**Université Claude Bernard Lyon 1**
**43, boulevard du 11 novembre 1918**
**69622 Villeurbanne cedex, France**

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse III Automne 2011

Groupe B
Enseignant : M.Caldero.
e-mail : caldero@math.univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 8H15-11H30
Salle : Salle Ampère(1er ss) bâtiment lippmann

**TD 7**

- Feuille d'exercice III.

**- POLYNOME MINIMAL – THEOREME DE CAYLEY-HAMILTON –**

A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ sp A = {a} A est diagonalizable ⇔ $\mu_n$ *est scindé simple*

⇔ $\mu_A = (X - a)^1$
$\Rightarrow A - aId = 0$
$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
$\Rightarrow b, c, d = 0$

Sp A = {1,d}
$\chi_A = (X-1)^2(X-d)$

$1^{er}$ cas: si d=1 même cas que précédemment
A diagonalisable ⇔ a=b=c=0
$2^{ème}$ cas : si d≠1.
A est diagonalisable ⇔ $\mu_A$ est scindé simple ⇔ $\mu_A$ =(X-1)(X-d)

(A – Id)(A – dId) = 0
$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-d & a & b \\ 0 & 1-d & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a-da & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
$\Rightarrow a = 0;$ c,d quelconque.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

**Exercice 5.*** Soit **J** une matrice complexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \textit{Matrices circulaires.}$$

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_n \\ e_n & e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} \end{matrix}$$

1. Calculer $J^p$ pour tout entier $p \in \{1, \dots, n\}$.
   Calculer $J^p$. Il est plus facile de calculer $J^p$ sur une base.

   $e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad \dots \quad e_{p+1} \quad \cdots \quad e_n.$
   $e_{n-p+1} \quad e_{n-p+2} \quad \dots \quad e_1 \quad \cdots \quad e_{n-p}$

$$\begin{array}{c} n-p \\ n-p+1 \end{array}\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0 & & \\ \vdots & \cdot & \cdot \\ \vdots & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

2. En déduire que J est diagonalisable.
   On va montrer que J est annulé par un polynôme scindé simple.
   $J^n$ envoie la base $(e_1 \dots e_n)$ sur elle-même.
   Donc $J^n$ = Id.

   J est annulé par $X^n - 1$ ses racines sont les $(e^{\frac{2\pi k}{n}})$ racines n-ième de 1.
   $X^n - 1$ est scindé simple $\Longrightarrow$ J est diagonalisable (les valeurs propres de J sont parmi les racines de 1).

3. Monter que $1_n,\ J, \dots, J^{n-1}$ sont linéairement indépendants.
$$\lambda_0 1_n + \lambda_1 J + \lambda_2 J^2 + \cdots + \lambda_{n-1} J^{n-1} = 0$$
   Matriciellement :
$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1} \\ \lambda_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & & & \ddots & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & & \lambda_0 \end{pmatrix} = 0$$
   Donc $\lambda_i = 0 \ \ \forall i$
   Autre méthode appliquer cette égalité à $e_n$.
$$(\lambda_0 1_n + \lambda_1 J + \lambda_2 J^2 + \cdots + \lambda_{n-1} J^{n-1}) e_n = 0. e_n$$
$$\lambda_0 e_1 + \lambda_1 e_n + \lambda_2 e_{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1} e_2 = 0$$
$$\Longrightarrow \lambda_i = 0$$
4. Déterminer le polynôme minimal de J.
   $X^n - 1$ est polynôme annulateur.
   Supposons P, d°P≤n-1, P≠0 t.q. P(J)=0 **Commentaire [E1]:** =p
$$P = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \ \Longrightarrow J^p + + a_{p-1} J^{p-1} + \cdots + a_1 J + a_0 = 0$$
   $p \leq n - 1, Impossible\ car\ 1_n, J, \dots\ , J^p, n\ libre$
5. Calculer les valeurs propres de J.
   Ce sont les racines de son polynôme minimal donc ce sont les racines n-ièmes de 1.
   Comme il y en a n, elles sont toutes de multiplicité algébrique 1.
   Soit $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$
   On veut $J v_k = w_k v_k$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = w_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

6. Diagonaliser J en exhibant la matrice de passage.

$w = w_1$

$w = w^k$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} V_0 & V_1 & V_2 & \cdots & V_j & V_{n-1} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & & w^j & w^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{(n-1)} & w^{2(n-1)} & & w^{j(n-1)} & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \end{array}$$

C'est une matrice de Vandermonde.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

det V = $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w^{n-1} \end{pmatrix} \qquad J = PDP^{-1}$$

2. Soit **A** la matrice circulante complexe suivante :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$$

1. Exprimer A comme un polynôme de la matrice J.

$$A = a_1 1_n + a_2 J + \cdots + a_n J^{n-1}$$

2. Montrer que pour tout polynôme Q, Q(J) est diagonalisable et que

$$Sp\big(Q(J)\big) = \{Q(\lambda) | \lambda \in Sp(J)\}.$$

Sp(Q(J))= $\{Q(\lambda) | \lambda \in Sp(J)\}$

Attention c'est vrai pour tout matrice (complexe)

Q(J)v=λv ? $\quad J = PQP^{-1} \quad \forall k \quad J^k = PD^kP^{-1}$

$Q(J) = PQ(D)P^{-1}$ car Q(J) est combinaison linéaire de puissances de J

$Q(PDP^{-1}) = PQ(D)P^{-1}$

$$Q(D) = \begin{pmatrix} Q(1) & & & 0 \\ & Q(w) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Q(w^{n-1}) \end{pmatrix}$$

donc Sp(Q(J))={Q(1),Q(w), … , Q($w^{n-1}$)}

3. En déduire que A est diagonalisable et calculer les valeurs propres de A.

Comme A = Q(J) et J diagonalisable A est diagonalisable d'après la question précédente.

$$A = P\begin{pmatrix} Q(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(w^{n-1}) \end{pmatrix}P^{-1}$$ avec la même matrice de passage P.

4. Calculer le déterminant de A.

   det A = Q(1) … Q($w^{n-1}$)

**Exercice 7.*** Soit **u** un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{K} - espace\ vectoriel$ de E. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}\ ou\ \mathbb{R}$

1. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de u.

   0 n'est pas valeur propre de u.

   Méthode 1 : u inversible ⟹ u injective ⟹ 0 n'est pas valeur propre

   (déf : λ valeur propre ⇔ u - λ$Id$ n'est pas injectif.

   Méthode 2 : u inversible ⟹ det u ≠ 0 ⟹ $\lambda_1 \ldots \lambda_n \neq 0 \Longrightarrow \lambda_i \neq 0\ \forall\ i$

   Commentaire [E2]: Produit de valeur propre

2. En déduire que $u^{-1}$ est un polynôme en u. [On pourra utiliser le fait que le polynôme X ne divise pas le polynôme caractéristique de u.]

   $\chi_u$ = poly caractéristique de u.

   $\chi_u = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

   Rappel :

   $X_u(X) =$ det(XId – u)

   $a_0 = \chi_u(0) = det(0Id - u) = \det(-u) = (-1)^n \det(u) \neq 0$

   On sait que $\boxed{a_0 \neq 0}$

   $\chi_u(u) = 0$ par Cayley-Hamilton

   $u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_1 u + a_0 1_n = 0$

   $u(u^{n-1} + a_{n-1}u^{n-2} + \cdots + a_1 1_n) = -a_0 1_n$

   $\Longrightarrow u^{-1} = \frac{1}{a_0}(u^{n-1} + a_{n-1}u^{n-2} + \cdots + a_1 1_n)$

   $u^{-1}\ est\ un\ polynôme\ en\ u.$

**Exercice 8.*** Soit **E** un $\mathbb{K} - espace\ vectoriel$ de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que si P est premier avec le polynôme minimal $m_u$ de u avec l'endomorphisme P(u) est inversible.

   $\wedge\ pgcd\ \vee\ ppcm$

   P ∧ $m_u$ = 1 ⟹ P(u) est inversible

   P ∧ $m_u$ = 1 ⟹ UP + v$m_u$= 1     Identité de Bézout.

   On applique cette identité polynomiale à u.

   (UP + v$m_u$)(u)= 1(u) ⟹ (U.P)(u) + (v.$m_u$)(u)= Id

   U(u).P(u) + V(u).mu(u) = Id

   Commentaire [E3]: Multiplication de polynôme

   Commentaire [E4]: Composée d'endomorphisme.

   $X^n(u) = u^n X(u) = u$

   <u>1(u) = Id</u>

   U(u)P(u)=Id

   P(u) inversible.

2. Inversement, montrer que si P(u) est inversible, alors les polynômes P et $m_u$ sont premiers entre eux.
Réciproque : P(u) inversible $\Longrightarrow AP(u) = Id$
A est l'inverse de P(u). D'après l'exo précédent, A est un polynôme en P(u).
A = Q(P(u))= R(u)
R(u)P(u)=Id $\Longrightarrow$ R(u)P(u) + $m_u(u)$ = Id $\Longrightarrow$ $(RP + m_u)(u)$ = 1(u) n'aboutit pas.
Si P(u) est inversible alors $P_1 m_u = 1$
Contraposée : $P_1 m_u = D \neq 1$ alors P(u) n'est pas inversible. D divise P, D divise $m_u$.
AD = P
BD = $m_u$
$\Longrightarrow B(u)D(u) = m_u(u) = 0$
d°B + d°D = $d°m_u$
Supposons P(u) inversible alors:
Alors CP(u)=Id $\Longrightarrow$ CA(u)D(u)Id $\Longrightarrow$ $D(u)$ *est inversible*
Donc B(u)D(u) = 0 $\Longrightarrow$ $B(u) = 0$ (car D(u) est inversible)
Or $d°B < d°I_m$
Impossible car $m_u$ et minimal.

**Exercice 11.** Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $X^3 = X$.
Résoudre l'équation $A^3 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Bonne approche du problème
P = $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de A.
$X^3 - X = X(X+1)(X-1)$ est scindé simple
A est diagonalisable et sp(A) $\subset \{-1,0,1\}$
(car P(A) = 0 $\Longrightarrow$ $\mu_A | P \Longrightarrow sp(A) \subset \{Racines\ de\ P\}$)

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ 0 & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}_0$$

avec $m_{-1} + m_0 + m_1$ = n $\quad 0 \leq m_i$
*Réciproquement* si A =$PDP^{-1}$.
alors $A^3$=P$D^3P^{-1}$ = $PDP^{-1} = A$.

$$S = \{A = PD_{(m_1)}P^{-1}, D_{(m_1)} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} & \\ & & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$$

**Commentaire [E5]:** $m_{-1}$
**Commentaire [E6]:** $m_0$
**Commentaire [E7]:** $m_1$

Rq: $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ sont semblables. Elles sont diagonalisables (car diagonal) et ont le même spectre {-1,1}.

Cherchons P tq $P^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Réponse $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ représentant le meme endomorphisme où $(e_1, e_2)$ a été changé en $(e_2, e_1)$ $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ matrice de permutation.

**Exercice 13.*** Soit **E** un $\mathbb{K}-espace\ vectoriel$ de dimension n et P le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par :

$$P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$$

La matrice compagnon du polynôme P est la matrice : A = $\begin{bmatrix}0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}\end{bmatrix}$

On note u l'endormorphisme de E représenté par la matrice A dans la base B :=$(e_1, \dots, e_n)$ de E fixée.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $p_u = (-1)^{np}$.

   $\chi_u = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \cdots - a_1X - a_0 = P$

   Preuve : faite en cours.

   On développe | $1^{\text{ère}}$ ligne → récurrence

   On développe | $1^{\text{ère}}$ colonne → récurrence

   On développe | dernière colonne → ça marche sans récurrence.

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}-X & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & -X\\ & & 1\end{matrix}} & 0\\ 0 & \boxed{\begin{matrix}-X & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & -X\\ & & 1\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

2. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que le polynôme P est annulateur de u.

   On veut montrer que P(u) = 0.

   $P(u)e_1 = (u^n$ - $a_{n-1}u^{n-1} - \cdots - a_1u - -a_0Id)(e_1)$

   $P(u)e_1 = u^n(e_1)$ - $a_{n-1}(e_n) - \cdots - a_1e_2 - a_0e_1$

   or $u^n(e_1) = u\left(u^{n-1}(e_1)\right) = u(e_n) = a_0e_1 + \cdots + a_{n-1}e_n$

   (La première colonne est nulle)

   P(u).$e_1$ = 0

   $u_k(e_1) = u(u(\dots(u(e_1))\dots))$

$$e_1 \xrightarrow{u} e_2 \xrightarrow{u} e_3 \cdots \xrightarrow{u} e_n$$

$$u^{n-1}(e_1)$$

On veut montrer que
P(u).$e_0$ = 0 : P(u)$u^{i-1}(e_1) = u^{i-1}P(u)(e_1) = u^{i-1}(0) = 0$
Rq : (u commute avec P(u))  Donc P(u) s'annule sur une base P(u)=0.
Pourquoi u commute avec P(u).
Méthode 1 : $(u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_0 1_n)u =$
$u^{n+1} + a_{n-1}u^n + \cdots + a_0 u =$
$u(u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_0 1_n)$

Méthode 3 : Φ(u) : K [X] → End(E)
P → P(u)

Φ u est un isomorphisme d'algèbre et ImΦ u ={polynôme en u}
Φu(K[X]) est commutatif car K[X] est commutatif et Φu morphisme deux polynôme en u commutent

3. En déduire que P est le polynôme minimal de u.

En déduire que P = $m_u$.
On suppose (par l'absurde) Q(u) = 0 et $d°Q < d°P$
Soit Q = $X^p + b_{p-1}X^{n-1} + \cdots + b_0$
$Q(u) = u^p + b_{p-1}u^{p-1} + \cdots + b_1 u + b_0 Id$
$Q(u)e_1 = 0 \implies u^p(e_1) + b_{p-1}u^{p-1}(e_1) + \cdots + b_0 e_1 = 0$
$e_{p+1} + b_{p-1}e_p + \cdots + b_0 e_1 = 0$ Absurde car $(e_1)$ est une base.

Commentaire [E8]: p
Commentaire [E9]: n

<u>Réciproque :</u> On vient de voir qu'une matrice compagnon vérifie $(e_1, u(e_1), \ldots, u^{n-1}(e_1))$ est une base.
Réciproquement, on veut montrer que si v vérifie.
$\exists\, x, tq\ B = (x, v(x), \ldots, v^{n-1}(x))$ est une base alors v peut s'écrire avec une matrice compagnon.

$$Mat_B(v) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & v(x) & v^2(x) & \cdots & \cdots & v^{n-1}(x) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ v(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v^{n-1}(x) \end{array}$$

$v\left(v^{n-1}(x)\right) = v^n(x)$ n'est plus dans la base mais s'il se décompose dedans.
On pose $v^n(x) = a_0 x + a_1 v(x) + \cdots + a_{n-1}v^{n-1}(x)$ pourcertains $a_i \in \mathbb{K}$.