire une localisation de la structure de modèle provisoire dans laquelle un morphisme $f : X \to Y$ dans $s\mathcal{C}_\Gamma$ soit

- une équivalence faible si f induit un isomorphisme $\pi_* f : \pi_* X \to \pi_* Y$,
- une cofibration si c'est une cofibration provisoire.

On renvoie à [4] et [2, proposition 3.11] pour la construction.

Remarque 2.5. *On peut remplacer $s\mathcal{C}_\Gamma$ par la catégorie $Ch(\Gamma)$ des complexes non bornés de Γ-comodules (c'est le point de vue adopté dans* [4]*), qui est une $Ch(\mathbb{Z})$-catégorie modèle.*

2.3. **L'exemple principal.** On a vu dans l'exposé 4 que si E est un spectre en anneaux commutatif à homotopie près et topologiquement plat, alors (π_*E, E_*E) est un algébroïde de Hopf plat. Par ailleurs il a été démontré (voir [1, 6]) que si E_* est une théorie d'homologie Landweber exacte alors il est d'Adams. Un algébroïde de Hopf Γ est d'Adams si il est plat (à droite), et si $\Gamma \cong \mathrm{colim}\Gamma_\alpha$ comme comodule à gauche pour des comodules Γ_α dualisables.

Enfin, on sait (voir [4, proposition 2.3.3]) que tout algébroïde d'Adams est bon.

3. Algèbres simpliciales sur une opérade simpliciale T en comodules

Soit T une opérade simpliciale dans $\mathcal{C}_\Gamma$.

On note $s\mathcal{C}_\Gamma^T$ la catégorie des T-algèbres dans $s\mathcal{C}_\Gamma$. Etant donné que $s\mathcal{C}_\Gamma$ est cofibrament engendrée, on peut (j'omets ici volontairement les détails techniques, que je ne maitrise pas) transférer la structure de modèle le long de la paire de foncteur adjoints $F_T : s\mathcal{C}_\Gamma \rightleftharpoons s\mathcal{C}_\Gamma^T : U_T$.

Ainsi on obtient une structure de modèle simpliciale sur $s\mathcal{C}_\Gamma^T$ dans laquelle un morphisme $f : A \to B$ est une équivalence faible (resp. une fibration) si $U_T(f)$ en est une dans $s\mathcal{C}_\Gamma$.

Etant donnée une T-algèbre A dans $s\mathcal{C}_\Gamma$ on peut bien évidemment faire de même pour la catégorie $(s\mathcal{C}_\Gamma)_A^T$ des A-modules dans $s\mathcal{C}_\Gamma$. Dans ce cas le transfert se fait le long de l'adjonction : $F_A : s\mathcal{C}_\Gamma \rightleftharpoons (s\mathcal{C}_\Gamma)_A^T : U_A$. On obtient donc une structure de modèle simpliciale pour laquelle un morphisme $f : M \to N$ est une équivalence faible (resp. une fibration) si $U_A(f)$ en est une dans $s\mathcal{C}_\Gamma$.

4. Cohomologie d'André-Quillen pour les T-algèbres en comodules

La cohomologie d'André-Quillen pour les T-algèbres dans $s\mathcal{C}_\Gamma$ se définit exactement de la même façon que dans l'exposé précédent. La seule variation notable est qu'ici tous les objets ne sont pas fibrants dans $s\mathcal{C}_\Gamma$ ... on va donc devoir "résoudre à gauche ET à droite".

4.1. **Dérivations, différentielles, et complexe cotangent.** Soit T une opérade dans $\mathcal{C}_\Gamma$. Soit $A \to X$ un morphisme dans $\mathcal{C}_\Gamma^T$. Comme dans l'exposé précédent on peut définir le R-module des T-dérivations en Γ-comodules $\mathrm{Der}_A^\Gamma(X, M)$. On remarque ensuite que le foncteur $\mathrm{Der}_A^\Gamma(X, -)$ est représentable, et on note $\Omega_T^\Gamma(X/A)$ l'objet qui le représente dans $(\mathcal{C}_\Gamma)_X^T$.

Lemme 4.1. *Le X-module sur T en R-modules $\Omega_T(X/A)$ est naturellement muni d'une structure de Γ-comodule, et avec cette structure $\Omega_T(X/A) \cong \Omega_T^\Gamma(X/A)$.*

Démonstration. Par construction, et pour tout R-module N, on a un isomorphisme $\mathrm{Der}_A(X, N) \cong \mathrm{Der}_A^\Gamma(X, \Gamma \otimes_R N)$ de R-modules. On en déduit un isomorphisme naturel

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})_X^T}(\Omega_T(X/A), N) &\cong \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}_\Gamma)_X^T}(\Omega_T^\Gamma(X/A), \Gamma \otimes_R N) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{(R\text{-mod})_X^T}(\Omega_T^\Gamma(X/A), N)\,. \end{aligned}$$

Le résultat suit. □

On suppose désormais que T est simpliciale et que $A \to X$ est un morphisme dans $s\mathcal{C}_\Gamma^T$. Alors pour tout $n \geq 0$ on a une opérade T_n dans $\mathcal{C}_\Gamma$ et un morphisme $A_n \to X_n$ dans $\mathcal{C}_\Gamma^{T_n}$. On peut ainsi construire $\Omega_T^\Gamma(X/A) \in (s\mathcal{C}_\Gamma)_X^T$ degré par degré : $\left(\Omega_T^\Gamma(X/A)\right)_n := \Omega_{T_n}^\Gamma(X_n/A_n)$.

Etant donné $\tilde{A} \to \tilde{X}$ un modèle cofibrant pour $A \to X$, on appelle *complexe cotangent* associé à $A \to X$ le X-module sur T en Γ-comodules

$$\mathbb{L}\Omega_T^\Gamma(X/A) := X \otimes_{\tilde{X}} \Omega_T^\Gamma(\tilde{X}/\tilde{A})\,.$$

4.2. **Définition : cohomologie relative.** Dans ce § T est une opérade simpliciale dans $\mathcal{C}_\Gamma$. Soit $A \to X$ un morphisme dans $s\mathcal{C}_\Gamma^T$. On note $B = \pi_0(X)$ et $T_{-1} = \pi_0(T)$. Alors B est une T_{-1}-algèbre dans $\mathcal{C}_\Gamma$, que l'on s'autorise à regarder comme un objet constant dans $s\mathcal{C}_\Gamma^T$ (i.e. que B est une T_n-algèbre pour tout $n \geq 0$). On se donne enfin $M \in (\mathcal{C}_\Gamma)_B^{T_{-1}}$, que l'on s'autorise à voir comme un object constant dans $(s\mathcal{C}_\Gamma)_X^T$ (autrement dit M admet une T_n-action de X_n pour tout $n \geq 0$).

On regarde désormais $A \to X$ comme un objet de la catégorie $(s\mathcal{C}_{\Gamma/B}^T)^I$ des I-diagrammes en T-algèbres B-augmentées dans $s\mathcal{C}_\Gamma$, où $I = \{0 \to 1\}$ est la catégorie avec deux objets et un morphisme non trivial (la structure de modèle est la structure terme à terme).

On définit alors la cohomologie (relative) d'André-Quillen comme suit :

$$D^q_{\Gamma,T}(X/A, M) := \mathbf{Ho}_{(s\mathcal{C}_{\Gamma/B}^T)^I}\left(A \to X, B \to B \ltimes M(q)\right),$$

où le morphisme $B \to B \ltimes M(q)$ est la section nulle et $M(q)$ est tel que son normalisé est donné par M concentré en degré q.

4.3. **Interprétation : application aux comodule étendus.** On reprend les notations du § précédent. Commençons par trouver un remplacement fibrant de $B \to B \ltimes M(q)$. dans un premier temps on choisit un remplacement fibrant $M(q)_f$ de $M(q)$ dans $(s\mathcal{C}_\Gamma)_B^{T_{-1}}$. Ensuite on a :

Lemme 4.2. *Dans $(s\mathcal{C}_{\Gamma/B}^T)^I$, on a un remplacement fibrant de $B \to B \ltimes M(q)$:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "\sim"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ B \ltimes M(q) \arrow[r, tail, "\sim"] & B \ltimes M(q)_f \end{tikzcd}$$

Démonstration. $M(q)_f$ est fibrant dans $(s\mathcal{C}_\Gamma)_B^{T_{-1}}$, donc il est fibrant dans $s\mathcal{C}_\Gamma$. On en déduit que la section nulle $B \to B \ltimes M(q)_f$ est fibrant dans $(s\mathcal{C}_\Gamma)^I$, et donc dans $(s\mathcal{C}_{\Gamma/B}^T)^I$. ☐

On choisit maintenant un modèle cofibrant $\tilde{A} \to \tilde{X}$ pour $A \to X$. Alors

$$D^q_{\Gamma,T}(X/A, M) \cong \pi_0 \mathrm{map}_{(s\mathcal{C}_\Gamma)_X^T}\left(\mathbb{L}\Omega_T^\Gamma(X/A), M(q)_f\right).$$

On en déduit aisément le résultat suivant :

Proposition 4.3. *Si $M = \Gamma \otimes_R N$ est un comodule étendu, alors il y a un isomorphisme naturel $D^*_{\Gamma,T}(X/A, M) \cong D^*_T(X/A, N)$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du fait que $(\Gamma \otimes_R M)(q) \cong \Gamma \otimes_R M(q)$ est automatiquement fibrant, et de l'isomorphisme $\Omega_T^\Gamma(\tilde{X}/\tilde{A}) \cong \Omega_T(\tilde{X}/\tilde{A})$. ☐

Références

[1] J. Adams, *Stable homotopy and generalized cohomology*, University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[2] P. Goerss et M. Hopkins, *André-Quillen (Co-)homology for simplicial algebras over simplicial operads*, Contemp. Math. **256** (2000), 41-85.

[3] P. Goerss et M. Hopkins, *Moduli problems for structured ring spectra*, preprint, 2005.

[4] M. Hovey, *Homotopy theory of comodules over a Hopf algebroid*, Contemp. Math. **346** (2004), 261-304.

[5] D. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math. **43**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

[6] C. Rezk, *Notes on the Hopkins-Miller theorem*, Contemp. Math. **220** (1998), 313-366.