T.I.P.E. dirigé par Philippe Caldero.

Géométrie projective.

Donatien Bénéat.

(janvier 2008)

TABLE DES MATIÈRES

1 Étude des projections coniques. 1

2 Complétés projectifs. 6

3 Premières propriétés des birapports. 9

4 Espaces projectifs et transformations projectives. 14

5 Coordonnées homogènes et trilinéaires. 19
- 1 Coordonnées homogènes. 19
- 2 " barycentriques. 21
- 3 " trilinéaires. 24

6 Les théorèmes de Pappus et Desargues. 29

7 Le principe de dualité. 33
- 1 Expression générale du principe de dualité. 33
- 2 Le principe de dualité dans le plan projectif. 37

8 L'hexagramme mystique de Pascal. 40
- 1 Le théorème de Pascal. 40
- 2 Application à la géométrie arithmétique. 43

9 La réciprocité polaire. 47

10 La géométrie projective sur le corps à cinq éléments. 50

CHAPITRE 1.

ÉTUDE DES PROJECTIONS CONIQUES.

Avouons tout de suite que nous voulons construire une géométrie dans laquelle il n'y a pas de différence entre deux droites parallèles et deux droites sécantes. Cette géométrie, c'est celle de la perspective centrale, celle qui semble le mieux représenter le monde tel qu'il nous apparaît. En géométrie, le procédé qui correspond à la perspective centrale est la projection conique ; vérifions que les projections coniques possèdent les propriétés que nous désirons.

*
*   *
*

DÉFINITION 1.
Soient un plan Π de l'espace et deux points O et P. L'intersection de la droite (OP) et du plan Π, lorsqu'elle existe, est appelée **la projection conique** de P sur le plan Π par rapport à O.

DÉFINITION 2.
Et plus généralement, la fonction qui à chaque point P associe, lorsqu'elle existe, sa projection conique sur Π par rapport à O est appelée la **projection conique de centre O**. Π est appelé le **plan-image** de cette projection.

DÉFINITION 3.
Étant donnée une projection conique de centre O, une droite passant par O est appelée une **droite centrale**, et un plan passant O est appelé un **plan central**.

DÉFINITION 4.
Soient A, B, C, D quatre points alignés. Le nombre $\frac{\overline{AC}/\overline{AD}}{\overline{BC}/\overline{BD}}$ (évidemment indépendant de la mesure choisie) est appelé le **birapport** des points A, B, C, D (dans cet ordre).

Convention 1.
Convenons de représenter le birapport de quatre points alignés A, B, C, D par le symbole $[A, B, C, D]$.

Convention 2.
À partir de maintenant, quand il sera question des propriétés de points préservées (ou non) par une projection conique, qu'il soit compris que la projection conique de ces points doit exister, c'est-à-dire qu'ils ne doivent pas se trouver dans le plan central parallèle au plan-image. De même, lorsqu'il sera question de projections coniques de droites, ces droites ne devront pas être incluses dans le plan central parallèle au plan image.

Proposition 1.
La fonction projection conique est définie en tout point extérieur au plan central parallèle au plan-image.

Proposition 2.
Une projection conique conserve l'alignement de trois points.

Soient A, B, C trois points alignés, et X, Y, Z leurs projections coniques respectives.

X, Y et Z appartiennent respectivement au droites (OA), (OB), (OC), toutes trois incluses dans le plan (OAC),

$\therefore$ X, Y et Z appartiennent au même plan (OAC).

Comme X, Y, Z appartiennent également au plan-image, ils appartiennent à l'intersection de ce dernier avec le plan (OAC).

L'intersection de deux plans sécants et distincts étant une droite, X, Y et Z sont alignés.

C.Q.F.D.

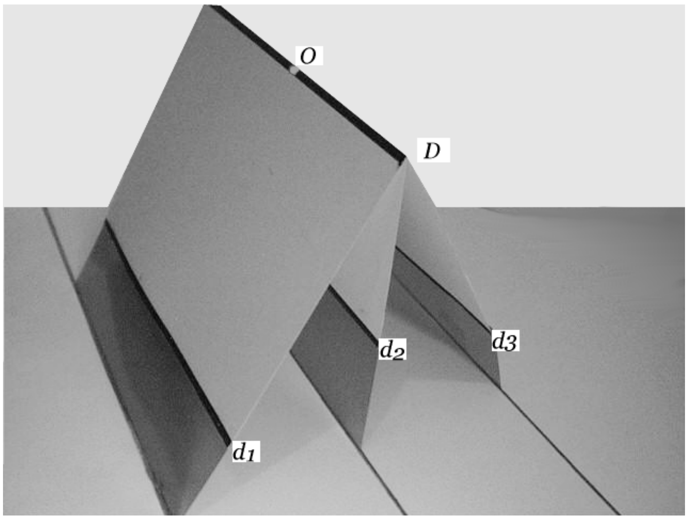
Maintenant, nous allons voir qu'en général, les projections coniques de trois droites parallèles sont sécantes. Ceci permet de donner une première définition de la géométrie projective : il s'agit de la géométrie des projections coniques, ou plus exactement de la géométrie qui étudie les propriétés conservées par les projections coniques.

Proposition 3.
Soient d_1, d_2, d_3 trois droites parallèles entre elles, et incluses dans des plans centraux distincts.

(1) Si ces trois droites sont parallèles au plan-image, leurs projections sont trois droites parallèles.

(2) Si ces trois droites rencontrent le plan-image, leurs projections sont trois droites concourantes en un point, qui est l'intersection du plan-image avec la droite centrale parallèle à d_1, d_2 et d_3 ; mais ce point de concours n'appartient à aucune des projections.

En effet, dans les deux cas, les projections de d_1, d_2, d_3 sont contenues dans les intersections respectives des plans centraux (Od_1), (Od_2), (Od_3) avec le plan-image ; comme ils contiennent tous les trois le point O, et qu'ils sont distincts, ces plans centraux ont pour intersection une droite $D \parallel$ à d_1, d_2, d_3 (théorème "du toit").

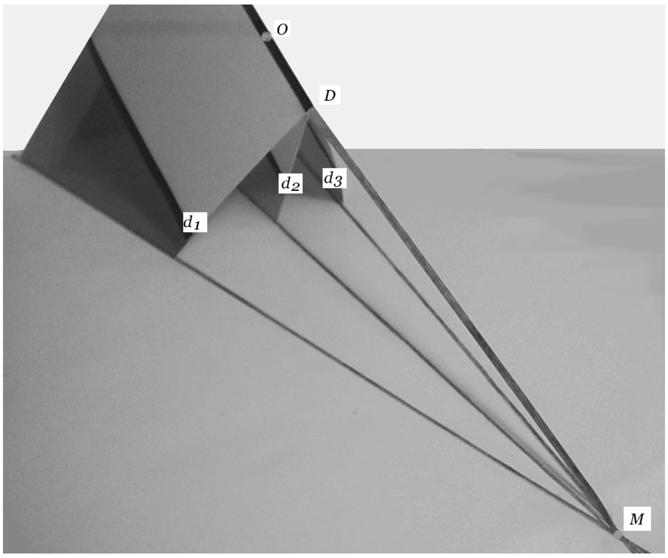


(1) Si d_1, d_2 et d_3 sont $\parallel$ au plan-image, D l'est aussi ; or la projection de d_1 est incluse dans le même plan central que D ;

$\therefore$ D et la projection de d_1 sont nécessairement $\parallel$.

De même, D est aussi parallèle aux projections de d_2 et d_3.

$\therefore$ les projections de d_1, d_2 et d_3 sont parallèles (par transitivité).



(2) Si d_1, d_2 et d_3 rencontrent le plan-image, D fait de même. Notons M le point d'intersection de D et du plan-image.

M appartient à la fois au plan central (Od_1) et au plan-image, $\therefore$ il appartient à leur intersection.

De même, M appartient aux intersections de (Od_2) et (Od_3) avec le plan-image.

Ainsi, les projections de d_1, d_2, d_3 sont concourantes en M.

Enfin, dans chacune des intersections de (Od_1), (Od_2) et (Od_3) avec le plan-image, M est le seul point à n'être la projection d'aucun point de d_1, d_2, d_3 (car $(OM) \parallel d_1, d_2, d_3$).

$\therefore$ les projections de d_1, d_2, d_3 sont trois droites concourantes en un point M, et privées de ce point.

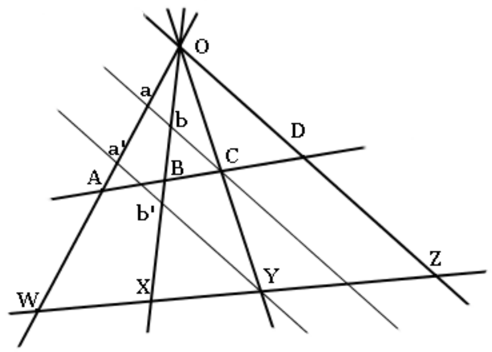
C.Q.F.D.

Définition 5.
Étant donnée une direction δ non-parallèle au plan-image, le point de concours des projections des droites de direction δ est appelé le **point de fuite** de δ.

Proposition 4.
L'ensemble des points de fuite des directions d'un plan P est la droite d'intersection du plan-image et du plan central parallèle à P.

DÉFINITION 6.
La droite formée par les points de fuite des directions d'un plan est appelée la **ligne de fuite** de ce plan.

PROPOSITION 5.
Une projection conique conserve le birapport de quatre points alignés, lorsqu'ils ne sont pas alignés sur une droite centrale.



Soient A, B, C, D quatre points alignés, W, X, Y, Z leurs projections coniques respectives.

Construisons la parallèle à (OD) passant par C ; soient a et b ses intersections avec (OA) et (OB).

De même, construisons la $\|$ à (OD) passant par Y ; soient a' et b' ses intersections avec (OA) et (OB).

$\triangle ACa$ et $\triangle ADO$ sont semblables, $\therefore AC/AD = aC/OD$.

$\triangle BCb$ et $\triangle BDO$ sont semblables, $\therefore BC/BD = bC/OD$.

En faisant le rapport membre à membre des deux égalités, on obtient

$$\frac{AC/AD}{BC/BD} = \frac{aC}{bC}.$$

De la même façon, $\triangle WYa'$ et $\triangle XYb'$ étant tous les deux semblables à $\triangle WZO$,
$WY/WZ = a'Y/OZ$ et $XY/XZ = b'Y/OZ$

$$\text{d'où} \quad \frac{WY/WZ}{XY/XZ} = \frac{a'Y}{b'Y}.$$

Par construction, $(ab) \parallel (a'b')$, $\therefore a'Y/b'Y = aC/bC$,

$$\text{d'où} \quad \frac{WY/WZ}{XY/XZ} = \frac{AC/AD}{BC/BD}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad [A, B, C, D] = [W, X, Y, Z].$$

C.Q.F.D.

CHAPITRE 2.

COMPLÉTÉS PROJECTIFS.

Nous avons vu que trois droites parallèles a, b, c avaient pour projections trois droites d, e, f concourantes en un point P (à condition de bien choisir la projection), et nous avons appelé P le point de fuite de a, b, c. Ce sont les points de a, b, c les plus éloignés du centre de projection qui ont les projections les plus proches de P. P est un point-limite, et nous avons bien envie de dire que c'est la projection d'un point imaginaire où se rejoindraient les trois parallèles. Ce point imaginaire, situé à une distance infinie, nous l'appellerons le point à l'infini des droites a, b, c.

De même, nous avons vu que les points de fuite associés à toutes les directions d'un plan Π étaient alignés sur une droite que nous avons appelée la ligne de fuite du plan. Nous avons envie de dire que cette ligne de fuite est la projection d'une ligne imaginaire, constituée des points à l'infini de toutes les droites de Π. Cette ligne imaginaire, située elle aussi à une distance infinie, nous l'appellerons la droite à l'infini de Π.

*

* *

*

Définition 1.
Soit une droite d de direction δ ; la réunion de d et $\{\delta\}$ (c.-à-d. l'ensemble $d \cup \{\delta\}$) est appelée le **complété projectif de la droite** d.

Définition 2.
Soient un plan P, et p l'ensemble des directions de toutes les droites de P ; la réunion de P et p est appelée le **complété projectif du plan** P.

Définition 3.
Soit e l'ensemble des directions de toutes les droites de l'espace ; la réunion de l'espace et e est appelée le **complété projectif de l'espace**.

PROPOSITION 1.
Si d et e sont deux droites distinctes, que δ et ϵ soient leurs directions respectives, et que $\widehat{d}$ et $\widehat{e}$ soient leurs complétés projectifs respectifs :

(1) Soit d et e ne sont pas coplanaires, c'est-à-dire que d et e ne sont ni parallèles ni sécantes : dans ce cas $\widehat{d}$ et $\widehat{e}$ n'ont pas d'intersection ($\widehat{d} \cap \widehat{e} = \varnothing$) ;

(2) Soit d et e sont coplanaires et sécantes : dans ce cas $\widehat{d}$ et $\widehat{e}$ ont pour intersection un point de l'espace ($\widehat{d} \cap \widehat{e} = \{\text{un point de l'espace}\}$) ;

(3) Soit d et e sont coplanaires et parallèles : dans ce cas $\hat{d}$ et $\hat{e}$ ont pour intersection la direction commune à d et e ($\widehat{d} \cap \widehat{e} = \{\delta\} = \{\epsilon\}$).

PROPOSITION 2.
Si P et Q sont deux plans distincts, que p soit l'ensemble des directions de toutes les droites de P, que q soit l'ensemble des directions de toutes les droites de Q, et que $\widehat{P}$ et $\widehat{Q}$ soient les complétés projectifs respectifs des plans P et Q :

(1) Soit P et Q sont sécants, c'est-à-dire que P et Q ont pour intersection une droite de l'espace : dans ce cas $\widehat{P}$ et $\widehat{Q}$ ont pour intersection le complété projectif de cette droite ;

(2) Soit P et Q sont parallèles : dans ce cas $\widehat{P}$ et $\widehat{Q}$ ont le même ensemble de directions, et c'est leur intersection.

DÉFINITION 4.
La direction d'une droite, en tant qu'élément du complété projectif de cette droite, est appelée son **point à l'infini**.

DÉFINITION 5.
L'ensemble des directions de toutes les droites d'un plan, en tant qu'élément du complété projectif de ce plan, est appelé sa **droite de l'infini**.

DÉFINITION 6.
L'ensemble des directions de toutes les droites de l'espace, en tant qu'élément du complété projectif de l'espace, est appelé son **plan de l'infini**.

À partir de maintenant, les complétés projectifs s'appelleront des "espaces projectifs" ; le procédé que nous venons d'utiliser pour les définir (c'est-à-dire l'addition d'éléments à l'infini à des espaces affines) sera appelé la "construction géométrique des espaces projectifs".
Dans le quatrième chapitre, nous verrons une nouvelle définition des espaces projectifs : ce sera la "construction algébrique des espaces projectifs".

CHAPITRE 3.

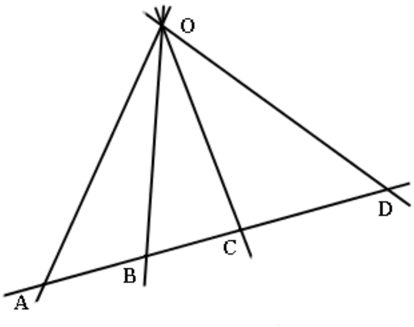
PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES BIRAPPORTS.

Convention 1.
Soient d_1, d_2, d_3, d_4 quatre droites coplanaires et concourantes. Lorsque l'on parlera du birapport de ces droites, qu'il soit compris qu'il s'agit du birapport de leurs points d'intersection respectifs avec une droite quelconque ne passant pas par le point de concours des quatre premières.

Comme nous l'avons montré, ce dernier birapport ne dépend pas du choix de la cinquième droite.

Convenons de représenter le birapport des droites d_1, d_2, d_3, d_4 par le symbole $[d_1, d_2, d_3, d_4]$.

Problème 1.
Soient a, b, c, d quatre droites concourantes en un point O. Connaissant seulement les angles formés par ces quatre droites, trouver leur birapport.



Soient A, B, C, D les intersections respectives de a, b, c, d avec une droite quelconque ne passant pas par O, et soit h la distance de O à cette droite.

Exprimons, de deux façons différentes, les aires algébriques des triangles ainsi formés :

$$\left.\begin{array}{r} 2\,\text{Aire}\,\triangle AOC = OA\cdot OC\cdot \text{Sin}\,\angle AOC \\ 2\,\text{Aire}\,\triangle AOD = OA\cdot OD\cdot \text{Sin}\,\angle AOD \\ 2\,\text{Aire}\,\triangle BOC = OB\cdot OC\cdot \text{Sin}\,\angle BOC \\ 2\,\text{Aire}\,\triangle BOD = OB\cdot OD\cdot \text{Sin}\,\angle BOD \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{r} \text{Aire}\,\triangle AOC = AC\cdot h \\ \text{Aire}\,\triangle AOD = AD\cdot h \\ \text{Aire}\,\triangle BOC = BC\cdot h \\ \text{Aire}\,\triangle BOD = BD\cdot h \end{array}\right.$$

Par définition, le birapport de A, B, C, D est

$$[A,B,C,D] = \frac{AC/AD}{BC/BD}$$

le deuxième groupe de relations nous montre que ceci peut aussi s'écrire :

$$[A,B,C,D] = \frac{\text{Aire}\,\triangle AOC/\,\text{Aire}\,\triangle AOD}{\text{Aire}\,\triangle BOC/\,\text{Aire}\,\triangle BOD}$$

$\therefore$, d'après le premier groupe de relations,

$$\begin{aligned} [A,B,C,D] &= \frac{(\frac{1}{2}OA\cdot OC\cdot \text{Sin}\,\angle AOC)/(\frac{1}{2}OA\cdot OD\cdot \text{Sin}\,\angle AOD)}{(\frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot \text{Sin}\,\angle BOC)/(\frac{1}{2}OB\cdot OD\cdot \text{Sin}\,\angle BOD)} \\ &= \frac{\text{Sin}\,\angle AOC/\,\text{Sin}\,\angle AOD}{\text{Sin}\,\angle BOC/\,\text{Sin}\,\angle BOD} \end{aligned}$$

or $[A,B,C,D] = [a,b,c,d]$;

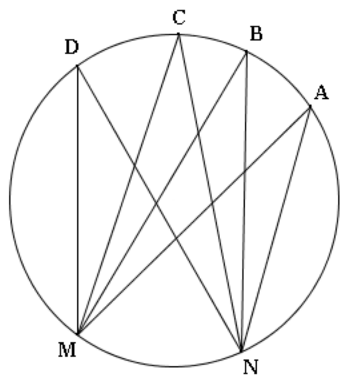
$$\begin{aligned} \therefore\ [a,b,c,d] &= \frac{\text{Sin}\,\angle AOC/\,\text{Sin}\,\angle AOD}{\text{Sin}\,\angle BOC/\,\text{Sin}\,\angle BOD} \\ &= \frac{\text{Sin}\,\angle(a,c)/\,\text{Sin}\,\angle(a,d)}{\text{Sin}\,\angle(b,c)/\,\text{Sin}\,\angle(b,d)}. \end{aligned}$$

Q.E.F.

Définition 1.
Soient A, B, C, D, M cinq points cocycliques. Le birapport $[(MA),(MB),(MC),(MD)]$ est appelé le **birapport circulaire de A, B, C, D par rapport à M**.

Proposition 1.
Soient A, B, C, D quatre points cocycliques. Le birapport circulaire de A, B, C, D par rapport à M a la même valeur quel que soit le point M sur le cercle $ABCD$.

Soient M est N deux points sur le cercle $ABCD$.



Les angles inscrits $\angle AMB$ et $\angle ANB$ interceptent tous les deux l'arc AB ;
$\therefore \angle((MA),(MB)) = \angle((NA),(NB))$;
de même, $\angle((MB),(MC)) = \angle((NB),(NC))$ et $\angle((MC),(MD)) = \angle((NC),(ND))$;
$\therefore [(MA),(MB),(MC),(MD)] = [(NA),(NB),(NC),(ND)]$.

C.Q.F.D.

Proposition 2.
Si A, B, C, D sont quatre points alignés,

$$[C,D,A,B] = [A,B,C,D].$$
$$[B,A,C,D] = \frac{1}{[A,B,C,D]}.$$
$$[A,B,D,C] = \quad \textit{idem}.$$

Corollaire de la Prop. 2
Le birapport de quatre points alignés ne change pas si l'on permute ces points deux à deux.

Proposition 3.
Si A, B, C, D sont quatre points alignés,

$$[A,B,C,D] + [A,C,B,D] = 1.$$

Proposition 4.
Soient A, B, C, D quatre points alignés. En permutant ces points de toutes les manières possibles, on ne forme au maximum que 6 birapports différents. Et si l'un de ces birapports égale b, les autres égalent :

$$\frac{1}{b}, \quad 1-b, \quad \frac{1}{1-b}, \quad 1-\frac{1}{b}, \quad \text{et} \quad \frac{b}{b-1}.$$

Soit W, X, Y, Z une permutation de A, B, C, D. Il est évident que l'ensemble des permutations de A, B, C, D égale l'ensemble des permutations de W, X, Y, Z.

Toute permutation de A, B, C, D est :

(1) soit de la forme W, - ,- ,-

(2) soit d'une autre forme ; dans ce cas échangeons W et le premier point, de façon à amener W à la première position. Échangeons ensuite les deux autres points : nous obtenons une permutation de la forme W, - ,- ,- , dont le birapport est égal à celui de la permutation de départ.

$\therefore$ les birapports obtenus en permutant A, B, C, D ont les mêmes valeurs que ceux obtenus en mettant W à la première position, et en permutant seulement X, Y, Z.

Or il n'y a que 6 façons de permuter X, Y, Z.

$\therefore$ il ne peut y avoir que 6 birapports différents, nommément :

$[W, X, Y, Z], [W, X, Z, Y], [W, Y, X, Z], [W, Y, Z, X], [W, Z, X, Y], [W, Z, Y, X]$.

Et si le premier de ces birapports égale b :

- le 2ᵉ égale $\frac{1}{b}$, car $[W, X, Z, Y] = \frac{1}{[W, X, Y, Z]}$;
- le 3ᵉ égale $1 - b$, car $[W, Y, X, Z] = 1 - [W, X, Y, Z]$;
- le 4ᵉ égale $\frac{1}{1-b}$, car $[W, Y, Z, X] = \frac{1}{[W, Y, X, Z]}$;
- le 5ᵉ égale $1 - \frac{1}{b}$, car $[W, Z, X, Y] = 1 - [W, X, Z, Y]$;
- et le dernier égale $\frac{b}{b-1}$, car $[W, Z, Y, X] = \frac{1}{[W, Z, X, Y]}$.

C.Q.F.D.

Problème 2.

Trouver les valeurs de b telles que ces 6 birapports ne soient pas tous différents.

Si l'un des 6 birapports égale b, les autres égalent :

$$\frac{1}{b}, \quad 1 - b, \quad \frac{1}{1-b}, \quad 1 - \frac{1}{b}, \quad \text{et} \quad \frac{b}{b-1};$$

$\therefore$ pour qu'au moins deux des birapports soient égaux, il faut et il suffit que l'une des égalités suivantes soit vraie :

$$b = \frac{1}{b}, \quad b = 1 - b, \quad b = \frac{1}{1-b}, \quad b = 1 - \frac{1}{b}, \quad b = \frac{b}{b-1}.$$

Supposons qu'en assignant à b une certaine valeur k, une de ces égalités soit satisfaite ; appelons l, m, n, p les valeurs prises par les seconds membres des quatre autres égalités. Si nous assignons ensuite à b une de ces quatre valeurs, disons l, alors une des égalités sera évidemment satisfaite, et les seconds membres des quatre autres égalités vaudront k, m, n, p.

Cette étude étant terminée, résolvons le problème :

Les solutions de l'équation $b = \frac{1}{b}$ sont $b = -1$, $b = 1$;

si $b = 1$, les seconds membres des quatre égalités restantes valent 0, ∞, 0, ∞ ;

$\therefore$ si une des valeurs 0, 1, ∞ est assignée à b, deux birapports vaudront 0, deux birapports vaudront 1, et les deux birapports restants vaudront ∞ ;

si $b = -1$, les seconds membres des quatre égalités restantes valent 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$;

$\therefore$ si une des valeurs -1, $\frac{1}{2}$, 2 est assignée à b, deux birapports vaudront -1, deux birapports vaudront $\frac{1}{2}$, et les deux birapports restants vaudront 2.

La solution de l'équation $b = 1 - b$ est $b = \frac{1}{2}$; cette valeur a déjà été trouvée.

Les solutions de l'équation $b = \dfrac{1}{1-b}$ sont $b = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$;

si $b = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, les seconds membres des quatre égalités restantes valent $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$;

$\therefore$ si une des valeurs $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ est assignée à b, trois birapports vaudront $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, et les trois birapports restants vaudront $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions de l'équation $b = 1 - \dfrac{1}{b}$ sont $b = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; ces valeurs ont déjà été trouvées.

Les solutions de l'équation $b = \dfrac{b}{b-1}$ sont $b = 0$, $b = 2$; ces valeurs ont déjà été trouvées.

Finalement, les valeurs à donner à b pour que certains des 6 birapports soient égaux sont :

$$b = \frac{1}{2}, 2 \text{ ou } -1$$
$$b = 1, 0 \text{ ou } \infty$$
$$b = -j \text{ ou } -j^2$$

Q.E.F.

Les birapports $\frac{1}{2}$, 2 et -1 sont ceux, par exemple, de quatre points tels qu'un soit au milieu de deux autres, et que le quatrième soit à l'infini. Les birapports 1, 0 et ∞ sont ceux, par exemple, de quatre points tels que deux soient confondus, et qu'un des deux autres soit à l'infini. Les birapports complexes $-j$ et $-j^2$, sont ceux, par exemple, de quatre points du plan complexe tels que trois forment un triangle équilatéral, et que le quatrième soit à l'infini (en fait, nous n'avons pas donné de définition du birapport de quatre points complexes, mais elle se devine très bien).

CHAPITRE 4.

ESPACES PROJECTIFS ET TRANSFORMATIONS PROJECTIVES.

Le problème de la construction géométrique des espaces projectifs est qu'elle nous oblige à distinguer les points ordinaires des points à l'infini. Pour éviter ce problème, il faut faire comme si le plan-image n'existait pas, et considérer uniquement les droites centrales qui contiennent les points à projeter.
Ceci suggère une construction algébrique des espaces projectifs qui ne permet pas de distinguer les éléments ordinaires de ceux à l'infini. Nous pourrons alors choisir arbitrairement les points qui représentent l'infini, soit en fixant l'hyperplan qui doit les contenir, soit, ce qui revient au même, en donnant l'équation de cet hyperplan (c'est ce que nous ferons dans le chapitre suivant).

*
*   *
*

Convention 1.
Quand, dans ce chapitre, il sera question d'un vecteur de E ou d'un scalaire, qu'il soit compris que ce vecteur ou ce scalaire est non-nul, à moins que le contraire soit indiqué.

N.B. cette convention ne s'applique qu'à ce chapitre.

Définition 1.
La droite vectorielle engendrée par un vecteur est appelée sa **droite vectorielle associée**.

Définition 2.
L'ensemble des droites (vectorielles) d'un espace vectoriel est appelé son **espace projectif associé.**

Convention 2.
Si x est un vecteur, convenons de représenter sa droite vectorielle associée par le symbole $\overline{|x}$.

Convention 3.
Si E est un espace vectoriel, convenons de représenter son espace projectif associé par le symbole $\overline{|E}$.

Définition 3.
Si E est un espace vectoriel de dimension n, la **dimension de son espace projectif associé** est $n-1$.

Définition 4.
Si E est un espace vectoriel, et que F soit un sous-espace vectoriel de E, $\overline{|F}$ est appelé une **variété linéaire projective** de $\overline{|E}$.

Définition 5.
Un espace projectif est appelé :

plan projectif	si sa dimension	=	2 ;
droite projective	" " "	=	1 ;
point projectif	" " "	=	0.

Proposition 1.
Si f est une transformation linéaire injective, $\overline{|f}(\overline{|x}) =^{(\text{déf})} \overline{|f(x)}$ définit bien une fonction univoque.

Il faut vérifier que $\overline{|f}(\overline{|x})$ a la même valeur quel que soit l'antécédent de $\overline{|x}$ par $\overline{|}$.

Soient x et y deux vecteurs tels que $\overline{|x} = \overline{|y}$, alors $ax = by$ (où a et b sont deux scalaires à déterminer),

$\therefore f(ax) = f(by)$

Comme f est une transformation linéaire, $f(ax) = a \cdot f(x)$ et $f(by) = b \cdot f(y)$,

$\therefore a \cdot f(x) = b \cdot f(y)$

$\therefore \overline{|a \cdot f(x)} = \overline{|b \cdot f(y)}$

Or $\overline{|a \cdot f(x)} = \overline{|f(x)}$ et $\overline{|b \cdot f(y)} = \overline{|f(y)}$,

$\therefore \overline{|f(x)} = \overline{|f(y)}$.

C.Q.F.D.

DÉFINITION 6.
Si f est une transformation linéaire injective, $\overline{|f}$ (comme définie dans le théorème précédent) est appelée la **transformation projective associée à f.**

CONVENTION 4.
À partir de maintenant, lorsqu'il sera question d'une transformation linéaire, qu'il soit compris qu'elle est injective (à moins que le contraire soit indiqué).

PROPOSITION 2.
Si f est une transformation linéaire, et que $\overline{|f}$ soit sa transformation projective associée, toutes les transformations de la forme af (avec $a \neq 0$) ont également $\overline{|f}$ pour transformation projective associée.

Soit x un vecteur quelconque,

$$\begin{aligned}\overline{|af}(\overline{|x}) &= \overline{|(af)(x)} \\ &= \overline{|a \cdot f(x)} \\ &= \overline{|f(x)} \\ &= \overline{|f}(\overline{|x})\end{aligned}$$

$\therefore \overline{|af} = \overline{|f}$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.
Si f est une transformation linéaire inconnue, que $\overline{|f}$ soit sa transformation projective associée, et que $(e_1, \ldots\ldots, e_n)$ soit une base de E : la donnée de $\overline{|f}(\overline{|e_1}), \ldots\ldots, \overline{|f}(\overline{|e_n})$ ne suffit pas pour déterminer $\overline{|f}$.

Ce théorème est une proposition particulière négative, nous pouvons donc le prouver en énonçant un exemple.

Tout d'abord, nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME DE SCHUR.

Trouver l'ensemble des transormations linéaires qui fixent chaque droite vectorielle.

Soit g une transformation qui fixe chaque droite vectorielle de E, et soient x, y deux vecteurs d'une base de E.

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= ax \\ g(y) &= by \\ g(x+y) &= c(x+y) \end{aligned}\right\} \text{où } a,\ b,\ c \text{ sont des scalaires à déterminer.}$$

Comme g est une transformation linéaire, $g(x+y) = g(x) + g(y)$

$\therefore c(x+y) = ax + by$, c.-à-d. $cx + cy = ax + by$

x et y étant des vecteurs d'une base de E, $c = a$ et $c = b$, $\therefore a = b$;

$\therefore g$ multiplie tous les vecteurs d'une base de E par un même scalaire a ;

$\therefore g$ est une homothétie.

Ainsi l'ensemble recherché est inclus dans l'ensemble des homothéties.

Remarquons maintenant que l'ensemble des homothéties est inclus dans l'ensemble recherché.

$\therefore$ l'ensemble des transformations linéaires qui fixent chaque droite vectorielle est l'ensemble des homothéties.

Q.E.F.

Soit f une transformation linéaire inconnue. On nous donne seulement :
$\overline{|f}(\overline{|e_1}) = \overline{|e_1}, \ldots\ldots, \overline{|f}(\overline{|e_n}) = \overline{|e_n}$.

Nous pouvons déjà affirmer que $f(e_1) = \alpha e_1, \ldots\ldots, f(e_n) = \omega e_n$, où $\alpha, \ldots\ldots, \omega$ sont des scalaires à déterminer. Réciproquement, pour tout choix de ces scalaires, ces relations sont susceptibles d'être satisfaites par f.

$\therefore$ la matrice de f dans la base $(e_1, \ldots\ldots, e_n)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

Réciproquement, toute matrice de cette forme, où $\alpha, \ldots\ldots, \omega$ sont des scalaires, est susceptible de représenter f.

Si $\alpha = \ldots\ldots = \omega$, et que ces scalaires soient non-nuls, alors f est une homothétie, dans ce cas, d'après le lemme, elle fixe toute droite vectorielle, $\therefore \overline{|f} = Id_{\overline{|E}}$

sinon, f n'est pas une homothétie, dans ce cas, d'après le lemme, elle ne fixe pas toute droite vectorielle, $\therefore \overline{|f} \neq Id_{\overline{|E}}$

Nous avons montré, dans cet exemple, que la donnée de $\overline{|f}(\overline{|e_1}), \ldots\ldots, \overline{|f}(\overline{|e_n})$ peut ne pas suffire pour déterminer $\overline{|f}$.

C.Q.F.D.

Proposition 4.

Si f est une transformation linéaire inconnue, que $\overline{|f}$ soit sa transformation projective associée, et que $(e_1, \ldots\ldots, e_n)$ soit une base de E : la donnée de $\overline{|f}(\overline{|e_1}), \ldots\ldots, \overline{|f}(\overline{|e_n})$ et de $\overline{|f}(\overline{|e_1 + \ldots\ldots + e_n})$ suffit pour déterminer $\overline{|f}$.

Notons Σ la somme $e_1 + \ldots\ldots + e_n$, et $\overline{|\Sigma}$ sa droite vectorielle associée.

Soit f une transformation linéaire inconnue. On nous donne seulement :
$\overline{|f}(\overline{|e_1}) = \overline{|f_1}, \ldots\ldots, \overline{|f}(\overline{|e_n}) = \overline{|f_n}$ et $\overline{|f}(\overline{|\Sigma}) = \overline{|\Theta}$.

Les premières relations montrent que $f(e_1) = \alpha f_1, \ldots\ldots, f(e_n) = \omega f_n$, où $\alpha, \ldots\ldots, \omega$ sont des scalaires à déterminer. La dernière relation montre que $f(\Sigma) = k\Theta$, où k est un autre scalaire à déterminer.

$\therefore$ la matrice de f dans la base $(e_1, \ldots\ldots, e_n)$ est

$$\begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

où M est la matrice formée des vecteurs-coordonnées de $f_1 \ldots\ldots f_n$ exprimés dans la base $(e_1, \ldots\ldots, e_n)$.

L'égalité $f(\Sigma) = k\Theta$ peut s'écrire comme une égalité de vecteurs :

$$\begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \\ \Theta \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ceci peut se simplifier :

$$\begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \omega \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \\ \Theta \\ \\ \end{pmatrix}$$

f est une transformation linéaire injective, $\therefore \det f \neq 0$;

$\therefore \det M$, en tant que facteur de $\det f$, est $\neq 0$;

$\therefore$ la matrice M est inversible, nous pouvons alors écrire :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \omega \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \\ \Theta \\ \\ \end{pmatrix}$$

Une fois effectué le produit de M^{-1} par le vecteur-coordonnées de Θ, il reste :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \omega \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, les scalaires $\alpha, \ldots\ldots, \omega$ sont déterminés, à un facteur k près ;

$\therefore$ la transformation f est elle aussi déterminée, à ce facteur k près ;

$\therefore$ la transformation projective $\overline{|f}$ est entièrement déterminée par les données.

C.Q.F.D.

CHAPITRE 5.

COORDONNÉES HOMOGÈNES ET TRILINÉAIRES.

§1. Coordonnées homogènes.

(Première construction.)

CONVENTION 1.
Choisissons un repère $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan-image. Quand les coordonnées cartésiennes d'un point seront données sans qu'un repère soit précisé, qu'il soit compris que ces coordonnées sont exprimées dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{O\Omega})$.

PROPOSITION 1.
Soit $A(x, y, z)$ un point de l'espace distinct de O. Les points de (OA) sont ceux qui ont pour coordonnées cartésiennes (kx, ky, kz) avec $k \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 2.
Soit $A(x, y, z)$ un point de l'espace, de coordonnée z non-nulle. Sa projection conique a pour coordonnées cartésiennes $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$.

Soit M le point de coordonnées cartésiennes $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$.
$(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1) = (kx, ky, kz)$ avec $k = \frac{1}{z}$, $\therefore M \in (OA)$.
De plus, la troisième coordonnée de M est 1, $\therefore M \in$ plan-image.
$\therefore M$ est dans l'intersection de (OA) avec le plan-image, c.-à-d. que M est la projection conique de A.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.
Soit P un point du plan-image, distinct de Ω, et dont les coordonnées cartésiennes dans $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont (x, y), et soit D la droite centrale parallèle à (ΩP). Les points de D ont pour coordonnées cartésiennes $(x, y, 0)$.

DÉFINITION 1.
Étant donné un point P du plan-image, on appelle **coordonnées homogènes** de ce point les coordonnées cartésiennes de tout point de (OP) autre que O.

CONVENTION 2.
Les coordonnées homogènes de la forme $(x, y, 0)$, autres que $(0, 0, 0)$, seront considérées commes des coordonnées d'un point à l'infini : celui de la droite centrale passant par $(x, y, 0)$ (c'est aussi, plus généralement, celui de toutes les droites parallèles à celle-là).

PROPOSITION 4.
Soit une droite du plan-image, et d'équation $ax + by + c = 0$ dans $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Son équation en coordonnées homogènes est $ax + by + cz = 0$.

CONVENTION 3.
$z = 0$ sera considérée comme l'équation, en coordonnées homogènes, d'une droite à l'infini : celle du plan-image (c'est aussi, plus généralement, celle de tous les plans parallèles à celui-là).

(Deuxième construction.)

Donnons maintenant la définition algébrique des coordonnées homogènes dans le plan projectif :

DÉFINITION 2.
Soient B une base de E, et v un vecteur non-nul de E. On appelle **coordonnées homogènes du point projectif** $\overline{|v}$ les composantes de v dans B.

La construction algébrique du plan projectif est intéresante car jusqu'à présent, nous n'avons pas distingué les points ordinaires des points à l'infini. En fait, comme les points projectifs sont tous de la même nature, il n'y a aucune raison de choisir une droite projective plutôt qu'une autre pour représenter l'infini. La définition suivante est donc arbitraire, et nous la choisissons seulement parce qu'elle rappelle les deux dernières conventions :

DÉFINITION 3.
Choisissons une base B de E. Les points projectifs de $\overline{|E}$ dont les coordonnées homogènes dans B sont de la forme $(x, y, 0)$ (où x et y sont deux scalaires) sont appelés des **points à l'infini.** La droite projective formée par ces points est appelée la **droite de l'infini.**

§2. Coordonnées barycentriques.

Si l'on choisit trois non-alignés dans un plan affine, tout point de ce plan peut considéré vu comme un barycentre des trois premiers points, affectés de masse convenables dont la somme ne doit pas être nulle : c'est ainsi que l'on repère les points dans le système des coordonnées barycentriques. Ce système peut encore être utilisé pour repérer les points d'un plan projectif, à condition d'attribuer des coordonnées aux points à l'infini : ce seront précisemment les coordonnées dont la somme est nulle.

PROPOSITION 5.
Soient trois points A, B, C, et trois nombres réels a, b, c tels que $a+b+c \neq 0$. Il existe un unique point M tel que $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$, et ce point est coplanaire avec A, B, C.

(Analyse.)
Si un tel point M existe,

$$a\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC};$$
$$\therefore (a+b+c)\overrightarrow{AM} = b(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + c(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC});$$
$$\therefore \overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}.$$

(Synthèse.)
Comme les points A, B, C sont connus, et que $a+b+c \neq 0$, cette dernière relation définit un unique point M, et montre qu'il est coplanaire avec A, B, C.

Enfin, si un point M vérifie cette relation, alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC};\\
(a+b+c)\overrightarrow{AM} &= b(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}) + c(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC});\\
\therefore\ a\overrightarrow{AM} &= b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC};\\
\therefore\ a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Définition 4.
Le point M défini dans le théorème précédent est appelé le **barycentre des points A, B, C affectés des masses respectives a, b, c.**

Convention 4.
Soient trois points A, B, C, et trois nombres réels a, b, c tels que $a+b+c \neq 0$. Convenons de représenter le barycentre des points A, B, C affectés des masses respectives a, b, c par le symbole $\mathrm{Bary}(A,a)(B,b)(C,c)$.

Proposition 6.
Si A, B, C sont trois points non-alignés, tout point du plan (ABC) peut être considéré comme un barycentre des points A, B, C affectés de masses convenables.

A, B, C ne sont pas alignés, $\therefore$ les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont indépendants et engendrent tous les vecteurs du plan (ABC).

Si M est un point du plan (ABC), le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est aussi dans ce plan,
$\therefore$ il existe deux nombres réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$;
$\therefore \overrightarrow{AM} = \lambda(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}) + \mu(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$;
$\therefore (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB} + \mu\overrightarrow{MC}$;
$\therefore (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} + \mu\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire :
$M = \mathrm{Bary}(A, 1-\lambda-\mu)(B,\lambda)(C,\mu)$.

C.Q.F.D.

DÉFINITION 5.
Choisissons un triangle $\triangle ABC$ du plan-image ; nous l'appellerons le **triangle de référence.**

Si M est un point du plan de projection, on appelle **coordonnées barycentriques** de ce point tout triplet de nombres (a, b, c) tels que $M = \text{Bary}(A, a)(B, b)(C, c)$.

PROBLÈME 1.
Trouver les relations entre les coordonnées homogènes d'un point et ses coordonnées barycentriques, lorsque le triangle de référence des coordonnées barycentriques coïncide avec le triangle formé par le point Ω et les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ du repère des coordonnées homogènes.

Soit M un point du plan de projection, situé à distance finie des points A, B, C ; soient (X, Y, Z) un triplet de coordonnées homogènes de M, et (a, b, c) un triplet de coordonnées barycentriques de M.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{X}{Z}\vec{\imath} + \frac{Y}{Z}\vec{\jmath} = \frac{X}{Z}\overrightarrow{AB} + \frac{Y}{Z}\overrightarrow{AC} = \frac{X}{Z}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + \frac{Y}{Z}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC});$$

$$\therefore (1 - \frac{X}{Z} - \frac{Y}{Z})\overrightarrow{AM} = \frac{X}{Z}\overrightarrow{MB} + \frac{Y}{Z}\overrightarrow{MC};$$
$$\therefore (1 - \frac{X}{Z} - \frac{Y}{Z})\overrightarrow{MA} + \frac{X}{Z}\overrightarrow{MB} + \frac{Y}{Z}\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}.$$

Cette dernière relation nous montre que $M = \text{Bary}(A, 1 - \frac{X}{Z} - \frac{Y}{Z})(B, \frac{X}{Z})(C, \frac{Y}{Z})$;
or $M = \text{Bary}(A, a)(B, b)(C, c)$;

$$\therefore \begin{cases} a = k(1 - \dfrac{X}{Z} - \dfrac{Y}{Z}) \\ b = k\dfrac{X}{Z} \\ c = k\dfrac{Y}{Z} \end{cases} \quad \text{avec } Z, k \neq 0. \qquad (*)$$

(Discussion.)
Nous pouvons réécrire le précédent système de relations de la manière suivante :

$$\begin{cases} a = \kappa(Z - X - Y) \\ b = \kappa X \\ c = \kappa Y \end{cases} \quad \text{avec } \kappa = \frac{k}{Z} \neq 0. \qquad (\dagger)$$

Si M est un point à l'infini, sa troisième coordonnée Z est 0 ; les coordonnées barycentriques a, b, c telles qu'elles sont définies dans $(*)$ sont indéterminées ; mais, si nous considérons $(\dagger)$, ces coordonnées sont parfaitement déterminées :
$a = \kappa(-X - Y)$, $\quad b = \kappa X$, $\quad c = \kappa Y$ (avec $\kappa \neq 0$).

§3. Coordonnées trilinéaires.

C'est un fait bien connu que si un point est à l'intérieur d'un triangle équilatéral, la somme de ses distances aux côtés du triangle égale l'aire de ce triangle ; et si les distances considérées sont algébriques (c'est-à-dire si on leur permet de changer de signe quand le point change de côté), cette égalité devient valable pour tous les points du plan. Nous allons définir un système de coordonnées en utilisant un triangle quelconque comme référence, et dans lequel la somme des trois coordonnées est la même pour tous les points du plan.

Définition 6.
Choisissons un triangle $\triangle ABC$ du plan-image ; nous l'appellerons le **triangle de référence.**

Si M est un point du plan de projection, et que :

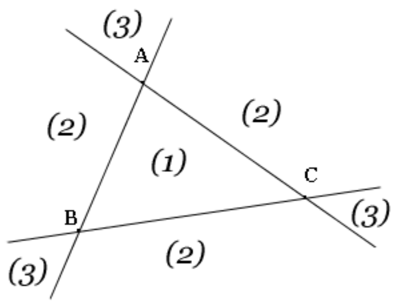
- α désigne le produit la distance de M à la droite (BC) par la longueur du côté BC, le tout affecté du signe $+$ ou $-$ selon que M se trouve, ou non, du même côté de (BC) que le triangle de référence ;

- β désigne le produit la distance de M à la droite (AC) par la longueur du côté AC, le tout affecté du signe $+$ ou $-$ selon que M se trouve, ou non, du même côté de (AC) que le triangle de référence ;

- γ désigne, *etc...*

alors : les nombres α, β, γ sont appelés des **coordonnées trilinéaires de M.**

Proposition 7.
La somme des coordonnées trilinéaires est constante, et vaut l'aire du triangle de référence.



Le triangle de référence $\triangle ABC$ partage le plan en sept zones. Choisissons arbitrairement un point M du plan ; l'un des événements suivants est réalisé :

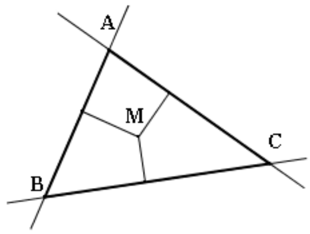
(1) M est à l'intérieur du triangle de référence ;

(2) M est du même côté de deux droites du triangle de référence que ce dernier ;

(3) M est du côté opposé au triangle de référence par rapport à deux droites de ce dernier.

(Remarque : deux événements sont simultanément réalisés lorsque M est sur une droite du triangle de référence, et les trois événements sont simultanément réalisés lorsque M est un des sommet du triangle de référence).

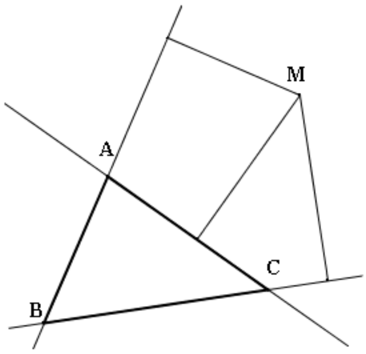
Appelons h_A, h_B, h_C les distances respectives de M aux droites (BC), (AC), (AB).



(1) Si M est à l'intérieur du triangle de référence :

$$\alpha = +h_A \cdot |BC| = \text{Aire}\,\triangle BMC;$$
$$\beta = +h_B \cdot |AC| = \text{Aire}\,\triangle AMC;$$
$$\gamma = +h_C \cdot |AB| = \text{Aire}\,\triangle AMB;$$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \text{Aire}\,\triangle BMC + \text{Aire}\,\triangle AMC + \text{Aire}\,\triangle AMB = \text{Aire}\,\triangle ABC.$

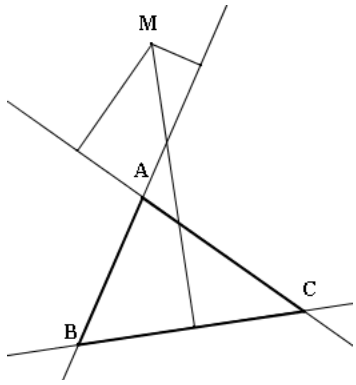


(2) Si M est du même côté de (AB) et (BC) que le triangle de référence :

$$\alpha = +h_A \cdot |BC| = \text{Aire}\,\triangle BMC;$$
$$\beta = -h_B \cdot |AC| = -\,\text{Aire}\,\triangle AMC;$$
$$\gamma = +h_C \cdot |AB| = \text{Aire}\,\triangle AMB;$$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = -\,\text{Aire}\,\triangle BMC + \text{Aire}\,\triangle AMB - \text{Aire}\,\triangle AMC = \text{Aire}\,\triangle ABC.$

Par permutation de A, B, C, ce résultat reste vrai si M se trouve dans l'une des deux autres zones numérotées (2).



(3) Si M est du côté opposé au triangle de référence par rapport à (AB) et (AC) :

$$\begin{aligned}\alpha &= +h_A \cdot |BC| = \text{Aire}\,\triangle BMC;\\ \beta &= -h_B \cdot |AC| = -\,\text{Aire}\,\triangle AMC;\\ \gamma &= -h_C \cdot |AB| = -\,\text{Aire}\,\triangle AMB;\end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha + \beta + \gamma = \text{Aire}\,\triangle BMC - \text{Aire}\,\triangle AMC - \text{Aire}\,\triangle AMB = \text{Aire}\,\triangle ABC.$

Par permutation de A, B, C, ce résultat reste vrai si M se trouve dans l'une des deux autres zones numérotées (3).

Dans tous les cas, $\alpha + \beta + \gamma = \text{Aire}\,\triangle ABC$.

C.Q.F.D.

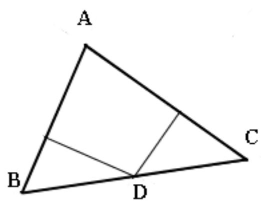
Problème 2.

Trouver :

(1) les coordonnées trilinéaires des milieux des côtés du triangle de référence ;

(2) les équations des parallèles aux côtés de ce triangle.

(1) Soit D le milieu de BC. Appelons h_b, h_c les distances respectives de D aux droites (AC), (AB) ; et appelons h la distance de A à la droite (BC).



Comme D est à l'intérieur du traingle de référence,

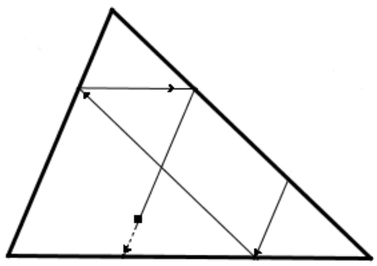
$$\alpha = 0;$$
$$\beta = +h_B \cdot |AC| = \text{Aire}\,\triangle ADC;$$
$$\gamma = +h_C \cdot |AB| = \text{Aire}\,\triangle ADB;$$

or Aire $\triangle ADC = \frac{1}{2}|DC|h = \frac{1}{4}|BC|h$
et Aire $\triangle ADB = \frac{1}{2}|DB|h = \frac{1}{4}|BC|h$;
$\therefore \beta = \gamma = \frac{1}{2}$ Aire $\triangle ABC$.
$\therefore$ les coordonnées trilinéaires du milieu de BC sont $(0, \frac{1}{2}$ Aire $\triangle ABC, \frac{1}{2}$ Aire $\triangle ABC)$.
Par permutation de A, B, C,
les coordonnées trilinéaires du milieu de AB sont $(\frac{1}{2}$ Aire $\triangle ABC, \frac{1}{2}$ Aire $\triangle ABC, 0)$;
celles du milieu de AC sont $(\frac{1}{2}$ Aire $\triangle ABC, 0, \frac{1}{2}$ Aire $\triangle ABC)$.

(2) Une droite est parallèle à AB si et seulement si tous ses points sont à la même distance de (AB) ;
$\therefore$ l'équation d'une parallèle à AB est de la forme $\gamma =$ une constante ;
de même, les équations des parallèles à BC sont de la forme $\alpha =$ une constante ;
celles des parallèles à AC sont de la forme $\beta =$ une constante.

Q.E.F.

Problème 3.



Une bille parcourt un billard triangulaire : elle roule du premier bord au deuxième, parallèlement au troisième, puis rebondit et roule jusqu'au troisième bord, parallèlement au premier, et ainsi de suite. La bille finit-elle par revenir à sa position initiale ?

Choisissons le cadre du billard comme triangle de référence, et nommons ses sommets A, B, C de telle sorte que BC soit le premier côté du billard, AC le deuxième, et AB le troisième.

Au premier instant, la bille se trouve sur le côté BC ; $\therefore$ sa première coordonnée $= 0$; appelons $(0, b, c)$ les coordonnées de la bille à cet instant.

Puis la bille rejoint le côté AC, parallèlement à AB. Au moment du rebond : la troisième coordonnée de la bille n'a pas changé (car le déplacement s'est fait sur une $\parallel$ à AB) ; la deuxième coordonnée $= 0$ (car à ce moment la bille est sur (AC)) ; la première coordonnée $= c$ (car la somme des trois coordonnées reste constante, et vaut $a + b$).

Les coordonnées de la bille à cet instant sont $(b, 0, c)$.

Plus généralement : si la balle roule du m^{e} bord du billard au n^{e}, parallèlement au p^{e}, sa m^{e} coordonneé est permutée avec la n^{e}, alors que la p^{e} ne change pas.

Ainsi :

(1) Au premier instant, les coordonnées de la bille sont : $(0, b, c)$;

(2)	au	premier	rebond	(sur	le	2$^{\mathrm{e}}$	côté) :	$(b, 0, c)$;
(3)	"	2$^{\mathrm{e}}$	"	("	"	3$^{\mathrm{e}}$	") :	$(b, c, 0)$;
(4)	"	3$^{\mathrm{e}}$	"	("	"	1$^{\mathrm{er}}$	") :	$(0, c, b)$;
(5)	"	4$^{\mathrm{e}}$	"	("	"	2$^{\mathrm{e}}$	") :	$(c, 0, b)$;
(6)	"	5$^{\mathrm{e}}$	"	("	"	3$^{\mathrm{e}}$	") :	$(c, b, 0)$;
(7)	"	6$^{\mathrm{e}}$	"	("	"	1$^{\mathrm{er}}$	") :	$(0, b, c)$;

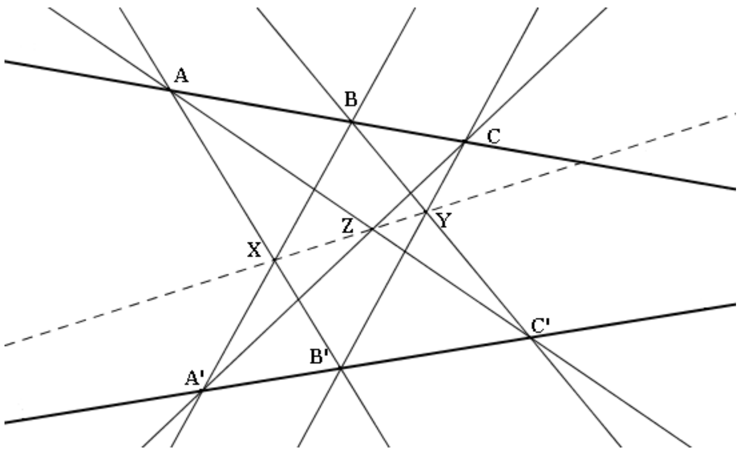
$\therefore$ la bille revient à sa position initiale au bout de six rebonds, et au bout de trois seulement si $b = c$, c'est-à-dire si la bille part du milieu de BC.

Q.E.F.

CHAPITRE 6.

LES THÉORÈMES DE PAPPUS ET DESARGUES.

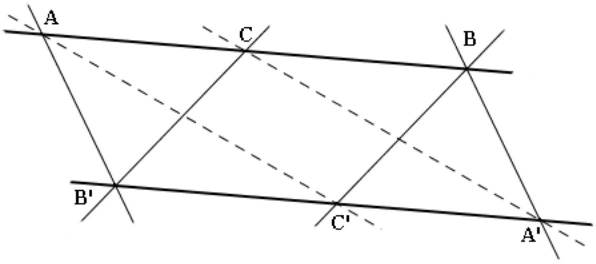
Proposition 1.
(Théorème de Pappus.)



Soient d et d' deux droites distinctes, et O leur point d'intersection (éventuellement à l'infini). Si A, B, C sont trois points distincts de d, tous différents de O, que A', B', C' soient trois points distincts de d', tous différents de O, et que X, Y, Z désignent les intersections respectives des droites (AB') et (BA'), (BC') et (CB'), (AC') et (CA') : alors X, Y et Z sont alignés.

Il existe une transformation projective qui envoie les points X et Y à l'infini. Comme l'alignement est une propriété projective, il n'est pas altéré par cette transformation : nous pouvons donc raisonner en considérant que X et Y sont à l'infini, c'est-à-dire que $(AB') \parallel (BA')$ et $(BC') \parallel (CB')$.

De deux choses l'une :

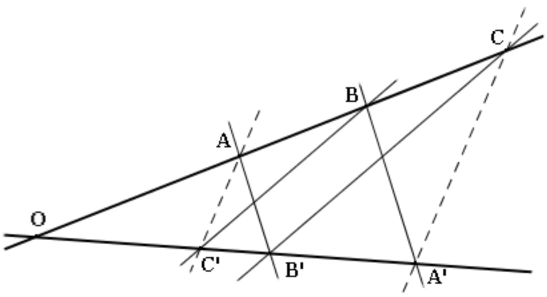


(1) soit $(AB) \parallel (A'B')$, dans ce cas $ABA'B'$ et $BCB'C'$ sont des parallélogrammes ;

$\therefore BC = B'C'$, $AB' = A'B$ et $\angle AB'C' = \angle A'BC$;

$\therefore \triangle AB'C'$ et $\triangle A'BC$ sont égaux (2ecas d'égalité des triangles), et leurs côtés AC' et $A'C$ satisfont également le cas d'égalité ;

$\therefore (AC') \parallel (A'C)$;



(2) soit (AB) et $(A'B')$ se rencontrent en un point O, dans ce cas, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{OA}{OB} \quad \text{et} \quad \frac{OB'}{OC'} = \frac{OC}{OB}$$

en faisant le rapport membre à membre de ces deux égalités, on obtient

$$\frac{OC'}{OA'} = \frac{OA}{OC}$$

$\therefore (AC') \parallel (A'C)$.

Dans tous les cas, $(AC') \parallel (A'C)$;

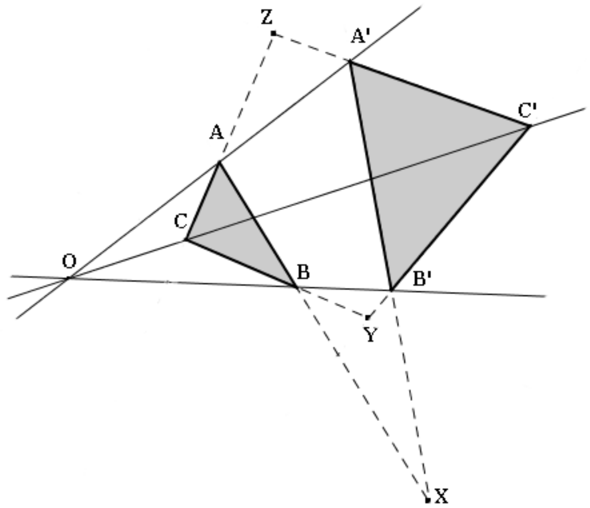
$\therefore Z$ est un point à l'infini ;

comme X et Y sont aussi des points à l'infini, X, Y et Z sont alignés.

C.Q.F.D.

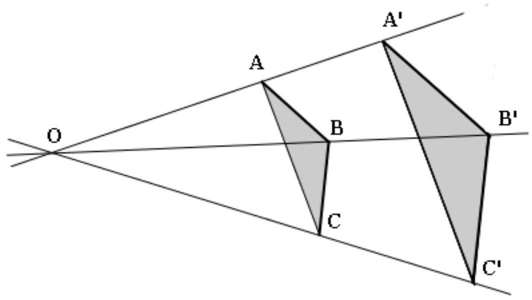
Remarque : si V désigne un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps $\mathbb{K}$, alors, pour que le théorème de Pappus soit vrai dans le plan projectif $\overline{|V}$, il faut et il suffit que $\mathbb{K}$ soit commutatif. Autrement dit : le théorème de Pappus est un test (nécessaire et suffisant) de la commutativité d'un corps.

PROPOSITION 2.
(Théorème de Desargues.)



Soient $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ deux triangles sans sommets communs. Si les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en un point O, et que X, Y, Z désignent les intersections respectives de (AB) et $(A'B')$, (BC) et $(B'C')$, (CA) et $(C'A')$: alors X, Y et Z sont alignés.

Il existe une transformation projective qui envoie les points X et Y à l'infini ; nous pouvons donc raisonner en considérant que X et Y sont à l'infini, c'est-à-dire que $(AB) \parallel (A'B')$ et $(BC) \parallel (B'C')$.



D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{OC'} = \frac{OB}{OB'}$$

$\therefore \dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OC}{OC'}$;
$\therefore (AC) \parallel (A'C')$, c.-à-d. que Z est un point à l'infini ;
comme X et Y sont aussi des points à l'infini, X, Y et Z sont alignés.

C.Q.F.D.

CHAPITRE 7.

LE PRINCIPE DE DUALITÉ.

En géométrie projective, il existe un principe que l'on appelle "le principe de dualité". *« Grâce à ce principe, pour ainsi dire magique, il est possible de trouver des théorèmes de géométrie nouveaux par des changements de dénomination, ou, plus exactement, par des permutations de concepts. Il suffit d'échanger les concepts de "couper" et de "réunir", d'une part, et, ceux de "point" et de "droite", d'autre part. »* * . Un raisonnement algébrique permet de justifier le principe de dualité, et même d'en obtenir une expression générale.

*

*   *

*

§1. Expression générale du principe de dualité.

DÉFINITION 1.
Une fonction linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée une **forme linéaire**.

DÉFINITION 2.
La fonction qui, à tout couple (ω, x), où ω est une forme linéaire et x un vecteur, associe le scalaire $\omega(x)$ est appelée la **fonction d'évaluation.**

CONVENTION 1.
Convenons de représenter la fonction d'évaluation par le symbole Φ.

$*$ Egmont Colerus, "De Pythagore à Hilbert", p. 210.

PROPOSITION 1.
L'ensemble des formes linéaires sur E, muni des lois naturelles d'addition des applications linéaires et de multiplication des applications linéaires par des scalaires, est un espace vectoriel de même dimension que E.

CONVENTION 2.
Convenons de représenter l'espace des formes linéaires sur E par le symbole $E^\star$.

PROPOSITION 2.
La fonction d'évaluation est bilinéaire.

Soient ω, ρ deux formes linéaires, x, y deux vecteurs, et a, b deux scalaires, ces six éléments étant arbitrairement choisis ;

$$\begin{aligned}\Phi(\omega + a\rho, x) &= (\omega + a\rho)(x)\\ &= \omega(x) + a \cdot \rho(x)\\ &= \Phi(\omega, x) + a \cdot \Phi(\rho, x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\omega, x + by) &= \omega(x + by)\\ &= \omega(x) + b \cdot \omega(y)\\ &= \Phi(\omega, x) + b \cdot \Phi(\omega, y)\end{aligned}$$

$\therefore$ Φ est bilinéaire.

C.Q.F.D.

DÉFINITION 3.
Une forme linéaire ω et un vecteur x sont dits **orthogonaux** si $\omega(x) = 0$.

Ceci revient à dire que ω et x sont orthogonaux si $\Phi(\omega, x) = 0$.

DÉFINITION 4.
Un ensemble Ω de formes linéaires et un ensemble X de vecteurs sont dits **orthogonaux** si chaque forme linéaire de Ω est orthogonale à chaque vecteur de X.

PROPOSITION 3.
Si Ω est un ensemble de formes linéaires, l'ensemble des vecteurs qui lui sont orthogonaux est un sous-espace vectoriel.

Soit X l'ensemble des vecteurs orthogonaux à Ω.
Soient x, y deux vecteurs quelconques de X, et a un scalaire ;
pour toute forme linéaire $\omega \in \Omega$,
$\Phi(\omega, x) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(\omega, y) = 0$;
comme Φ est bilinéaire, $\Phi(\omega, ax + y) = a \cdot \Phi(\omega, x) + \Phi(\omega, y)$;
$\therefore \Phi(\omega, ax + y) = a \cdot 0 + 0 = 0$;
comme ceci est vrai pour toute forme linéaire $\omega \in \Omega$, $ax + y \in X$;
$\therefore X$ est un sous-espace vectoriel de E.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4.
Si X est un ensemble de vecteurs, l'ensemble des formes linéaires qui lui sont orthogonales est un sous-espace vectoriel de $E^\star$.

DÉFINITION 5.
L'ensemble des vecteurs orthogonaux à une forme linéaire, ou à un ensemble de formes linéaires, est appelé son **orthogonal.** De même, l'ensemble des formes linéaires orthogonales à un vecteur, ou à un ensemble de vecteurs, est aussi appelé son **orthogonal.**

CONVENTION 3.
Si Ω est une forme linéaire, ou un ensemble de formes linéaires, convenons de représenter son orthogonal par le symbole $\Omega^\perp$. De même, si X est un vecteur, ou un ensemble de vecteurs, convenons de représenter son orthogonal par le symbole $X^\perp$.

PROPOSITION 5.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

Soit p la dimension de F. Choisissons une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F, et complétons-la en une base $B = (e_1, \ldots, e_p, \ldots, e_n)$ de E.
Soient $e_1^\star, \ldots\ldots, e_n^\star$ les formes linéaires définies par la formule générale

$$e_i^\star(e_j) = \delta_{ij}$$

$B^\star = (e_1^\star, \ldots\ldots, e_n^\star)$ est une base de $E^\star$, et la matrice de Φ dans les bases B, $B^\star$ est

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} e_1^\star & \dots & e_p^\star & e_{p+1}^\star & \dots & e_n^\star \end{array} \\
\begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

(c'est-à-dire la matrice unité).

Cette matrice montre que les seules formes linéaires orthogonales à $\{e_1, \ldots, e_p\}$ sont $e_{p+1}^\star, \ldots, e_n^\star$;

$\therefore F^\perp = Vect(e_{p+1}^\star, \ldots, e_n^\star)$;

comme $e_{p+1}^\star, \ldots, e_n^\star$ sont des vecteurs d'une base, $\dim F^\perp = n - p$;

$\therefore \dim F + \dim F^\perp = n - p + p = n = \dim E$.

C.Q.F.D.

Proposition 6.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, et que $F \subseteq G$: $G^\perp \subseteq F^\perp$.

Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels ; nous avons vu que si G est inclus dans F, $F^\perp$ est inclus dans $G^\perp$. Donc une description des positions respectives de différents sous-espaces vectoriels de E peut être transformée en une description des positions respectives de leurs orthogonaux (dans $E^\star$), par un simple changement du sens des inclusions.

Soient maintenant deux variétés linéaires projectives A et B de $\overline{|E}$, telles que $A \subseteq B$. Nous pouvons associer de façon unique A et B aux deux sous-espaces vectoriels F et G tels que $A = \overline{|F}$ et $B = \overline{|G}$, et l'inclusion est conservée : $F \subseteq G$. Prenons les orthogonaux de F et G ; l'inclusion change de sens : $G^\perp \subseteq F^\perp$. Finalement, prenons les espaces projectifs associés à $F^\perp$ et $G^\perp$; l'inclusion reste inversée : $\overline{|F^\perp} \subseteq \overline{|G^\perp}$. De plus, si n désigne la dimension de $\overline{|E}$,

$$
\begin{aligned}
\dim A &= \dim \overline{|F} \\
&= \dim F - 1 \\
&= (\dim E - \dim F^{\perp}) - 1 \\
&= (n + 1 - \dim F^{\perp}) - 1 \\
&= n - \dim F^{\perp} \\
&= n - \dim \overline{|F^{\perp}} - 1
\end{aligned}
$$

Ceci étant vrai pour tous les espaces projectifs, et pour toutes les variétés linéaires projectives choisies, nous pouvons accepter le principe suivant :

PRINCIPE DE DUALITÉ.
Tout théorème de géométrie projective dans un espace projectif de dimension n, si son énoncé ne fait intervenir que les positions relatives des différentes variétés linéaires projectives, reste vrai si l'on permute les concepts de "variété linéaire projective de dimension m" et de "variété linéaire projective de dimension $n - m - 1$", d'une part, et les concepts de "contenir" et d'"être inclus", d'autre part.

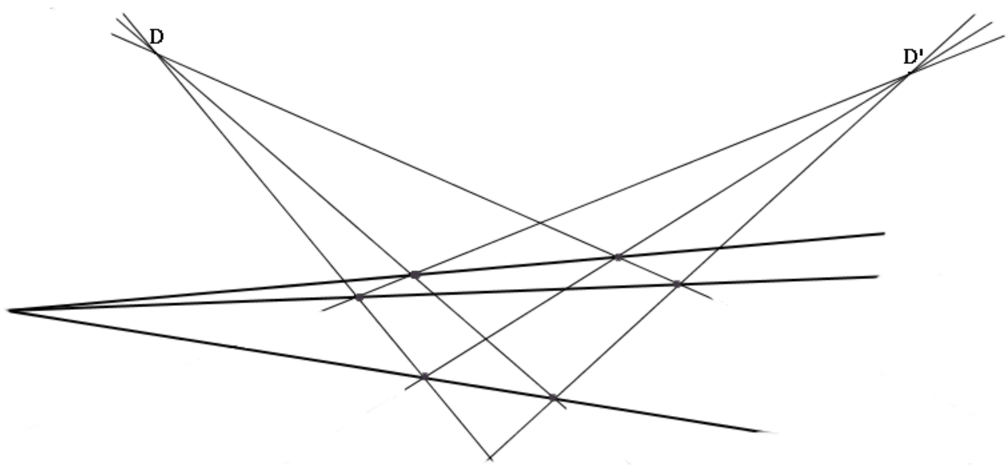
§2. Le principe de dualité dans le plan projectif.

Plaçons-nous dans le plan projectif (dimension : $n = 2$) ; il est possible de trouver une expression simple du principe du dualité, car les seules variétés linéaires projectives autres que le plan sont les points (dimension : $m = 0$) et les droites (dimension : $m = 1$), et que leurs dimensions se correspondent par la formule $n - m - 1$. Le principe général énoncé dans la première section montre que les concepts à permuter sont ceux de "point" et de "droite", et ceux de "couper" et de "réunir" (deux droites se coupent en un point, deux points sont réunis par une droite) ; nous retrouvons le principe de dualité tel qu'il est exprimé dans la citation d'Egmont Colerus :

PRINCIPE DE DUALITÉ.
Tout théorème de géométrie projective du plan, si son énoncé ne fait intervenir que les positions relatives des droites et des points, reste vrai si l'on permute les concepts de "couper" et de "réunir", d'une part, et, ceux de "point" et de "droite", d'autre part.

Pour apprécier le pouvoir de ce principe, appliquons-le aux deux théorèmes du chapitre précédent : les théorèmes de Pappus et de Desargues. Le théorème de Pappus affirme ceci :
«Soient d et d' deux droites distinctes, et O leur point d'intersection (éventuellement à l'infini). Si A, B, C sont trois points distincts sur d, tous différents de O, que A', B', C' soient trois points distincts sur d', tous différents de O, et que X, Y, Z désignent les intersections respectives des droites (AB') et (BA'), (BC') et (CB'), (AC') et (CA') : alors X, Y et Z sont alignés.»
En permutant les concepts de "point" et de "droite", et ceux de "couper" et de "réunir", nous obtenons le théorème suivant :

Proposition 7.
(Théorème dual de celui de Pappus.)



Soient D et D' deux points distincts, et o la droite les joignant. Si a, b, c sont trois droites distinctes concourantes en D, toutes différentes de o, que a', b', c' soient trois droites distinctes concourantes en D', toutes différentes de o, et que x, y, z désignent les droites joignant respectivement les points $a \cap b'$ et $b \cap a'$, $b \cap c'$ et $c \cap b'$, $a \cap c'$ et $c \cap a'$: alors x, y et z sont concourantes.

Il n'est pas nécessaire de démontrer ce dernier théorème : il est vrai en vertu du principe de dualité.

Maintenant, essayons d'obtenir un nouveau théorème à partir de celui de Desargues ; rappelons que le théorème de Desargues affirme ceci :

«Soient $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ deux triangles sans sommets communs. Si les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en un point O, et que X, Y, Z désignent les intersections respectives de (AB) et $(A'B')$, (BC) et $(B'C')$, (CA) et $(C'A')$: alors X, Y et Z sont alignés.»

En permutant les concepts de "point" et de "droite", et ceux de "couper" et de "réunir", nous obtenons :

Proposition 8.

(Théorème dual de celui de Desargues.) Soient a, b, c les trois droites d'un triangle, et a', b', c' les trois droites d'un autre triangle, ces six droites étant distinctes. Si les points $a \cap a'$, $b \cap b'$, $c \cap c'$ sont alignés, et que x, y, z désignent les droites joignant respectivement $a \cap b$ et $a' \cap b'$, $b \cap c$ et $b' \cap c'$, $c \cap a$ et $c' \cap a'$: alors x, y et z sont concourantes en un point O.

Ce nouveau théorème peut être reformulé ainsi :

«Soient $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ deux triangles sans sommets communs. Si les intersections respectives des droites (AB) et $(A'B')$, (BC) et $(B'C')$, (CA) et $(C'A')$ sont alignées, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point O.»

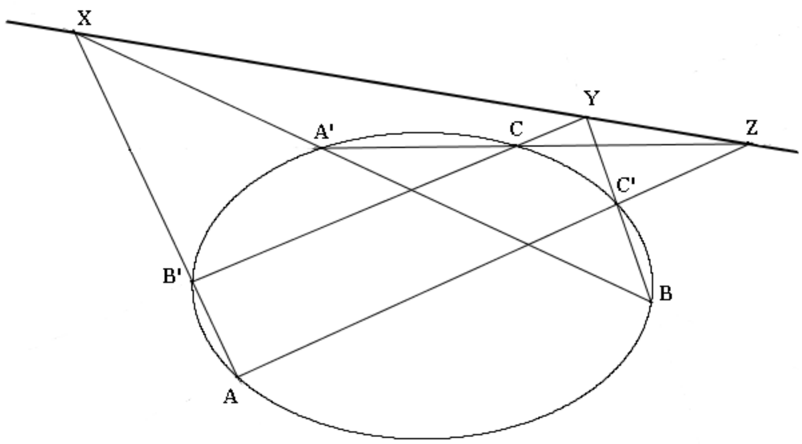
Et nous voyons que ce dernier énoncé est la réciproque du théorème de Desargues.

CHAPITRE 8.

L'HEXAGRAMME MYSTIQUE DE PASCAL.

§1. Le théorème de Pascal.

PROPOSITION 1.



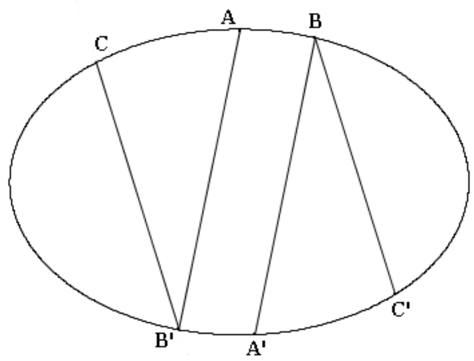
Soit c une conique projective. Si A, B, C, A', B', C' sont six points de c, et que X, Y, Z désignent les intersections respectives de (AB') et (BA'), (AC') et (CA'), (BC') et (CB') : alors X, Y et Z sont alignés.

Si la conique c est dégénérée (c.à.d. si $c =$ deux droites sécantes), X, Y et Z sont alignés en vertu du théorème de Pappus.

Supposons maintenant que la conique ne soit pas dégénérée : nous pouvons trouver une droite qui ne la coupe pas ; il existe une transformation projective qui envoie cette droite à l'infini, et l'image de c par cette transformation est une ellipse (car les ellipses sont les seules coniques sans points à l'infini) : nous pouvons donc raisonner en considérant que c est une ellipse.

De deux choses l'une : soit la droite (XY) coupe l'ellipse c, soit elle ne la coupe pas.

(1) Si la droite (XY) ne coupe pas c : il existe une transformation projective qui envoie (XY) sur la droite à l'infini, et l'image de c par cette transformation est encore une ellipse : nous pouvons donc considérer que les points X et Y sont à l'infini, c'est-à-dire que $(AB') \parallel (BA')$ et $(BC') \parallel (CB')$.



$(AB') \parallel (BA') \therefore \operatorname{arc} AB = \operatorname{arc} B'A'$;
$(BC') \parallel (CB') \therefore \operatorname{arc} BC = \operatorname{arc} C'B'$;
en faisant la somme membre à membre des deux égalités, on obtient

$$\operatorname{arc} AC = \operatorname{arc} C'A'$$

$\therefore (AC') \parallel (C'A)$;
$\therefore Z$ est un point à l'infini ;
comme X et Y sont aussi des points à l'infini, X, Y et Z sont alignés.

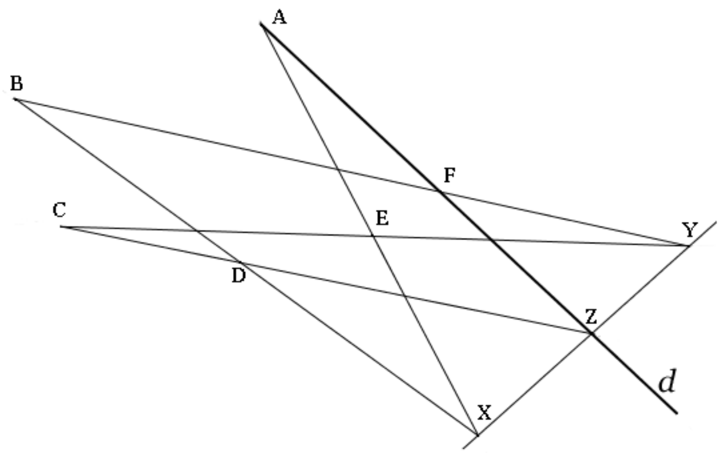
(2) Si la droite (XY) coupe c : il n'est plus possible d'envoyer (XY) à l'infini sans dénaturer c ; nous ne traiterons pas ce cas, plus difficile que le premier. Toutefois, il est évident que même dans ce cas, X, Y et Z sont alignés (car sinon, les mathématiciens auraient déjà noté l'erreur).

Dans tous les cas, X, Y et Z sont alignés.

C.Q.F.D.

Problème 1.
Étant donnés cinq points A, B, C, D, E et une droite d passant par A, construire l'intersection de d avec la conique $ABCDE$.

Soit F le point recherché. Appelons X et Z les intersections respectives des droites (AE) et (BD), (CD) et d ;



traçons la droite (XZ) ; soit Y son intersection avec la droite (CE) ;

$d = (AF)$ $\therefore$ d'après le théorème de Pascal, l'intersection des droites (BF) et (CE) est sur la droite (XZ) ;

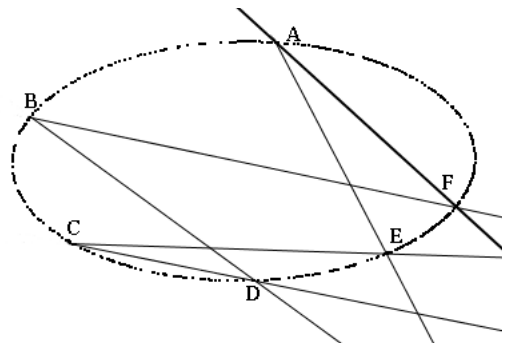
$\therefore Y$ est l'intersection de (BF) et (CE) ;

$\therefore (BY) = (BF)$;

comme $d = (AF)$, nous n'avons plus qu'à tracer la droite (BY) : elle coupe d en F.

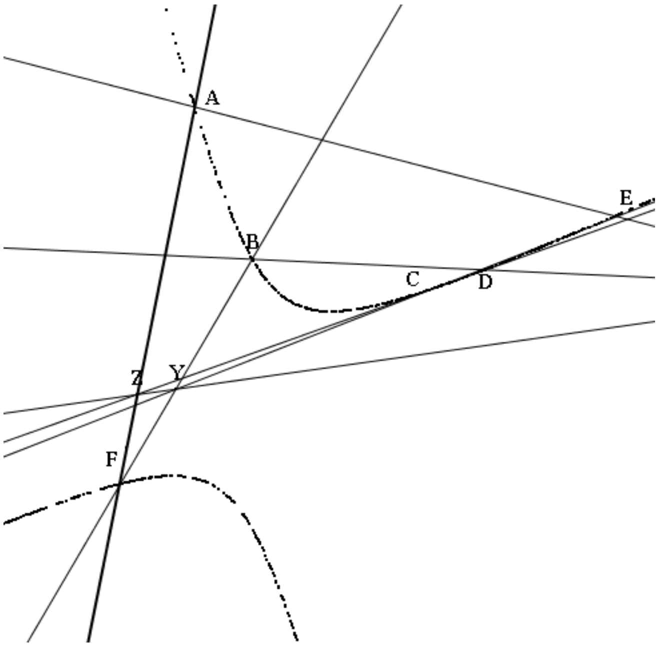
Q.E.F.

Nous disposons ainsi d'une méthode pour construire point par point la conique qui passe par cinq points donnés. Gardons la disposition des points A, B, C, D, E du diagramme précédent, et ordonnons au logiciel de géométrie de dessiner le lieu du point F :



Comme prévu, ce lieu semble être une conique ; plus exactement une ellipse.

En disposant convenablement A, B, C, D, E, nous pouvons changer la nature de ce lieu ; par exemple en une hyperbole :



§2. *Application à la géométrie arithmétique.*

Nous venons de voir une application géométrique du théorème de Pascal (la construction point par point d'une conique). Ce théorème va maintenant nous servir à prouver qu'une certaine loi est associative, et qu'ainsi elle donne une structure de groupe à l'ensemble des points à coordonnées rationnelles d'une ellipse d'équation rationnelle.

Plaçons-nous dans le plan affine, et choisissons un repère des coordonnées cartésiennes.

Définition 1.
Un point est dit **rationnel** si ses coordonnées sont toutes rationnelles. De même, une droite est dite **rationnelle** si ses équations linéaires sont rationnelles.

Définition 2.
On dit que deux points sont **de la même nature algébrique** s'ils sont tous les deux rationnels, ou si aucun des deux ne l'est.

Proposition 2.
Soient $F(X,Y) = 0$ une équation du second degré à coefficients rationnels, et $f(X,Y) = 0$ une équation du premier degré à coefficients rationnels. Les racines communes de ces deux équations, si elles sont réelles, sont toutes rationnelles ou toutes irrationnelles.

L'équation $f(X,Y) = 0$ est équivalente à un système de deux équations paramétriques à coefficients rationnels :

$$\begin{cases} X = at + a_0 \\ Y = bt + b_0 \end{cases}$$

$\therefore$ les racines communes des deux équations de départ sont des triplets $(at+a_0, bt+b_0)$, où t est solution de

$$F(at + a_0, bt + b_0) = 0$$

cette dernière équation peut s'écrire explicitement

$$At^2 + Bt + C = 0$$

où A, B, C sont des nombres rationnels ; si cette équation admet des racines réelles t_1 et t_2, elle devient

$$A(t - t_1)(t - t_2) = 0$$

$\therefore A \cdot t_1 \cdot t_2 = C$, d'où $t_1 \cdot t_2 = \dfrac{C}{A} = \dfrac{\text{un rationnel}}{\text{un rationnel}} = \text{un rationnel;}$

$\therefore t_1$ et t_2 sont deux rationnels ou bien deux irrationnels ;

dans le permier cas, les triplets $(at_1 + a_0, bt_1 + b_0)$ et $(at_2 + a_0, bt_2 + b_0)$ sont tous les deux rationnels ;

dans le second cas, ces triplets sont tous les deux irrationnels.

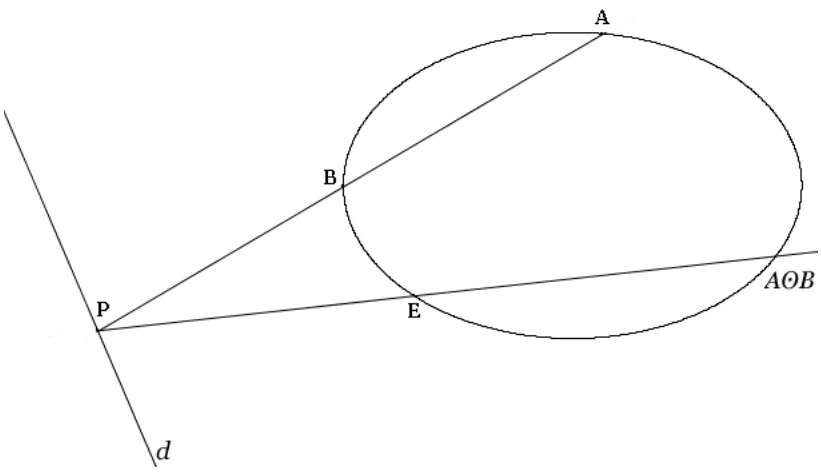
C.Q.F.D.

Corollaire de la Prop. 2
Les deux points d'intersection d'une droite rationnelle et d'une ellipse d'équation rationnelle sont de la même nature algébrique.

Convention 1.
Jusqu'à la fin du chapitre, c désigne une ellipse dont l'équation en coordonnées cartésiennes (disons $F(X,Y) = 0$) est rationnelle.

Définition 3.
Choisissons un point E de c de coordonnées rationnelles, et une droite d extérieure à c d'équation rationnelle ; nous les appellerons respectivement le **point de référence** et la **droite de référence**.

Définition 4.



$\odot$ est la loi interne définie ainsi : si A et B sont deux points de c, et que P désigne l'intersection (éventuellement à l'infini) de (AB) et de la droite de référence,

$A \odot B =$

$$\begin{cases} \text{l'intersection de } c \text{ et } (PE) \text{ autre que } E, \text{ si } c \text{ et } (PE) \text{ ont 2 points d'intersection} \\ \text{le point } E, \text{ si } (PE) \text{ est tangente à } c \end{cases}$$

Pour que cette définition reste valable quand $A = B$, il faut comprendre que (AA) désigne la tangente à c en A.

Proposition 3 (Conséquence directe de la définition).
La loi $\odot$ est commutative.

Proposition 4.
Le point E est élément neutre de la loi $\odot$.

Proposition 5.
Tout point de c admet un inverse dans c pour la loi $\odot$.

Traçons la tangente à c en E ; soit P son intersection avec la droite d.

Traçons la droite (PM) ; soit N son intersection avec c autre que M (si (PM) est tangente à c, on prendra $N = M$) ;

par construction, $E = M \odot N$;

$\therefore N$ est l'inverse de M pour la loi $\odot$;
$\therefore$ tout point de c admet un inverse pour la loi $\odot$.

C.Q.F.D.

Proposition 6.
La loi $\odot$ est associative.

Soient A, B, C trois points de c. Construisons les points $A \odot B$, $B \odot C$, $(A \odot B) \odot C$, $A \odot (B \odot C)$, et pour abréger, nommons-les respectivement C', A', R, S.
Soient X, Y, Z les intersections respectives de (AB) et (EC'), (EA') et (CB), (AA') et (CC') ;
d'après le théorème de Pascal, X, Y, et Z sont alignés ;
or X et Y sont deux points de d (ce sont les deux points intermédiaires des constructions de $c' = a \odot b$ et $a' = b \odot c$) ;
$\therefore Z \in d$.
L'intersection de (AA') et (ES) est un point de d (c'est le point intermédiaire de la construction de S) ;
$\therefore$ ce point d'intersection $= Z$;
de même, l'intersection de (CC') et (ER) est un point de d ;
$\therefore$ ce point d'intersection $= Z$;
$\therefore$ ces deux points d'intersection sont confondus,
d'où R=S, c'est-à-dire $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$.

C.Q.F.D.

Proposition 7 (Conséquence des quatre dernières propositions).
L'ellipse c munie de la loi $\odot$ est un groupe abélien.

Proposition 8.
L'ensemble des points rationnels de c muni de la loi $\odot$ est un groupe abélien.

Soient A et B deux points rationnels de c.
La droite (AB) est rationnelle ;
or la droite de référence d est aussi rationnelle ;
$\therefore$ le point d'intersection P de la droite (AB) et de la droite d est rationnel.
Comme le point de référence E est rationnel, la droite (PE) est rationnelle ; elle coupe c en deux points : E et $A \odot B$ (ces deux points étant confondus si (PE) est tangente à c) ;
de plus, c est une ellipse d'équation rationnelle ;
$\therefore A \odot B$ est de la même nature algébrique que E ;
$\therefore A \odot B$ est un point rationnel.
Ainsi, l'ensemble des points rationnels de c est clos pour la loi $\odot$;
$\therefore$ c'est un sous-groupe de l'ellipse munie de la loi $\odot$.

C.Q.F.D.

CHAPITRE 9.

LA RÉCIPROCITÉ POLAIRE.

Convention 1.
(Notation de Muir.)
Convenons de représenter le développement de

$$ {}^t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ l & m & n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} $$

par le symbole

$$ \begin{array}{ccc|c} p & q & r & \\ \hline d & e & f & a \\ g & h & k & b \\ l & m & n & c \end{array} $$

Proposition 1.
Si Q est une forme quadratique définie par $Q(X,Y,Z) = \begin{array}{ccc|c} X & Y & Z & \\ \hline a & b & c & X \\ b & d & e & Y \\ c & e & f & Z \end{array}$, ses dérivées partielles sont :

$$ \frac{\partial Q}{\partial X}(x,y,z) = \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2a & 2b & 2c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \frac{\partial Q}{\partial Y}(x,y,z) = \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2b & 2d & 2e & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} $$

$$ \frac{\partial Q}{\partial Z}(x,y,z) = \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2c & 2e & 2f & 1 \end{array} $$

PROPOSITION 2.
Si $Q(X, Y, Z)$ est une forme quadratique, et que B soit sa forme polaire,

$$\frac{\partial Q}{\partial X}(x,y,z)x' + \frac{\partial Q}{\partial Y}(x,y,z)y' + \frac{\partial Q}{\partial Z}(x,y,z)z' = 2B[(x,y,z),(x',y',z')].$$

D'après la proposition précédente,

$$\frac{\partial Q}{\partial X}(x,y,z)x' + \frac{\partial Q}{\partial Y}(x,y,z)y' + \frac{\partial Q}{\partial Z}(x,y,z)z'$$

$$= \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2a & 2b & 2c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \times x' + \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2b & 2d & 2e & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \times y' + \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2c & 2e & 2f & 1 \end{array} \times z'$$

$$\text{or ceci} = \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2a & 2b & 2c & x' \\ 2b & 2d & 2e & y' \\ 2c & 2d & 2f & z' \end{array} = 2 \times \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline a & b & c & x' \\ b & d & e & y' \\ c & d & f & z' \end{array}$$

$= 2B[(x,y,z),(x',y',z')]$, où B représente la forme polaire de Q.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.
Si $Q(X, Y, Z)$ est une forme quadratique, et que B soit sa forme polaire, l'équation du plan vectoriel tangent en $(x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$ au cône d'équation $Q(X, Y, Z) = 0$ est $B[(x_0, y_0, z_0), (X, Y, Z)] = 0$.

L'équation du plan tangent est

$$\frac{\partial Q}{\partial X}(x_0,y_0,z_0)(X - x_0) + \frac{\partial Q}{\partial Y}(x_0,y_0,z_0)(Y - y_0) + \frac{\partial Q}{\partial Z}(x_0,y_0,z_0)(Z - z_0) = 0$$

ceci est équivalent à

$$2B[(x_0,y_0,z_0),(X - x_0, Y - y_0, Z - z_0)] = 0$$

c'est-à-dire à

$$2B[(x_0,y_0,z_0),(X,Y,Z)] - 2B[(x_0,y_0,z_0),(x_0,y_0,z_0)] = 0 \text{ (car } b \text{ est bilinéaire)} ;$$

comme (x_0, y_0, z_0) est un point du cône,

$$2B[(x_0,y_0,z_0),(x_0,y_0,z_0)] = 2Q(x_0,y_0,z_0) = 0;$$

$\therefore$ l'équation du plan tangent devient finalement, après l'élimination du terme nul et une division par 2 :

$$B[(x_0,y_0,z_0),(X,Y,Z)] = 0.$$

C.Q.F.D.

Définition 1.
Soient $Q(X, Y, Z)$ une forme quadratique, B sa forme polaire, et (a, b, c) un vecteur non-nul de E. Le plan vectoriel d'équation $B[(a, b, c), (X, Y, Z)] = 0$ est appelé le **plan polaire de (a, b, c) par rapport au cône d'équation $Q(X, Y, Z) = 0$.**

Proposition 4.
Soient $Q(X, Y, Z)$ une forme quadratique, et C le cône d'équation $Q(X, Y, Z) = 0$. Si le plan polaire d'un vecteur $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ par rapport à C contient un vecteur $(d, e, f) \neq (0, 0, 0)$, alors le plan polaire de (d, e, f) par rapport à C contient (a, b, c).

Appelons B la forme polaire de Q.

Si le vecteur (d, e, f) appartient au plan polaire de (a, b, c) par rapport à C, alors il satisfait l'équation de ce plan, c'est-à-dire :

$$B[(a, b, c), (d, e, f)] = 0;$$

or B est symétrique, en tant que forme polaire d'une forme quadratique ;

$\therefore B[(d, e, f), (a, b, c)] = 0$;

$\therefore (a, b, c)$ appartient au plan polaire de (d, e, f) par rapport à C.

C.Q.F.D.

CHAPITRE 10.

LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE SUR LE CORPS À CINQ ÉLÉMENTS.

Pour finir, construisons un espace projectif fini, c'est-à-dire à partir d'un espace vectoriel de dimension finie, et énonçons quelques résultats numériques.

$*$

$*$ $*$

$*$

Convention 1.
Convenons de représenter le corps à cinq éléments ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$) par le symbole $\mathbb{F}_5$.

Proposition 1.
Soit n un entier naturel. L'espace projectif $\overline{|\mathbb{F}_5^n}$ contient $\dfrac{5^n-1}{4}$ points projectifs.

Soit $A = \mathbb{F}_5^n - 0$ l'ensemble des vecteurs non-nuls de $\mathbb{F}_5^n$.

Deux vecteurs de A sont dans la même droite vectorielle si et seulement s'ils sont colinéaires.

soit x un vecteur quelconque de A ; il a au maximum trois multiples distincts, à savoir $2x$, $3x$, $4x$;

comme x est non-nul, une de ses composantes est $\neq 0$, et nous pouvons écrire :

$$x = \begin{pmatrix} \vdots \\ a \\ \vdots \end{pmatrix}$$

où a =1, 2, 3 ou 4 ;

$$\therefore 2x = \begin{pmatrix} \vdots \\ 2a \\ \vdots \end{pmatrix} \quad 3x = \begin{pmatrix} \vdots \\ 3a \\ \vdots \end{pmatrix} \quad 4x = \begin{pmatrix} \vdots \\ 4a \\ \vdots \end{pmatrix}$$

et $a, 2a, 3a, 4a$ est une permutation de $1, 2, 3, 4$;
$\therefore$ les vecteurs x, $2x$, $3x$, $4x$ sont bien distincts ;
$\therefore$ chaque droite vectorielle contient exactement 4 vecteurs de A ;
$\therefore$ le nombre de droites vectorielles de A est $\dfrac{\operatorname{Card} A}{4} = \dfrac{5^n - 1}{4}$.
$\therefore$ $\overline{|\mathbb{F}_5^n}$ contient $\dfrac{5^n - 1}{4}$ points projectifs.

C.Q.F.D.

En particulier, il y a :

Un seul	point projectif	dans	$\overline{|\mathbb{F}_5^1}$;
6	points projectifs	"	$\overline{|\mathbb{F}_5^2}$;
31	" "	"	$\overline{|\mathbb{F}_5^3}$;
156	" "	"	$\overline{|\mathbb{F}_5^4}$;
781	" "	"	$\overline{|\mathbb{F}_5^5}$;

etc...

PROPOSITION 2.
Soit n un entier ≥ 2. Toutes les droites projectives de $\overline{|\mathbb{F}_5^n}$ contiennent 6 points.

Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{F}_5^n$, engendré par deux vecteurs u, v.
Comme u et v engendrent P, ces deux vecteurs sont libres ;
$\therefore$ un des déterminants principaux de la matrice (u, v) est $\neq 0$.
Considérons maintenant le vecteur $u + v$;
les déterminants principaux de $(u, u + v)$=les déterminants principaux de (u, v) ;
$\therefore$ un des déterminants principaux de $(u, u + v)$ est $\neq 0$;
$\therefore$ $u + v$ et v ne sont pas colinéaires, et $u + v$ est $\neq 0$.
De même, $u + v$ et u ne sont pas colinéaires.
Par des calculs similaires, on montre que deux vecteurs choisis parmi u, v, $u + v$, $u + 2v$, $u + 3v$, $u + 4v$ ne sont jamais colinéaires, et qu'ils sont tous $\neq 0$.
Soit maintenant un vecteur w de P. Il peut se décomposer en une combinaison linéaire de u et v :
$w = au + bv$, où a et $b \in \mathbb{F}_5$.
Si $a = 0$, $w = bv$;
si $a \neq 0$, a possède un inverse (car $\mathbb{F}_5$ est un corps), et $w = a(u + a^{-1} \cdot bv)$;
dans les deux cas, w est un multiple d'un des vecteurs u, v, $u + v$, $u + 2v$, $u + 3v$, $u + 4v$.
$\therefore$ il y a exactement 6 droites vectorielles incluses dans P.
$\therefore$ toutes les droites projectives de $\overline{|\mathbb{F}_5^n}$ contiennent 6 points.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.
Soit n un entier ≥ 2. Le nombre de droites projectives de $\overline{|\mathbb{F}_5^n}$ est $\dfrac{(5^n - 1)(5^n - 5)}{480}$.

Le nombre de façon de choisir 2 points projectifs dans $\overline{|\mathbb{F}_5^n}$ est

$$\frac{(5^n-1)(5^n-5}{32}$$

Le nombre de façon de choisir 2 points projectifs sur une même droite projective est

$$\frac{6\times 5}{2}=15$$

$\therefore$ le nombre de droites projectives de $\overline{|\mathbb{F}_5^n}$ est

$$\frac{(5^n-1)(5^n-5)}{15\times 32}=\frac{(5^n-1)(5^n-5)}{480}$$

C.Q.F.D.

En particulier, il y a :

Une seule	droite projective	dans	$\overline{\vert\mathbb{F}_5^2}$;
31	droites projectives	"	$\overline{\vert\mathbb{F}_5^3}$;
806	" "	"	$\overline{\vert\mathbb{F}_5^4}$;
20306	" "	"	$\overline{\vert\mathbb{F}_5^5}$;

etc...

Les deux tableaux de valeurs montrent que dans $\overline{|\mathbb{F}_5^3}$, il y a 31 points projectifs, et 31 droites projectives. Cette coïncidence numérique frappante est le résultat de la dualité.

Il est possible de montrer que dans $\mathbb{F}_5^3$, beaucoup de théorèmes classiques de géométrie projective restent vrais : même si nous nous éloignons des espaces ordinaires (construits à partir d'espaces vectoriels sur des corps infinis et continus), nous ne sommes jamais complètement perdus.

FIN.