Université Claude Bernard Lyon 1

LICENCE Math VI

REPRESENTATIONS DES GROUPES FINIS

CONTRÔLE CONTINU

20 Mars 2015

Durée : 1 heure

Exercice 1 Soit E, F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F. Montrer l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \left(\mathrm{Im}({}^t u)\right)^o$.

Exercice 2 Dans le $\mathbb{C}$- espace $\mathbb{C}^3$ muni de sa structure hermitienne canonique, donner explicitement l'expression de $p(x, y, z)$, où $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, et où p désigne la projection orthogonale sur la droite engendrée par $(1, 2i, -2)$.

Exercice 3 Soit E l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2). On considère la famille $(3e_1^* + e_2^*, 2e_1^* + e_2^*)$, où (e_1^*, e_2^*) désigne la base duale dans E^*. Montrer qu'il s'agit d'une base de E^* et donner son antéduale dans E.

Exercice 4 Soit u un endomorphisme normal d'un espace hermitien E sur le corps des complexes.

1. Après avoir donné la définition d'un endomorphisme normal, montrer que si E_λ est un sous-espace propre de u pour la valeur propre λ, alors son orthogonal $E_\lambda^\perp$ pour la forme hermitienne de E est stable par u.
2. Pourquoi les endomorphismes hermitiens, antihermitiens, et unitaires sont normaux ? Donner les propriétés de leurs valeurs propres (on ne demande pas de preuve).

Exercice 5 On considère la forme h hermitienne de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$h(x, y) = |x|^2 + i\bar{x}y - ix\bar{y} + 2|y|^2.$$

1. Quelle est sa forme polaire associée ?
2. Donner la matrice H de h dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.
3. A l'aide de la méthode de Gauss, dire si elle est définie positive.
4. Quel est le signe des valeurs propres de H ?