Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse III Automne 2011

Groupe B
Enseignant : M.Caldero.
e-mail : caldero@math.univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 8H15-11H30
Salle : Salle Ampère(1er ss) bâtiment lippmann

TD 6

- Feuille d'exercice III.

- POLYNOME MINIMAL – THEOREME DE CAYLEY-HAMILTON –

Exercice 1.* Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes, où a≠b :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

Stratégie :

1. Trouver les valeurs propres de la matrice λ_i.
2. Trouver Polynômes annulateurs de la forme $\prod (X-\lambda_i)^{n_i}$ avec n_i minimal.

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ v.p. a

$\mu = (X-a)^k$.

Soit P= X-a

P(A) = A-aId=A-A=0

Donc pour $\mu_{A_1} = X - a$

Autre Méthode : A est diagonale donc diagonalisable donc μ_A est scindé simplement. $\Longrightarrow$ $\mu_{A_1} = X - a$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$Sp_{A_2} = \{a\}$ car A triangulaire supérieur.

$\mu = (X-a)^k \quad 1 \leq k \leq 3$

$$(A - a\,\mathrm{Id})^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

$$Si\ k = 1, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

$$Si\ k = 2, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

$$Si\ k = 3, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^k \quad \mu_{A_2} = (X-a)^3$$

$A_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mu_{A_3} = (X-a)^2$

$A_5 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mu_{A_5} = (X-a)(X-b)$

$A_6 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mu_{A_6} = (X-a)^4$

$A_7 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mu_{A_7} = (X-a)^3$

$A_8 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mu_{A_8} = (X-a)^2$

$A_9 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mu_{A_9} = (X-a)^2(X-b)^2$

$A_{10} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mu_{A_{10}} = (X-a)^2(X-b)$

$A_4 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \mu_{A_4} = (X-a)^2(X-b)$

On résout le problème pour $A_4 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ sp A = {a,b}

$\mu_A \ = \ (X-a)^{k_a}(X-b)^{k_b} \qquad avec \ \substack{1 \le k_a \le 2 \\ 1 \le k_b \le 1}$

P=(X-a)(X-b)

P(A) = (A- a Id) (A- b Id) = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-b & 1 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a≠b donc non nul

k_a ≠ 1 donc k_a=2

$\mu_A = (X-a)^2(X-b)$

Exercice 2 : Soient E un $\mathbb{K}-espace$ vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent de E.

1. Sans utiliser le polynôme minimal, montrer que le polynôme caractéristique de u est $P_u = (-1)^n X^n$. Comment procéder avec le polynôme minimal. ?

   U nilpotent

   Montrer que $\chi_u = (-1)^n X^n$ comme sp u = {racine de χ_u}

   Il suffit de montrer que λ v.p. de u ⟹ λ = 0.

   Soit λ v.p. X vect propre X≠0 u(λ)=λ X

   u²(X)=u(u(X))=u(λX)=λu(X)=λ²X.

   $u^k(X) = \lambda^k X$ par récurrence sur k.

   comme u est nilpotent $u^k(X)$ s'annule pour un k.

   λ^kX = 0 or X≠0 ⟹ λ^k=0 ⟹ λ=0

   $\chi_u = (-1)^n X^n$

   Et en utilisant μ_u

   On a un polynôme annulateur : X^k, k = indice de nilpotence

   $\mu_u | X^k \Longrightarrow \mu_u = X^{k'}$ avec k'≤ k.

   Par minimalité de k. k' = k.

   $On\ a\ \mu_u$ | χ^k avec les mêmes racines donc $\chi_u = (-1)^n X^n$

2. Par récurrence, montrer qu'il existe une base B de E telle que la matrice u dans la base B soit triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

   ∃ une base de E t.q. $Mat_B(u)$ triangulaire.

   Remarque : Si Mat = $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ = N alors $N^n = 0$

   Reciproquement, on veut montrer que si u est nilpotent, alors u peut s'écrire comme cela.

   Dans un premier temps, comme 0 est valeur propre de u (d'après 1.) On a un vecteur propre associé. Soit e_1 ce vecteur propre u(e_1)=0.

   M=$\begin{pmatrix} \boxed{0} & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ M est nilpotente. Montrer que A est nilpotente.

   Attention : M n'est pas diagonalisable par blocs, M est triangulaire par blocs !

   $\begin{pmatrix} \square & \square \\ 0 & \square \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \longleftarrow & rectangle \\ \longleftarrow & carré \end{matrix}$ M = $\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & A \end{pmatrix}$

   $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & XA \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$

   Par récurrence : $M^k = \begin{pmatrix} 0 & X_k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$

   H_0 OK.

   $H^k\ vraie.\ \ M^k = \begin{pmatrix} 0 & X_k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$

   $M^{k+1} = M^k M = \begin{pmatrix} 0 & X_k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_{k+1} \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix}$

   (En fait $X_k = X * A^{k-1}$) Donc $H^{k+1}\ vraie.$

3. Inversement, montrer que tout endomorphisme de E dont la matrice dans une base B de E est triangulaire avec des 0 sur la diagonale est nilpotente d'indice de nilpotence p≤n.

Récurrence portant sur la taille de la matrice.

$M^k = 0$ pour k assez grand donc pour ce k.

$\begin{pmatrix} 0 & X_k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = 0 \implies A^k = 0 \to A \text{ est nilpotente.}$

Donc par récurrence, A est semblable à une matrice triangulaire T.

M =$\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et A= P.T.P^{-1} avec T=$\begin{pmatrix} & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

On va construire une matrice Q t.q. M=$Q\tilde{T}Q^{-1}$ et $\tilde{T}$ triangulaire.

Q =$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & & \cdot \\ \vdots & & P & \\ 0 & \cdot & & \cdot \end{pmatrix}$ $\tilde{T} = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

Calculer Q^{-1} puis $Q^{-1}MQ$ par blocs.

$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & & \cdot \\ \vdots & & P^{-1} & \\ 0 & \cdot & & \cdot \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ si A et B inversibles.

$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & P^{-1}A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 & XP \\ 0 & P^{-1}AP \end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix} 0 & XP \\ 0 & T \end{pmatrix}$=$\tilde{T}$

Exercice 3 : Soient $\mathbb{R}_n[X]$ un $\mathbb{R} - espace\ vectoriel$ formé des polynômes de degré inférieur à ou égal à n. Soit u : $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui a un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par X²-1.

1. Montrer que u est linéaire.

   u : $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$

   $P \to \ R_p$ reste de la division de P par X²-1

   <u>*Montrer que u est linéaire.*</u>

   $P \to R_p$

   $Q \to R_q$

   $\lambda P + \mu Q \to \lambda R_p + \mu R_q$?

   P=A(X²-1) + R_p

   Q=B(X²-1) + R_q

   division euclidienne $d°R_p < 2$ $d°R_q < 2$

   Donc $\lambda P + \mu Q$ = (λA + µB)(X²-1)+λR_p+µR_q

   d°(λR_p+µR_q) <2 Donc on a bien une division euclidienne de λP+µQ par (X²-1) donc le reste est bien λR_p+µR_q.

   <u>Unicité du reste dans la division euclidienne</u>

   Donc u est linéaire.

Commentaire [E1]: = $R_{\lambda P+\mu Q}$

2. Calculer u² et en déduire que u est diagonalisable.

$Mat_B(u)$ B base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. B(1,X,X², … , X^n)

u(1) = 1

u(X)= X

u(X²)=1

u(X^3)=X

…

u(X^n)=$\begin{cases} 1 & si\ n = 2p \quad p \in \mathbb{N} \\ X & si\ n = 2p+1 \quad p \in \mathbb{N} \end{cases}$

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 01 & 01 & 0 & \cdots & \\ 0 & 10 & 10 & 1 & & \\ & & 0 & & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

u² = u car lorsqu'on effectue la division 2 fois on trouve le même résultat u est diagonalisable car il est annulé par X²-X = X(X-1) scindé simple.

R.q. X²-1 = (X-1)(X+1) scindé simple sauf en caractéristique 2 (ex :$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

Sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

S = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sp ={1} non diagonale

S² =$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

S annulée par X²-1 mais pas diagonale.