Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse III Automne 2011

Groupe B
Enseignant : M.Caldero.
e-mail : caldero@math.univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 8H15-11H30
Salle : Salle Ampère(1er ss) bâtiment lippmann

TD 1

- Mise en bouche -

Feuille d'exercice 0.

Recette : ECRIRE UNE MATRICE DE PASSAGE

$B(e_1, \dots, e_n)$ $B'(e'_1, \dots, e'_n)$

On écrit e'_i en colonne dans la base B. On obtient la matrice de passage P de B vers B'.

$e'_1 = 2\, e_1 + e_2$

$e'_1 = -\, e_1 + 3e_2$

$$P = \begin{array}{c} B \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} B'$$

$P = Mat'_{B',B}(Id)$

Exercice 7. Soit A ∈ $M_2(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$A^2 - tr(A)A + det(A)1_2 = 0$$

(Futur théorème de Cayley-Hamilton)

Les matrices vérifient des relations polynomiales.

$$A^2 - tr(A)A + det(A)1_2 = 0$$

Il existe une formule en dimension n.

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ad+bc \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ad+bc-ab-bd \\ ac+cd-ac-cd & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : la formule est vérifié pour A ∈ $M_2(\mathbb{K})$

Rappel (cours): LE DETERMINANT

- *A est inversible ⇔ det A ≠ 0*
- *Permet de calculer $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t com\, A$.*
- *Savoir si un système linéaire a une solution et le résoudre.*
- *Savoir si une famille de vecteurs sont liés ou libres*
- *Permet de calculer le rang d'une matrice.*

IMPORTANT le déterminant est invariant de similitude det(A) = det($P^{-1}AP$)

Rappel (cours): LA TRACE

La trace est invariant de similitude tr(A) = tr($P^{-1}AP$)

Preuve : On montre par le calcul que la Tr(AB) = Tr(BA)

Puis on écrit tr($P^{-1}AP$) = tr(APP^{-1}) = Tr(A Id) = Tr(A)

$$M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$$

$$A \to \det A$$

$$A \to \mathrm{Tr}\, A$$

Exercice 8. Soit A ∈ $M_n(\mathbb{K})$ et λ, μ ∈ $\mathbb{K}$ tels que

$$A^2 = \lambda A + \mu 1_n.$$

1. Montrer que si μ est non nul, la matrice A est inversible et que

$$A^{-1} = \mu^{-1}(A - \lambda 1_n)$$

$A^2 - \lambda A = \mu 1_n$

$A(A - \lambda 1_n) = \mu 1_n$

$A(\mu^{-1}(A - \lambda 1_n)) = 1_n$

Rappel (cours) : INVERSIBILITE GENERALITE.

Soit f : E → F une application.

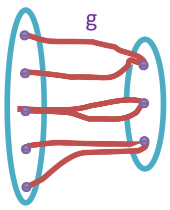
f est inversible ssi ∃ g,h : F → E. f o g = Id_F h o f = Id_E

Et dans ce cas on a g=h que l'on note f^{-1}.

ATTENTION : si f est inversible à droite, f n'est pas inversible à gauche et inversement.

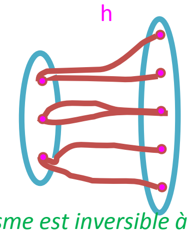
Inversible à gauche ⇔ injective

Inversible à droite ⇔ surjective



g n'est pas inversible à gauche

h n'est pas inversible à droite



En dimension finie un endomorphisme est inversible à gauche ⇔ il est inversible à droite

Effectivement, grâce au théorème du rang :

u : endomorphisme : dim Ker u + dim Im u = dim E

u injectif ⇔ Ker u = {0} ⇔ dim Ker u = 0 ⇔ dim Im u = dim E ⇔ Im u = E ⇔ u surjectif.

ATTENTION c'est faux su A est une matrice rectangulaire contre-exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \mu^{-1}(A - \lambda 1_n)$

Commentaire [Q1]: Id

Commentaire [Q2]: Non commutatif ce qui complique les choses.

Commentaire [Q3]: commutatif les choses s'en voient grandement simplifiées.

2. Montrer que pour tout k, A^k est combinaison linéaire de A et 1_n.

H_k k ∈ ℕ. $A^k = \lambda_k A + \mu_k 1_n$

Vrai pour k = 0 $A^0 = 1_n$

$H_k \Rightarrow H_{k+1}$

$$A^k = \lambda_k A + \mu_k 1_n$$
$$AA^k = A(\lambda_k A + \mu_k 1_n)$$
$$A^{k+1} = \lambda_k A^2 + \mu_k A$$
$$A^{k+1} = \lambda_k(\lambda A + \mu 1_n) + \mu_k A$$
$$A^{k+1} = (\lambda_k \lambda + \mu_k A) + \lambda_k \mu 1_n$$

H_{k+1} est vraie.

H_k k ∈ ℕ. $A^{-k} = \lambda_{-k} A + \mu_{-k} 1_n$

Vrai pour k = 0

$H_k \Rightarrow H_{k+1}$

$$A^{-k} = \lambda_{-k} A + \mu_{-k} 1_n$$
$$A^{-1}A^{-k} = A^{-1}(\lambda_{-k} A + \mu_{-k} 1_n)$$
$$A^{-k-1} = \lambda_{-k} 1_n + \mu_{-k} A^{-1}$$
$$A^{-k-1} = \lambda_{-k} 1_n + \mu_{-k}\mu^{-1}(A - \lambda 1_n)$$
$$A^{-k} = \lambda_{-k} A + \mu_{-k} 1_n$$
$$\boxed{A^{-k-1} = \mu_{-k}\mu^{-1} A + (\lambda_{-k}\lambda\mu_{-k}\mu^{-1}) 1_n}$$

Exercice 9. On considère les deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{bmatrix}$$

1. Ecrire A comme combinaison linéaire de J et 1_n.

   A = b J + (a-b) I_n.

2. Calculer J^k et A^k, pour tout entier k.

   J^k ?

   $$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nJ$$

   Rq : On est dans la situation de l'exercice 8 avec µ = 0

   (Si µ≠ 0 J aurait été inversible)

   $J^3 = J.J^2 = J \cap I_n = n\,J^2 = n^2 J$

   Par récurrence $J^k = n^{k-1} J$

   $A^k = (bJ + (a-b)1_n)^k$

Rq : (A+B)² A et B quelconque

(A+B)² = (A+B)(A+B) = A²+ AB + BA + B²

si de plus A,B commutent : (A+B)² = A² + 2AB + B²

En général, Binome de Newton matriciel

Si A et B commutent $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

En particulier $(A + \lambda I_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \lambda^{n-k}$

$A^k = (bJ + (a-b)1_n)^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^i J^i (a-b)^{k-i}$

$A^k = (\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i} b^i (a-b)^{k-i} n^{i-1} J) + (a-b)^k 1_n$

$A^k = J(\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i} b^i (a-b)^{k-i} n^{i-1}) + (a-b)^k 1_n$

$A^k = J(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i} (nb)^i (a-b)^{k-i} - (a-b)^k) + (a-b)^k 1_n$

$A^k = J\left(\frac{1}{n}(nb + a - b)^k - \frac{1}{n}(a-b)^k\right) + (a-b)^k 1_n$

$A^k = J(\frac{1}{n}((a + b(n-1)^k - (a-b)^k)$

$$A^k = \begin{pmatrix} + & * & & * & \\ * & \ddots & & & \\ & & \ddots & & * \\ & * & & * & + \end{pmatrix}$$

$* = \frac{1}{n}\,[(a + (n-1)b)^k - (a-b)^k]$

$+ = \frac{1}{n}\,[(a + (n-1)b)^k + (n-1)(a-b)^k]$

Exercice 10. Soit M = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ et P= $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. Montrer que $P^{-1}MP$ est de la forme D = P= $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$

Rappel (cours) : CALCUL DE L'INVERSE.

Comment calculer P^{-1} ?

1) $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t\mathrm{com}P$ (si P est grand le calcul peut être long)
2) Idée : calculer P^{-1} revient à résoudre PX = Y
   On résout le système par opération sur les lignes, On peut oublier X et Y
   On effectue les mêmes opérations sur la matrice de gauche et la matrice de droite jusqu'à obtenir (Id,A)
   A la fin, on a A =P^{-1}. La stratégie pour obtenir I_d est celle du pivot de gauss.
3) Si $P \in M_2(\mathbb{K})$ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Commentaire [p4]: ^{t}com A

$P^{-1} = \frac{1}{-\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$P^{-1}MP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

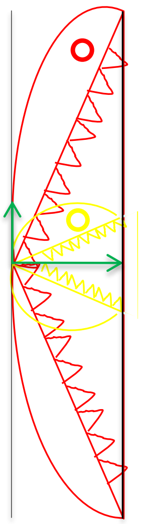
$P^{-1}MP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

On peut résumer la situation géométriquement

M est la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique.
Dans la nouvelle base (e'_1, e'_2) avec $e'_1 = (-1,1) = -e_1 + e_2$

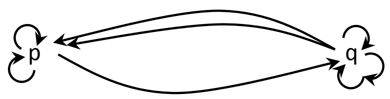
$$e'_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}e_1 + e_2$$

u s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$



PACMIAM !!

2. Combien y a-t-il de chemins de longueur 2,3 ou 4 dans le graphe ci-dessous ?



chemin de longueur 1

p → p 2

p → q 1

q → p 2

q → q 3

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p & q \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \end{array}$$

La matrice M « code » le graphe
longueur 2 p→ p 6

	Passant par p		Passant par q	total
p → p	2 x 2	+	1 x 2	6
p → q	2 x 1	+	1 x 3	5
q → p	2 x 2	+	3 x 2	10
q → q	2 x 1	+	3 x 3	11

$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*2+1*3 & 2*1+1*3 \\ 2*2+3*2 & 2*1+3*3 \end{pmatrix}$

On voit que le nombre de chemins de longueur 2 de X → Y est le coeff (X,Y) de la matrice M_2.

De même le coefficient (X,Y) de M^k est égal au nombre de chemins de longueur k de X vers Y.

On va donc calculer M^k :

D = $P^{-1}MP \;\Rightarrow M = PDP^{-1}$

$M^k = (PDP^{-1})^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots . PDP^{-1}$

K x

Commentaire [p5]: = 1

M^k = PD^kP^{-1}

<u>Explication : (sans calcul)</u>.

B et B' deux bases et u un endomorphisme t.q. M = $at_B(u)$, D= $Mat_B{}'(u)$

P = Pass(B → B') on a bien D = $P^{-1}MP$

M^k = $mat_B(u^k)$, D^k = $mat_{B'}(u^k)$

Donc $D^k = P^{-1}M^kP$

M^k = $P\begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix}P^{-1}$

M^k = $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

M^k = $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 4^k \\ 2 & 2 * 4^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

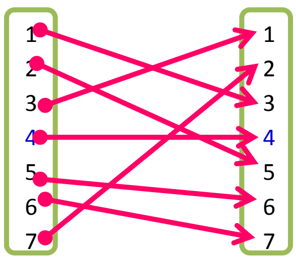
M^k = $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 + 2 * 4^k & -2 + 2 * 4^k \\ -4 + 4 * 4^k & 2 + 4 * 4^k \end{pmatrix}$

On prend k= 0 (Id) et k=1 (M) pour vérifier.

Le groupe symétrique

Savoir Faire : Decomposition en cycles disjoints.

Théorème : Toute permutation possède une décomposition en cycles disjoints unique à commutation.



2-cycle 4-cycle identité

[3514672] = (13) (2567) (4)

$(x_1 x_2 \dots . x_k)$ est la permutation $x_1 \to x_2$

$x_2 \to x_3$

$\vdots$

$x_{k-1} \to x_k$

$x_k \to x_1$ si y ≠ x : $y \to y$

Un cycle se décompose en transpositions.

(12…n) = (12) (23) …(n-1 n)

Conclusion : Toute permutation est un produit de transpositions.

[3514672] = (13) (2567) = (13) (25)(56)(67)

1 <--- 3 <--- 3<---3<---3

6<--- 6<---6<---5<---5

(13) (25) (56) (67)

2<--- 2<---5<---6<---7