Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse III Automne 2011

Groupe B
Enseignant : M.Caldero.
e-mail : caldero@math.univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 8H15-11H30
Salle : Salle Ampère(1er ss) bâtiment lippmann

TD 9-

Feuille d'exercice IV.

– SOUS-ESPACE CARACTERISTIQUES – DECOMPOSITION SPECTRALE D'UN ENDOMORPHISME –
– EXPONENTIELLE D'ENDOMORPHISME –

Exercice 1.* Soit E un $\mathbb{K} - espace\ vectoriel$ de dimension finie **n≥1** et u un endomorphisme de E.

1. Montrer que si λ est une racine d'ordre k du polynôme minimal m_u, i.e., $m_u = (X-\lambda)^k$Q avec Q(λ)≠0, alors :

$$Ker\ Q(u) = Im\ (u - \lambda id_E)^k$$

1.1. Montrer que Ker Q(u)= Im$\left(u - \lambda Id\right)^k$

Méthode :

- Soit une double inclusion
- Soit une inclusion + argument de dimension
  (En général, il est plus facile de montrer que $Im \subset Ker$)

1.1.1.Montrer que $Im\ \left(u - \lambda Id\right)^k \subset Ker\ Q(u)$

$Y \in Im(u - \lambda Id_E)^k$, Y = $(u - \lambda Id_E)^k$(x)

$donc\ Q(u)(Y) = Q(u)\left(u - \lambda Id\right)^k(x)$ = $m_u(u)(x)$= 0(x) = 0

Commentaire [E1]: $\mathbb{K}[X]$
Commentaire [E2]: $\mathcal{L}(E)$
Commentaire [E3]: E

1.1.2. Montrer que dim $Im\ \left(u - \lambda Id\right)^k \subset dim\ Ker\ Q(u)$

E = Ker 0 = Ker $m_u(u)$ = Ker $[(X-\lambda)^k](u)$

Or $(X-\lambda)^k$ et Q sont premiers entre eux car Q(λ)≠0

E =$Ker\ (u - \lambda Id)^k \oplus Ker\ Q(u)$

donc Ker Q(u) = dim E – dim Ker $(u - \lambda Id)^k$

Ker Q(u) = dim $Im\left(u - \lambda Id\right)^k$

Commentaire [E4]: Formule du rang

2. Sous les mêmes hypothèses, montrer que

$$E = Ker\ (u - \lambda Id)^k \bigoplus Im\ (u - \lambda Id)^k$$

2.1. Montrer que E =Ker $\left(u - \lambda Id\right)^k \oplus Im\ \left(u - \lambda Id\right)^k$

d'après ce qui précéde E = $Ker\ (u - \lambda Id)^k \oplus Ker\ Q(u)$

E = $Ker\ (u - \lambda Id)^k \oplus Im\ (u - \lambda Id)^k$ ⇔ lemme de FITTING

Mat (u – λId)=$\begin{pmatrix} \square & \vec{0} \\ 0 & \square \end{pmatrix}$ Rq : $Ker\ (u - \lambda Id)^k et\ Im\ (u - \lambda Id)^k$ sont stables par u.

En général Im P(u) et Ker P(u) sont stables par u.

3. Soit λ une valeur propre de u telle que :

$$E = Ker\,(u - \lambda Id) \bigoplus Im\,(u - \lambda Id)$$

3.1. Montrer que $E = Ker\,(u - \lambda Id) \oplus Im\,(u - \lambda Id)$

3.1.1. Soit u'= $u|_{Im(u - \lambda Id_E)}$ u' ∈ $\mathcal{L}(Im\,(u - \lambda Id))$

Soit $P = (X - \lambda)$m' où m'=m'_u

Montrer que P(u)= O $\mathcal{L}(E)$

Soit $x \in E$, on veut montrer que P(u)(x)=0

x = $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in Ker(u - \lambda Id)$ $x_2 \in Im(u - \lambda Id)$

$x = x_1 + x_2$

P(u)(x) =P(u)(x_1) + $P(u)(x_2)$

P(u)(x) =$m'_u(u - \lambda Id)$ (x_1) + $(u - \lambda Id)(m'_u(u)(x_2))$

Commentaire [E5]: = 0 car $x_1 \in Ker(u - \lambda\mathrm{Id})$

Commentaire [E6]: = 0 donc m'(u)(x_1) = $m'(u)(x_2)$

P(u)(x) = 0

3.1.2. Montrer que λ est racine de m_u.

On vient de voir que P=(X-λ)m' annule u. comme $m_u | P$, il suffit de montrer que λ est racine simple de P. Donc que m'(λ)≠0.

Supposons par l'absurde que m'(λ))=0. λ valeur propre de u' (car m'= m_u') Donc ∃ X', λ'≠0 tel que u'(X')=λX'.

X'∈ Im(u-λId). Donc X'∈ Im(u-λId), u(X') et X' ∈ Ker(u-λId)or Im(u-λId)∩Ker(u-λId)=0 Absurde.

4. Montrer que les 2 inégalités suivantes sont équivalentes.

4.1. (i) E = $Ker(u - \lambda Id) \oplus Im(u - \lambda Id)$

(ii) $Ker(u - \lambda Id) = Ker(u - \lambda Id)^2$

4.1.1. (i) ⟹ (ii)

On a clairement $Ker(u - \lambda Id) \subset Ker(u - \lambda Id)^2$

Réciproque

Soit $X \in Ker(u - \lambda Id)^2$

(u-λId)(u-λId)(x)=0

(u-λId)(Y)= 0

soit y =(u-λId)(x). On a donc $Y \in Im(u - $λId) et $Y \in Ker(u - \lambda\mathrm{Id})$

Comme ces sous-espaces sont en somme directe y=0.

Donc (u-λId)(x) ⟹ $x \in Ker(u - \lambda Id)$

4.1.2. (ii) ⟹ (i) Montrer que Ker(u-λId)∩Im(u-λId)=0

Ce sera alors terminé puisque la formule du rang assure que dim Ker(u-λId)+ dim Im(u-λId) = dim E.

Hypothèses : Ker(u – λId) = Ker(u – λId)²

Soit X ∈ Ker(u-λId)∩Im(u-λId)

X = (u – λId)(t) et (u – λId)(X) = 0

$\Longrightarrow$ (u- λId)(u- λId)(t) = 0

$\Longrightarrow$ (u- λId)²(t) = 0

$\Longrightarrow$ t ∈ Ker(u-λId)² $\Longrightarrow$ t ∈ Ker(u-λId) par hypothèse

$\Longrightarrow$ (u- λId)(t) = 0 $\Longrightarrow$ X = 0

5. Montrer que si u est diagonalisable, alors pour toute valeur propre λ on a :

5.1. $Ker(u - \lambda Id_E) = Ker(u - \lambda Id_E)^2$

Donc d'après 2/ on a $E = \ker(u - \lambda Id)^2 \oplus Im\,(u - \lambda Id)^2$

Donc d'après 4/ on a Ker(u- λId)= Ker(u – λId)²

Exercice 6.* Soit E un $\mathbb{K} - espace\ vectoriel$ de dimension finie et u un endomorphisme de E.
On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C}$.

1. Montrer que

$$\det(e^u) = e^{trace(u)}$$

Rappel :

tr(u) = $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp(u)}} \lambda$ avec multiplicité.

det(u) = $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp(u)}} \lambda$

Tout sur l'exponentielle

- exp(A) = $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ ça converge
- exp(A+B) = exp(A)exp(B) si AB=BA
- $exp(PAP^{-1}) = P\ exp(A)P^{-1}$
- $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$
- $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$
- exp(0) = Id
- Sp(exp(A)) = $\{e^{\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$

Commentaire [E7]: commute

1.1. Montrer que det exp(A) = exp(Tr(A))

1.1.1. I^{er} *Méthode*

det exp(A) = $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp(exp(A))}} \mu = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} e^{\lambda} = e^{\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda} = e^{Tr(A)}$

1.1.2. $II^{ème}$ *Méthode*

$$A = P\,T\,P^{-1} \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} \quad P \in GL_n(\mathbb{R})$$

$\exp(A) = \exp(P\,T\,P^{-1}) = P\exp(T)\,P^{-1}$

det exp(A) = det exp (T) = $\prod e^{\lambda_i}$

exp (tr (A))= exp (Tr(T)) = exp ($\sum \lambda_i$)
donc det exp(A) = exp (Tr(A))

Rq : det exp(A) = $e^{tr(A)} \neq 0$ donc exp (A) est inversible (son inverse est exp(-A))

1.2. Montrer que si u est nilpotent, alors

$$Ker(e^u - id_E) = Ker\, u$$

Si u est nilpotent alors $Ker(e^u - id_E) = Ker\, u$
On calcule $e^u - Id$

$$e^u - Id = Id + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots + \frac{u^k}{k!} - Id$$

$$e^u - Id = (Id + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \cdots + \frac{u^{k-1}}{k!})u$$

Commentaire [E8]: = W

$$Ker\, u \subset Ker(e^u - Id)$$

plus généralement Ker u ⊂ Ker(v o u)
X + Ker u → $u(x) = 0 + v(u(X)) = 0 \Longrightarrow X \in Ker\, v\, o\, u$

- $Ker(e^u - Id) < Ker\, u$
  On fait W est inversible
  Montrer que cela prouve le résultat
  Soit v son inverse u = v o $(e^u - Id) \Longrightarrow Ker(e^u - Id) \subset Ker\, u$ d'après ce qui précède.
  Montrer que w est inversible.

  En utilisant des matrices Mat(u) = $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$= T

- Explication : Toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ et dans la forme triangulaire, le spectre se trouve sur la diagonale.
  - Si u est nilpotent, sp(u) = {0}
    […]

1.3. Calculer l'exponentielle de chaque matrice suivante de $M_2(\mathbb{K})$.

A = $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}$ D=$\begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}$ E=$\begin{pmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}$

exp(A) = $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$

exp(B) = exp (λId + $\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) = $e^{\lambda \mathrm{Id}} * e^{\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ = $e^{\lambda} Id * e^{\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$e^{\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = Id + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2$

Commentaire [E9]: =0

$e^{\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

exp(B)= $\begin{pmatrix} e^{\lambda} & e^{\lambda}\theta \\ 0 & e^{\lambda} \end{pmatrix}$

exp(C) = exp($^t\begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$) = ($^t exp \begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$)= $\begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ e^{\lambda}\theta & e^{\lambda} \end{pmatrix}$

exp(D) = exp ($\lambda Id + \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$) = $e^{\lambda} * e^{\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}}$

Commentaire [E10]: commutent

Attention :

exp ($\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) ≠ exp($\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$) $*$ exp($\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$))

Commentaire [E11]: ne commutent pas

A= $\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ A²=$\begin{pmatrix} 0 & \theta^2 \\ \theta^2 & 0 \end{pmatrix}$= θ^2Id.

$A^3 = \theta^2 A - A^4 = \theta^4 \mathrm{Id}$

$A^{2n} = \theta^{2n} Id(-1)^n \quad A^{2n+1} = \theta^{2n+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (-1)^n$

Exp(D) = $\sum_{k\geq 0} \frac{D^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{A^{2n}}{2n!} + \sum_{k\geq 0} \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Exp(D) = $(\sum_{k\geq 0} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!}) Id + (\sum_{k\geq 0} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exp(D) = $(ch\ \theta) Id + (sh\ \theta) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Commentaire [E12]: cos θ

Commentaire [E13]: sin θ

Exp(D) = $\begin{pmatrix} e^{\lambda} ch\ \theta & -e^{\lambda} sh\ \theta \\ e^{\lambda} sh\ \theta & e^{\lambda} ch\ \theta \end{pmatrix}$

Exp(E) = $e^{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} \cos\theta & -e^{\lambda} \sin\theta \\ e^{\lambda} \sin\theta & e^{\lambda} \cos\theta \end{pmatrix}$

Autre Méthode:

J = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \chi_J = X^2 - 1$ ⇔ J = $P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$

(il faut calculer P)

puis $e^J = P\ exp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \qquad e^J = P \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}$

Trouver une matrice complexe non nulle telle que exp(A)= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$e^{2\pi i} = 1 \qquad$ exp$\begin{pmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & -2\pi i \end{pmatrix}$ =$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

même proposition pour une matrice réelle.

$\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 0 & -2\pi \end{pmatrix} P^{-1}$

exp$\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ =P exp$\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$= $PP^{-1}Id$

Exercice 7.* Soit E un $\mathbb{K} - espace\ vectoriel$ et soit u un endomorphisme de E vérifiant

$$(u - id_E)^2 (u - 2id_E) = 0$$

1. Montrer que $E = Ker(u - id_E)^2 \oplus Ker(u - 2id_E)$.

   1.1. $E = Ker(u - id_E)^2 \oplus Ker(u - 2id_E)$.

   On utilise le lemme des noyaux, (X-1)² et (X-2) sont premiers entre eux.

   E = Ker 0 = Ker(u-Id)²(u-2Id) = $Ker\ (u - Id)^2 \oplus Ker(u - 2Id)$

Commentaire [E14]: $\pi_1 \to K_1$

Commentaire [E15]: $\pi_2 \to K_2$

2. Notons π_1 la projection sur Ker(u-2id_E) parallèlement à Ker(u - id_E)² et π_2 la projection sur $Ker(u - id_E)^2$ parallèlement à $Ker(u - 2id_E)$.

   2.1. $Montrer\ que\ e^u\pi_2 = e^2\pi_2$

      2.1.1. $Im\pi_2 = Ker(u - 2Id)$ par définition

      $u_2 = u|_{Im\,\pi_2} = u|_{Ker(u-2Id)}$= $2Id_{E^2}$

      Commentaire [E16]: stable

      (Si $X \in Ker(u - 2Id)$ alors u(X) = 2X)

      $e^u\pi_2 = e^{u_2}\pi_2 = e^2{Id_E}^2\pi_2 = e^2\pi_2$

   2.2. $Montrer\ que\ e^u\pi_1 = e\ u\ \pi_1$

      2.2.1. $u_1 = u|_{Im\,\pi_2} = u|_{Ker(u-Id)^2}$

      exp(u_1) = $exp(Id + u_1 - Id)$

      Cette décomposition vient du fait que Id commute avec $u_1 - Id$ et $(u_1 - Id)^2 = 0$

      (car on travaille sur Ker(u-Id)²)

      $e^{u_1} = e^{Id} * e^{u-Id} = e^{Id}(Id + \frac{1}{1!}(u - Id) + \frac{1}{2!}\ 0)$

      $e^{u_1} = e^u\ donc\ e^u\pi_1 - e\ u\ \pi_1$

3. Exprimer en fonction de u les projections de $\pi_1\ et\ \pi_2$

   3.1.

      3.1.1. $\pi_1\ et\ \pi_2$ comme polynôme en u.

      On part de Bézout pour (X-1)² et (X-2)

      Algorithme d'Euclide

X² - 2X +1	X-2
X²- 2X	

      X² - 2X +1 = X(X-2) +1   1=(X-1)²-X(X-2)

      Id = (u – Id)² - u(u-2Id) car (u-Id)²(u-2Id) = 0

      Commentaire [E17]: ∈ Ker(u-2Id)

      Commentaire [E18]: ∈ Ker(u-Id)²

      π_2 = (u- Id)² π_1 = -u(u- 2Id)   (u-2Id)(u-Id)²(x)

      3.1.2. Autre méthode pour Bézout.

      $\frac{1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2}$ (@)

      (@) * (X-2) éval(2) ⇒   c= 1

      (@) * (X-1)² éval(1) ⇒   a= -1

      (@) * (X-1) éval(∞) ⇒   b+c = 0 $\Rightarrow b = -1$

      $\frac{1}{(X-1)^2(X-2)} = \frac{-1}{(X-1)^2} + \frac{-1}{X-1} + \frac{c}{X-2}$

      1 = -(X-2) – (X-1)(X-2) + (X-1)²

      1= -X(X-2) + (X-1)²

4. En déduire une expression de e^u en fonction de u.

4.1.

4.1.1. e^u

$$
\begin{aligned}
&= e^u Id \\
&= e^u(\pi_1 + \pi_2) - e^u\pi_1 + e^u\pi_2 \\
&= eu\pi_1 + e^2\pi_2 \\
&= -eu^2(u - 2Id) + e^2(u - Id)^2 \\
&= -eu^3 + 2eu^2 + e^2u^2 - 2e^2u + e^2 Id \\
&= \ -eu^3 + e(2+e)u^2 - 2e^2u + e^2 Id
\end{aligned}
$$

Récapitulatif :

$u \ \in L(E)$. χ_u fournit un polynôme annulateur

On factorise $\chi_u = (X - \lambda_1)^{n_1}(X - \lambda_2)^{n_2} \ldots (X - \lambda_k)^{n_k}$

les λ_i sont distincts et les $(X - \lambda_i)^{n_i}$ sont 2 à 2 premiers entre eux.

$$E = \bigoplus_i \ker(u - \lambda_i Id)^{n_i}$$

On calcule les projecteurs spectraux π_i soit pour l'algorithme d'Euclide. (si k =2), ou par la décomposition en éléments simples $\frac{1}{\pi(X-\lambda_i)^{n_i}}$

On calcule $e^u\pi_i = e^{u_i}\pi_i = e^{(\lambda_i Id + u_i - \lambda_i Id)}\pi_i (u_i - \lambda_i Id)^{n_i} = 0$

$$= e^{\lambda_i}\left(Id + (u_i - \lambda_i Id) + \frac{1}{2!}(u_i - \lambda_i Id)^2 + \cdots + \frac{1}{(n_i - 1)!}(u_i - \lambda_i Id)^{n_i - 1}\right.$$

Pour conclure on calcule e^u.

$e^u = e^u Id = e^u(\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_k) = e^u\pi_1 + e^u\pi_2 + \cdots + e^u\pi_k$

Commentaire [E19]: homothétie

Commentaire [E20]: nilpotent