Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse III Automne 2011

Groupe B
Enseignant : M.Caldero.
e-mail : caldero@math.univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 8H15-11H30
Salle : Salle Ampère(1er ss) bâtiment lippmann

- TD 11 –

Feuille d'exercice V.

– QUELQUES APPLICATIONS DE LA RECUCTIONS DES ENDOMORPHISMES –

Exercice de méthode(hors feuille).

1ère étape :

X' = AX X vecteur colonne X∈ $M_{m,1}$

A matrice carrée M∈ M_n

Système d'équation différentiel linéaire à coefficient constant du 1er ordre.

A ne dépend pas de t (coefficient constant)

X est une fonction de t.

L'ensemble des solutions

X(t) = exp(tA)X_0 où X_0=X(0)

ou X(t) = exp((t-t_0)A)X_{t_0} où X_{t_0}=X(t_0)

On vérifie

X(t) = $e^{tA}X_0$ = IdX_0+ tAX_0 + $\frac{t^2A^2}{2!}X_0$+…+ $t^n\frac{A^n}{n!}X_0 + \cdots$

On veut dériver (on admet que l'on peut dériver sous la forme infinie)

$A' = 0$ car A constant

$(At)' = A\begin{pmatrix} 2t & t \\ 3t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$(A^2)' = 0$ A² est constant.

$\left(\frac{t^2A^2}{2!}\right)' = A^2\frac{2t}{2} = A^2t$

!! Si A non constant A'≠0

$(A^2)' =$ (AA')=A'A+AA' mais A et A' ne commutent pas.

$(A^3)' = A'A^2 + AA'A + A^2A' \neq 3A^2A'$

$\frac{1}{u} = \frac{-u'}{u^2} \rightsquigarrow (A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$

On dérive X'(t) = u + AX_0 + $tA^2X_0 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^nX_0$+….

X'(t) = A($X_0 + tAX_0 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}X_0$+….)

$\boxed{X'(t) = AX(t) \;\; et\ de\ plus\ X(0) = X_0}$

Conclusion : X'=AX ⇔ $X = e^{tA}X_0$

Il faut savoir calculer e^{tA}.

2ème étape :

X' = AX+V V ∈ $M_{m,n}$ et dépend de t.

Dans $\mathbb{R}$ $x' = ax + v$

Commentaire [E1]: constante

Commentaire [E2]: en fonction de t

$x' = ax \quad \Longrightarrow \quad x = e^{tA}x_0$

On cherche la relation par la méthode de la variation de la constante.

$$E.D.L.1er\ ordre\ avec\ second\ membre$$

$$E.D.L.1er\ ordre\ sans\ second\ membre$$

On cherche la solution particulière par la méthode de la variation de la constante.

$$x = e^{tA}x_0$$

$$x' = ax + v \implies (e^{ta}x_0)' = ae^{ta}x + v$$

$$ae^{ta}x_0 + e^{ta}x_0' = \; ae^{ta}x_0 + v$$

$$x_0' = e^{-ta}v$$

$$x_0 = \int_0^t e^{-sa}v ds$$

Bilan $\boldsymbol{x = x_p + x_G =} e^{tA}\int_0^t e^{-sa}vds + x^{t_0}x_0$

Commentaire [E3]: x_p

Commentaire [E4]: x_G

$$\boldsymbol{ou\ x = e^{tA}\int_0^t e^{-sa}vds + e^{(t-t_0)a}\,x_{t_0}}$$

adaptation au cas matriciel.

$$\boldsymbol{x = x^p + x_v}$$

$$\boldsymbol{x_G = e^{tA}x_0}$$

$$\boldsymbol{x_p = e^{tA}\int_0^t e^{-sA}v\,ds \quad !!\, V\ dépend\ de\ s}$$

Exercice 1*. Résoudre le système différentiel

$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + \begin{bmatrix}1\\t\\1\end{bmatrix}$$

Pour les matrices A suivantes, étudiées dans les planches précédentes.

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&1&3\\-2&2&2\\-2&1&4\end{bmatrix}$$

D'après ce qui précède :

$$X_G = e^{tA}X_0$$

$$X_p = e^{tA}\int_0^t e^{-sA}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}ds$$

V = $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$= s$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = sV_1 + V_0$.

On peut calculer $\int_0^t e^{-sA}V_0 ds$ et $\int_0^t se^{-sA}V_1 ds$

<u>diagonalisation :</u> $\int_0^t e^{-sA}V_0 ds = -a^{-1}[e^{-sa}V_0]_0^t \; = \; -a^{-1}e^{-ta}V_0 + a^{-1}V_0$

$$(*)\int_0^t e^{-sA}V_0 ds = -A^{-1}e^{-tA}V_0 + A^{-1}V_0$$

Rq : e^A commute avec A $A(e^{-tA}) = (e^{-tA})$A idem avecA^{-1}.

Vérification : On dérive (OK)
$e^{-tA}V_0 = -A^{-1} * Ae^{-tA}V_0 + 0 = e^{-tA}V_0$ (OK)

Digression : $\int_0^t se^{-sA}V_1 ds$

Intégrer par partie : $[s * \; -a^{-1}e^{-sa}V_1] + a^{-1}\int_0^t e^{-sa}V_1 ds$
$-ta^{-1}: e^{-ta}V_1 - a^{-2}(e^{-ta} - 1)V_1$

$(**)$ $-tA^{-1}e^{-tA}V_1 - A^{-2}(e^{-tA} - Id)V_1 = \int_0^t se^{-st}V_1\, ds$
Il faut vérifier $(**)$ en t = 0 on a bien
$0 - A^{-2}(e^{-0A} - Id)V_1 = 0$ (OK)
On dérive

$$A^{-1}e^{tA}V_1 - A^{-1}t * (-A)e^{-tA}V_1 - A^{-2}(-Ae^{-tA})V_1$$
$$te^{-tA}V_1 \qquad (OK)$$

Principe de Vérification : On veut montrer que $F(t) = \int_0^t f(s)dt$
Il suffit de montrer que : F(0)=0 et $F'(t) = f(t)$

Solution
$X = X_p + X_G$
$X = \; -A^{-1}e^{-tA}V_0 + A^{-1} - tA^{-1}e^{-tA}V_1 - A^{-2}(Id - e^{-tA})V_1\, e^{tA}X_0$

Reste à calculer A^{-1} et e^{tA}
On part d'un polynôme annulateur de A (si possible minimal, mais on peut prendre le polynôme caractéristique)

exemple :

1.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + Id$$
$\mu_A = (X-1)(X-4)$
$A^2 - 5A + 4Id$=0
$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}(5Id - A)$

$A^{-2} = \frac{1}{16}(5Id - A)^2$
$A^{-2} = \frac{1}{16}(25Id - 10A + A^2)$
$A^{-2} = \frac{1}{16}(25Id - 10A + 5A - 4Id)$
$A^{-2} = \frac{1}{16}(21Id - 5A)$

$(*)\ \frac{1}{(X-1)(X-4)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-4}$

$(*)$ x (X-1) eval(1) $\Longrightarrow a = -\frac{1}{3}$

$(*)$ x (X-4) eval(4) $\Longrightarrow b = \frac{1}{3}$

$1 = (X-1)(X-4) - \frac{1}{3}(X-4) + \frac{1}{3}(X-1)$

$\pi_1 = -\frac{1}{3}(A - 4Id)$

$\pi_4 = \frac{1}{3}(A - Id)$

Id = $\pi_1 + \pi_4$

$e^{tA} = e^{t}\pi_1 + e^{4t}\pi_4$

$e^{tA} = \frac{e^{4t}}{3}(\mathrm{A} - \mathrm{Id}) - \frac{e^{t}}{3}(\mathrm{A} - 4\mathrm{Id})$

On aurait pu faire :

$A^{-1} = A^{-1}\pi_1 + A^{-1}\pi_4$

$A^{-1} = \frac{1}{1}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_4$

$A^{-2} = \pi_1 + \frac{1}{16}\pi_4$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\mu_A = (X-1)(X-2)^2$

calculer e^{tA}, A^{-1}, A^{-2}

$(*)\ \frac{1}{\mu_A} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{(X-2)^2}$

$(*)$ x (X-1) eval(1) $\Longrightarrow a = 1$

$(*)$ x (X-2)² eval(2) $\Longrightarrow 2b + c = 1$

$(*)$ $* X\ eval(\infty) \Longrightarrow a + b = 0 \Longrightarrow b = -1 \Longrightarrow c = 1 + 2 = 3$

$1 = (X-1)(X-2)^2 + (X-2)^2 + 3(X-1) - X(X-1)$

$1 = (X-1)(X-2)^2 + (X-2)^2 + (3-X)(X-1)$

$e^{tA} = e^{tA}\pi_1 + e^{tA}\pi_2$

$e^{tA} = e^{t}\pi_1 + e^{2t}e^{N}\pi_2$

$e^{tA} = e^{t}\pi_1 + e^{2t}(Id + N)\pi_2$

$e^{tA} = e^{t}(A - 2Id)^2 + e^{2t}(A - Id)(-A + 3Id)(A - Id)$

$\mu_A = (X-1)(X-2)^2$

$\mu_A = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$

$A^3 - 5A^2 + 8A - 4Id = 0$

$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8Id)$

Commentaire [E5]: $\pi_1 = (A - 2Id)^2$

Commentaire [E6]: $\pi_4 = (-A + 3Id)(A - Id)$

Autre Méthode :

$Id = \pi_1 + \pi_2 \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = A^{-1}\pi_1 + A^{-1}\pi_2$

$A^{-1} = \frac{1}{1}\pi_1 + \cdots$

$A^{-1}\pi_2 = (2Id + N)^{-1}\pi_2 = \frac{1}{2}\left(Id + \frac{N}{2}\right)^{-1}\pi_2$

$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + \cdots$

Exercice 4*. On considère la matrice réelle.

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

4. Déterminer le polynôme minimal de A

$\mu_A = X(X+9)^2$

5. Exprimer, en fonction de la matrice A, les matrices des projections π_0 et π_{-9} de $\mathbb{R}^3$ sur les sous-espaces caractéristiques Ker A et Ker(A+9I_3)²

$(*)\ \frac{1}{X(X+9)^2} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{(X+9)^2}$

$(*)$ x X eval(0) $\Longrightarrow a = \frac{1}{81}$

$(*)$ x (X+9)² eval(-9) $\quad \Longrightarrow -9b + c = -\frac{1}{9}$

$(*) * X\ eval(\infty) \quad \Longrightarrow a + b = 0 \ \Longrightarrow b = -\frac{1}{81} \Longrightarrow c = -\frac{2}{9}$

$$\frac{1}{81}(X+9)^2 - \frac{1}{81}X(X+18) = 1$$

$$\frac{1}{81}(A+9Id)^2 - \frac{1}{81}A(A+18Id) = Id$$

$\pi_0 = \frac{1}{81}(A+9Id)^2 \qquad\qquad \pi_{-9} = -\frac{1}{81}(A+18Id)A$

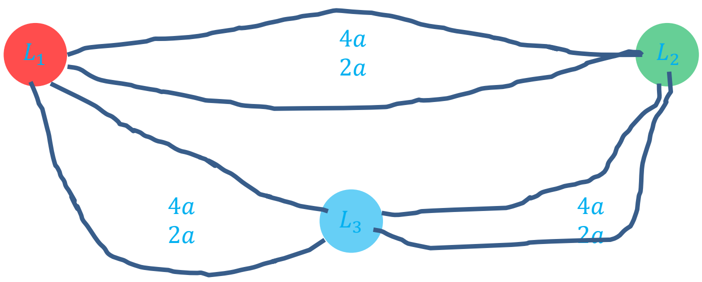
le calcul donne $\pi_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\pi_{-9} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Exprimer en fonction de A les matrices de A et des matrices π_0 et π_{-9} , la matrice e^{tA}, où t est un réel quelconque.

$e^{tA} = e^{tA}\pi_0 + e^{tA}\pi_{-9}$

$e^{tA} = \pi_0 + e^{-9t}(\mathrm{Id} + \mathrm{tN})\pi_{-9}$

$e^{tA} = \pi_0 + e^{-9t}(Id + t(A+9Id))\pi_{-9}$



$V_1, V_2\ et\ V_3$ valeurs de L_1, L_2 et L_3.

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = -7V_1 + 4V_2 + 3V_3 \\ \frac{dV_2}{dt} = 2V_1 - 5V_2 + 3V_3 \\ \frac{dV_3}{dt} = 5V_1 + V_2 - 6V_3 \end{cases} \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre par λ=0

$$\frac{dV}{dt} = AV$$

$$\boxed{V = e^{tA}V(0)}$$