Note sur la prépublication de Grishka Bogdanov "Construction of cocycle bicrossproducts by twisting"

Damien Calaque

Cette note concerne la prépublication précitée de Grishka Bogdanov, disponible à l'adresse suivante : http://arxiv.org/abs/math.QA/0211337.

En guise de remarque préliminaire je souhaite souligner le fait que l'auteur n'a pas pris la peine d'utiliser le logiciel LaTeX, pourtant utilisé par **l'ensemble** de la communauté mathématique sans exception. L'utilisation d'un logiciel peu adapté rend la lecture de cette prépublication (pourtant facile d'accès sur un plan purement mathématique) assez difficile.

J'ai rédigé cette note dans l'esprit d'un rapport d'évaluation pour une revue spécialisée.

1 Description des résultats et de l'apport scientifique de la prépublication

Le principal résultat (le théorème 2.1) de cette prépublication est la construction d'un produit bicroisé cocyclique à partir de la donnée d'une algèbre de Hopf H et d'un cocycle (ou twist) de Drinfeld χ.

La notion de produit bicroisé cocyclique a été introduite par S. Majid (voir les références [1], [2] et [10, chapitre 6] de la prépublication). En particulier, le théorème 6.3.9 de l'ouvrage *Foundations of quantum groups* (Cambridge University Press, 1995) donne un critère (sous la forme d'une série d'identités à vérifier) pour la construction d'une **bigèbre**, appeleée *produit bicroisé cocyclique*, à partir de la donnée de deux algèbres de Hopf qui sont respectivement une algèbre module cocyclique à droite et une cogèbre module cocyclique à gauche l'une par rapport à l'autre.
L'intérêt algébrique du théorème 2.1 n'est pas flagrant à la lecture de la prépublication. En effet, il s'agit d'une généralisation d'un **exemple** du livre de Majid (l'exemple 6.2.8, qui traite le cas où le twist de Drinfeld est trivial). Ce peu d'intérêt s'évapore d'ailleurs à la lecture de la dernière assertion du théorème qui exhibe un isomorphisme de bigèbres entre le produit bicroisé cocyclique et $H^{\mathrm{op}} \otimes H_\chi$ (cette assertion est une généralisation de la proposition 6.2.9 qui suit l'exemple dans le livre de Majid).

La section 3 contient une variation triviale sur l'exemple 6.2.8 du livre de Majid.

2 Commentaires sur la section 2

Un manque certain de précision et de rigueur caractérise la rédaction de cette section.

Tout d'abord, ψ et χ sont des 2-cocycles pour différents complexes. A ce titre il serait bon que l'auteur rappelle (même brièvement) les définitions des notions qu'il utilise.

Ensuite les notations sont pour le moins malheureuses et changeantes. Par exemple :
- noter χ le 2-cocycle (ou twist) de Drinfeld n'est pas très judicieux sachant qu'il est sans cesse fait référence au théorème 6.3.9 du livre de Majid, dans lequel χ joue un tout autre rôle.
- on trouve parfois $\chi = \chi^{(1)} \otimes \chi^{(2)}$, parfois $\chi = \chi_{(1)} \otimes \chi_{(2)}$; et le cocycle inverse est alternativement noté $\chi_{\{-1\}}$ et χ^{-1}.

Enfin, et c'est là le plus important, les éléments ψ et β ne sont pas définis explicitement dans le papier, alors qu'il s'agit pourtant de l'ingrédient essentiel de la constuction. De plus la référence donnée (le livre de Majid) ne contient pas la définition adéquate de ψ (en revanche on peut la trouver dans la thèse de l'auteur).

J'ajoute qu'outre le fait que ψ et β ne sont pas explicités (en fait il n'est même pas écrit que de tels ψ et β existent), l'auteur affirme l'existence d'un "*cocycle bicrossproduct*" sans avoir rappelé au préalable la définition de cet objet (en clair, il aurait fallu rappeler le théorème 6.3.9 de Majid).

Enfin, formulé tel qu'il l'est le théorème 2.1 est **faux**. Le produit bicroisé cocyclique construit est une bigèbre, pas nécessairement une algèbre de Hopf !!! (voir, encore une fois, le théorème 6.3.9 du livre de Majid)
Explication : Si l'antipode de H n'est pas bijective, alors H^{op} **n'est pas** une algèbre de Hopf (voir l'exercice 1.3.3 du livre de Majid).

Suggestion

Voici comment il eu fallu rédiger cette section (je tiens à préciser au passage que j'ai déjà fait part de cette suggestion à l'auteur à l'occasion d'une discussion sur un forum électronique ; c'était il y a maintenant plusieurs mois et aucune modification n'a été apportée à la prépublication).

1. commencer par rappeler l'énoncé précis du théorème 6.3.9 du livre de Majid (après avoir au préalable rappelé les définitions de base et fixé les notations une bonne fois pour toute).
2. énoncer la proposition suivante :
   Proposition. *Soit H une algèbre de Hopf et J un twist de Drinfeld. Alors il existe ψ et β de telle sorte que $(H^{\mathrm{op}},\psi,\beta)$ soit une algèbre comodule cocyclique.*
   Expliciter ψ et β dans la démonstration (ou dans l'énoncé de la proposition).
   Remarque. Je préfère noter J le twist de Drinfeld car χ est réservé à un autre objet dans le livre de Majid auquel il est constamment fait référence.
3. rappeler que H_J est une algèbre module pour H^{op} dont la structure d'algèbre est celle de H.
4. énoncer le résultat principal (de telle sorte qu'il soit juste).
   Structure de la démonstration. Vérifier que les relations du théorème 6.3.9 du livre de Majid sont vérifiées avec ψ et β donnés par la proposition précédente, χ le cocycle trivial et α donné par l'action définie au point 3.

3 Commentaires sur la section 3

Le résultat présenté dans cette section présente un intérêt encore plus faible que celui de la section précédente. En effet, il n'y a là qu'une variante triviale de l'exemple 6.2.8 et de la proposition 6.2.9 du livre de Majid.

Par ailleurs il n'apparait pas clairement dans la démonstration de la proposition 3.1 où l'hypothèse de bijectivité de l'antipode est essentielle. Est-elle utile pour la construction du produit bicroisé cocyclique ou uniquement pour l'isomorphisme avec $H \otimes H$?

4 Commentaires sur la section 4

Dire de cette section conclusive qu'elle est conjecturale est un euphémisme.

Par ailleurs lorsqu'un auteur énonce des conjectures on attend sinon des énoncés rigoureux, au moins une formulation précise. Voici deux exemples de phrases que l'on trouve dans cette section, l'imprécision des affirmations y cotoye un anglais très approximatif :

- "*In general, one expects that a cocycle bicrossproduct* $H \bowtie A$ *with* A *finite dimensional should semi-dualise to a generalise double crossproduct* $A^* \bowtie H$ *as a dual quasi-Hopf algebra.* "
  L'auteur pense-t-il que la duale d'une algèbre de Hopf peut ne pas être une algèbre de Hopf mais seulement une algèbre quasi-Hopf ? Ca n'est évidemment pas le cas mais alors pourquoi ajouter ce "as a dual quasi-Hopf algebra" à la fin de la phrase ?
- "*Details will be developped elsewhere, but we note that a general result linking Hopf algebras extensions and quasi-Hopf algebras via monoidal categories recently appeared in [11] which could provide an interesting context for these constructions.* "
  Au-delà de la structure grammaticale pour le moins étrange de cette phrase, l'affimation reste trop vague pour une publication mathématique (même s'il s'agit d'une conclusion en forme de questions ouvertes).
- "*This is along the same lines as without cocycles in [1] and was conjectured already in [3].* "
  Cette phrase est à cheval sur les pages 7 et 8 de la prépublication et il semble qu'il manque quelquechose entre "*... cocycles*" et "*in [1] ...*".

5 Conclusions

Les résultats présentés dans cette prépublication ne présentent que trop peu d'intérêt et de nouveauté pour justifier à eux seuls de constituer une publication mathématique indépendante.

Le théorème principal de cette prépublication est faux (dans sa formulation actuelle).

La qualité rédactionnelle n'est pas à la hauteur des standards exigés par la plupart des revues mathématiques. J'ajoute à titre de remarque personelle que l'auteur d'une publication scientifique doit garder à l'esprit que celle-ci est censée être lue, ce qui implique des exigences de clarté et de précision par respect pour le lecteur.